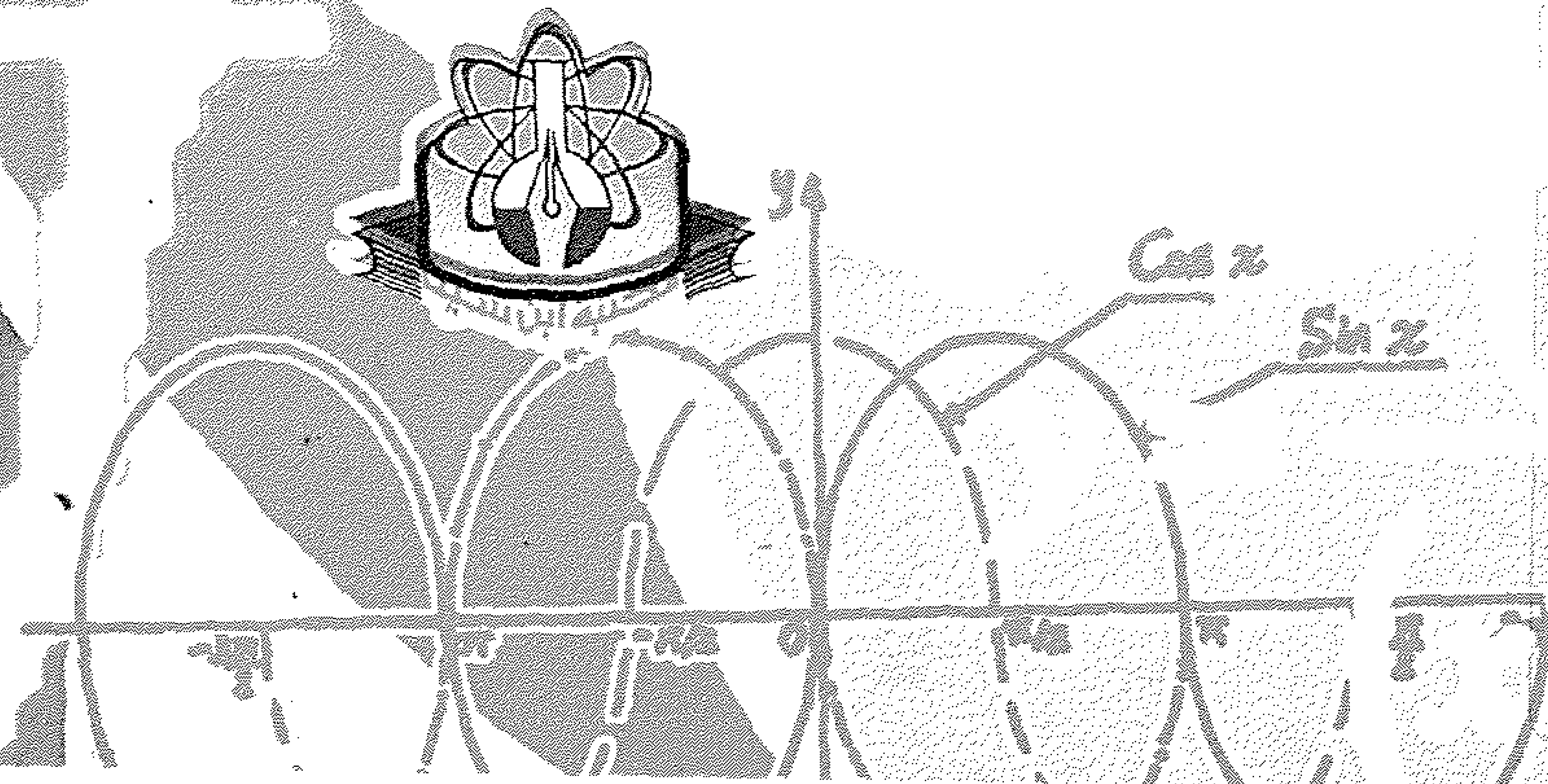
الرياضيات للجميع

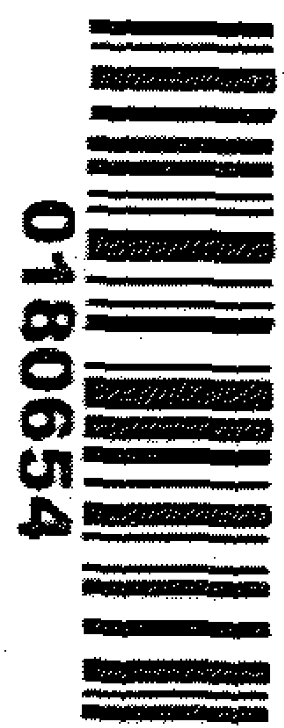
سلاح الطالب في حل مسائل التفاضل

أكثر من ٩٠٠ مسألة ومثال محلول حلاً نموذجيًا في جميع أبواب التفاضل

التحليل الرياضى والدوال والنهايات
النهايات العظمى والصغرى وتطبيقات عليها
التغير ومعدل التغير - قواعد التفاضل - المعامل التفاضلى
تفاضل اللوغاريتمات بأنواعها - تفاضل الدوال الزائدية والدوال الأسية
تفاضل الدوال المتسامية والدوال المثلثية العكسية - التفاضل الجزئى

مهندس / عاطف منصور





الرياضيات للجميع

سلاح الطالب
فى حل مسائل التفاضل

أكثر من ٩٠٠ مسألة ومثال محلول
حلاً نموذجيًا فى جميع أبواب التفاضل

التحليل الرياضى والدوال والنهايات
النهايات العظمى والصغرى وتطبيقات عليها
التغير ومعدل التغير - قواعد التفاضل - المعامل التفاضلى
تفاضل اللوغاريتمات بأنواعها - تفاضل الدوال الزائدية والدوال الأسية
تفاضل الدوال المتسامية والدوال المثلثية العكسية - التفاضل الجزئى

مهندس / عاطف منصور

مكتبة ابن سينا
للنشر والتوزيع والتصدير
٧٦ شارع محمد فريد - جامع الفتح - النزهة
مصر الجديدة - القاهرة - ت ٢٤٧٩٨٦٢ فاكس ٢٤٨٠٤٨٢

بسم الله الرحمن الرحيم

وكلاء التوزيع

السعودية

مكتبة الساعي : الرياض ت : ٤٣٥٣٧٦٨ فاكس : ٤٣٥٥٩٤٥ - فرع جدة ت : ٦٥٣٢٠٨٩
القصيم - بريدة ت : ٣٢٣١٤٣٤ - المدينة المنورة ت : ٨٢٤٢٧٧٥ - ص.ب: ٥٠٦٤٩ - ١١٥٣٣ الرياض

المغرب

دار الاعتصام : 35/33 الممر الملكي - الأحباس - الدار البيضاء - ت : 85 42 30
فاكس : 39 45 44 02 212 00

الإمارات

دار الفضيلة : دبي - ديرة - ص. ب : ١٥٧٦٥ - ت : ٦٩٤٩٦٨ - فاكس : ٦٢١٢٧٦

البحرين

دار الحكمة : ص. ب : ٢٣٨٧٥ - هاتف : ٣٣٦٠٣٢

الجماهيرية العربية الليبية

دار الفرجاني : ص. ب : ١٣٢ - هاتف : ٤٤٨٧٣ - ٦٠٤٤٣١ طرابلس - الجماهيرية العربية الليبية

فلسطين

مكتبة اليازجي : غزة - شارع الوحدة - فاكس : ٨٦٧٠٩٩ - ت : ٨٦١٨٩٢

اليمن

مكتبة العامرية للنشر والتوزيع : صنعاء - الخط الدائري الغربي
ص. ب : ١٤٤٦٦ - ت : ٢٧٧١٦٨

مقدمة

تتنافس العلوم الرياضية فيما بينها لتقديم الحلول والردود المناسبة على تساؤلات الباحثين والدارسين والمهتمين بالتقنيات والمخترعات الحديثة . وقد ساهم علم التفاضل بمعادلاته ونظرياته فى تطوير وتحسين مستوى النتائج فى معامل الأبحاث التكنولوچية ، وهو ما أدى إلى حدوث التطور المستمر للآلات والمعدات التى تخدم كافة المجالات .

ويقوم علم التفاضل بخدمة عدة فروع عملية أخرى مثل علوم الفيزياء ، والهندسة ، والإحصاء ، والبيولوچى ، والاقتصاد ، والفضاء ، .إلخ . وعلى صفحات هذا الكتاب سوف نجد المعالجات المشروحة بالرسم والمنحنيات للمبادئ الأساسية لعلم التفاضل ، مع مجموعة متنوعة من الموضوعات مثل مبادئ التحليل الرياضى والدوال والنهايات والتغير ومعدلاته ، والمعامل التفاضلى وقواعد التفاضل والنهايات العظمى والصغرى ، والمشتقات والتطبيقات عليها ، والدوال الأسية ، وكذلك الدوال الزائدية والتفاضل الجزئى . إلى جانب ما يتخلل ذلك من موضوعات هامة .

وتضمن الكتاب المعالجات النظرية للموضوعات مع عمل التدريبات والتمارين المأخوذة من التطبيقات العملية مع عدد ضخم من الأمثلة والتمرينات المحلولة مأخوذة من امتحانات الجامعات والمدارس والمعاهد العليا والمؤسسات العلمية المتخصصة .

ولقد تم شرح الموضوعات باللغة العربية مع استعمال الرموز والأرقام الأجنبية حتى تساعد القارئ على الربط بين قراءاته فى المراجع الأجنبية والكتب العربية.

نرجو الله سبحانه وتعالى أن يحقق لأبنائنا الطلاب والدارسين الفائدة المرجوة من هذا الكتاب .

المؤلف

الباب الأول

مبادئ التحليل الرياضى ، الفئات ، الأعداد

١-١ :- عام :

التحليل الرياضى له فروع كثيرة من فروع الرياضيات وتجمع فيما بينها بعض الخواص ، فهى تهتم بدراسة العلاقات الكمية فى العالم الحقيقى وتُمثل هذه العلاقات كما هو الحال فى علم الحساب بمقادير عددية ، غير أن علم الحساب والجبر يدرس فى الغالب **المقادير الثابتة** التى تُميز الحالة التى نحن بصددها .

فى حين يتناول التحليل الرياضى **المقادير المتغيرة** والتى تحدد سير العمليات وعند التعرض للعلاقة والارتباط بين المقادير المتغيرة فإنه ينشأ لنا مفهوم الدالة والنهايات .

وفروع التحليل الرياضى متعددة مثل حساب التفاضل والتكامل ونظرية المتسلسلات ونظرية المعادلات التفاضلية . وقد ظهرت مبادئ طرق التحليل الرياضى عند قدماء الإغريق مثل أرشميدس وتطورت ببطء إلى أن جاء القرن السابع عشر حيث قام كل من اسحق نيوتن (١٦٤٢ - ١٧٢٧) عالم الرياضيات الإنجليزى والفيلسوف الألمانى جوتفريد ولهلم ليبنتز (١٦٤٦ - ١٧١٦) ، قاما وبصورة مستقلة بوضع مفهوم لحساب التفاضل والتكامل بصفة عامة وكذلك بالنسبة للمتسلسلات والمعادلات التفاضلية وقام أويلر بعد ذلك فى القرن ١٨ بتطوير مفهوم المتسلسلات والمعادلات التفاضلية كما قام أويلر أيضاً بوضع أسس لفروع أخرى من فروع التحليل الرياضى وقد اكتمل مفهوم هذه العلوم فى القرن التاسع عشر بجهود علماء كثيرين منهم كوشى فى فرنسا وريمان فى ألمانيا .

١-٢ :- الفئات Sets

الفئة عبارة عن مجموعة من الأشياء محددة تحديداً واضحاً وتُعرف الأشياء المكونة للفئة بالعناصر ، عناصر الفئة أو مكونات الفئة أو أعضاء الفئة element or member

وقد لا تكون هنالك صفة مميزة تجمع بين هذه العناصر وقد تكون غير ذات معنى إلا أنها تكون محددة تحديداً واضحاً .

الإ أنه فى الغالب وخاصة من الناحية العملية ، عادة ما تجمع الفئة الواحدة بين مجموعة من العناصر ذات صفة مميزة واحدة أو أكثر .

ومن أمثلة الفئات :

1) $S_1 = \{2,4,6,8\}$

وهى عبارة عن فئة عناصرها عبارة عن الأعداد الزوجية الأكبر من الصفر والأقل من 10

2) $S_2 =$ { السبت ، الأحد ، الإثنين ، الثلاثاء ، الأربعاء ، الخميس ، الجمعة }

وهى فئة تجمع بين أيام الإسبوع وعدد عناصرها سبعة . وفى الفئات لا يهم ترتيب العناصر فمثلا فى الفئة S_1 نجد أن :

$S_1 = \{2,4,6,8\} = \{8,2,6,4\} = \{4,8,2,6\}$

وهذه الفئات متساوية لتساوى عناصرها ، مهما اختلف الترتيب فى العناصر وكذلك الفئة التى تجمع طلاب السنة النهائية فى إحدى الكليات والذين تقل أعمارهم عن 22 عاماً ، مثلا ، وهى فئة تجمع كل الطلاب الذين ينطبق عليهم هذا الشرط بالرغم من أنه قد لا يكون هنالك أى صفة مميزة تجمع بين هؤلاء الطلاب سوى أن أعمارهمْ أقل من 22 عاماً وطلاب فى السنة النهائية لهذه الكلية .

وكذلك الفئة التى تجمع الرجال الأطول من 2 متر ، وهى فئة تجمع بين كل الرجال الأطول من 200 cm مهما اختلفت أعمارهم أو أوزانهم أو مؤهلاتهم أو جنسياتهم أو .... ويرمز للفئات بحروف كبيرة A , B , C مثلا بينما يُرمز لعناصر الفئة برموز من حروف صغيرة مثل $a , b , c, d , ...$

فإذا كانت لدينا الفئة A ومكوناتها a , b , c , h مثلا فإنه يمكن كتابتها كالتالى .

$A = \{a,b,c,h\}$

وأى عنصر من هذه العناصر ينتمى إلى الفئة A ويُعبر عن هذا كما يلى :-

$c \in A$ ، $a,b,h \in A$ ، $b \in A$ ، $a \in A$

بينما العنصر u مثلا فهو لا ينتمى للفئة A ويعبر عن هذا كما يلى :-

$u \notin A$ أى أن u لا تنتمى إلى A . ويمكن كتابة عناصر أى فئة بطريقتين وهما :-

الطريقة الأولى :-

وهى أن نكتب عناصر الفئة كلها بالتفصيل

ومثال ذلك : $S = \{2,4,6,8,10,12,14,16\}$

وعناصر هذه الفئة هى الأعداد الزوجية الأكبر من صفر والأصغر من 17 .

الطريقة الثانية :-

وهى أن نكتب الفئة كالتالى بدون كتابة للعناصر ذاتها

$S =$ { الأعداد الزوجية الأكبر من صفر والأصغر من 17 }

مثـــــال :-

بالطريقة الأولى :-

$S =$ { السبت ، الأحد ، الإثنين ، الثلاثاء ، الأربعاء ، الخميس ، الجمعة }

بالطريقة الثانية :- $S =$ { أيـــام الإســبوع }

الفئة الخالية : **Empty set**

يُطلق على الفئة التى لا تحتوى على أية عناصر ، بالفئة الخالية ويُرمز لها بالرمز Φ

$\Phi = \{ \quad \}$

ويقال للفئة A بأنها فئة جزئية من الفئة B إذا كان كل عنصر من عناصر A ينتمى للفئة B ويعبر عن هذا كما يلى $A \subset B$

وتُقرأ : A فئة جزئية من B "subset" أو A محتواه contained فى B أو B تحتوى A والأخيرة تكتب هكذا $B \supset A$

١-٣ :- الأعــــداد

قام الإنسان منذ قديم الأزل بعمليـات عـد الأشياء التى حولـه ومـن هنا ظهـرت الأعداد ....,1,2,3 وتُعرف هذه الأعداد الآن بالأعداد الطبيعية ، ثم ظهرت الكسور نتيجة لعمليات تقسيم وتوزيع الأشياء وقياس المقادير المتصلة المختلفة مثل الوزن والطول وبتطور علم الجبر كأحد فروع الرياضيات ظهرت الأعداد السالبة وكذلـك الصفـر فـى

أوربا فى القرن السابع عشر فقط فى حين أنها كانت معروفة فى الصين منذ حوالى 2000 عام وفى الهند كذلك منذ حوالى 1500 عام ويُطلق على كل من الأعداد الصحيحة (أو الطبيعية) مثل ....,1,2,3 وكذلك على الأعداد السالبة مثل ....,3−,2−,1− وكذلك الكسور بالأعداد القياسية أوالـمُنطّقة .

الأعـداد الحقيقيـة : Real Numbers "R"

كثير من الفئات ، تتكون عناصرها أو أجزائها من أعداد . والأعداد إما أن تكون حقيقية Real أو مركبة Complex ويرمز للأعداد الحقيقية بالحرف الأول من كلمة $Real \leftarrow R$ والأعداد الحقيقية تنقسم بدورها إلى :-

(١) الأعداد الطبيعية : Natural Numbers "N"

ويرمز لها بالحرف الأول من كلمة $Natural \leftarrow N$

$,N = \{1,2,3,4,5,6,.......\}$

وتعرف كذلك بالأعداد الصحيحة الموجبة وتستخدم لعد عناصر الفئة . ومن ضمن عناصر فئة الأعداد الطبيعية ، هنالك مجموعة عناصر عبارة عن أعداد لا تقبل القسمة إلا على الواحد الصحيح أو على نفسها .

ويُطلق على مجموعة هذه العناصر **بالأعداد الأولية "P" Prime Numbers**

ويرمز لها بالحرف الأول من كلمة $\text{Prime} \leftarrow P$

والأعداد الأولية هى :-

$P = \{1,2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,.....\}$

وواضح أن الأعداد الأولية هى فئة جزئية من الأعداد الطبيعية . $P \subset N$

كما وأن هنالك **الأعداد الزوجية "E" Even Numbers** وهى فئة جزئية من الأعداد الطبيعية ويرمز لها بالحرف الأول من كلمة $Even \leftarrow E$

$,E = \{2,4,6,8,.....\}$

$,E \subset N$

وبصورة عامة فإن العدد الزوجى يمكن كتابته فى الصورة : $E = 2n$

حيث n عدد طبيعى ينتمى إلى مجموعة الأعداد الطبيعية $\therefore E = \{2n, n \in N\}$

وهنالك أيضاً **الأعداد الفردية "O" Odd Numbers** وهى فئة جزئية من فئة الأعداد الطبيعية ويُرمز لها بالحرف الأول من كلمة $Odd \leftarrow O$

$, O=\{1,3,5,7,.....\}$

$O \subset N$

وبصورة عامة فإن العدد الفردى يمكن كتابته فى الصورة $O=2n+1 \quad , \; n \in N$

فمثــلا

$$O = 2\times 3 + 1 = 7$$
$$= 2\times 4 + 1 = 9$$
$$= 2\times 5 + 1 = 11$$

$\therefore O=\{2n+1\} \quad , \; n \in N$

ويلاحظ أن حاصل جمع عددين طبيعين مثل "$a+b$" أو حاصل ضربهما "$a.b$" للعددين الطبيعين a , b ، هو عبارة عن عدد طبيعى آخر .

وهذا ما يدعونا غالباً إلى القول بأن فئات الأعداد الطبيعية مُقفلة أى تنطبق عليها عمليات الجمع والضرب .

(٢) الأعداد الصحيحة : "Integers Numbers "Z

وهى الأعداد ....,$-3,-2,-1,0,1,2,3$.... ويرمز لها بالرمز Z

$Z=\{......,-3,-2,-1,0,1,2,3,..\}$

وبعض عناصر هذه الفئة ، عبارة عن **الأعداد الصحيحة السالبة والصفر**
Negative Integers Numbers

ويرمز لها بالرمز $\bar{Z}$ $\quad \bar{Z}=\{.....,-3,-2,-1,0\}$

وباقى عناصر هذه الفئة هى **الأعداد الصحيحة الموجبة Positive Integers**

ويرمز لها بالرمز $\overset{+}{Z}$ $\quad ,\overset{+}{Z}=\{1,2,3,.....\}$

وقد نشأت الأعداد الصحيحة السالبة من حل معادلات مثل : $X+b=C$

حيث b , C أعداد طبيعية ، مما أدى إلى عمليات الطرح أو عكس عمليات الجمع وهُنا تُصبح $X=C-b$ وكل الأعداد الطبيعية تنتمى إلى فئة الأعداد الصحيحة ، أى $N \subset Z$

(٣) الأعداد القياسية أو الكسرية : Rational Numbers "Q"

وهى عبارة عن الأعداد التى يمكن وضعها فى الصورة $\frac{a}{b}$ مثل $\frac{-5}{3}, \frac{1}{3}$ وقد نشأت هذه الأعداد من حل بعض المعادلات مثل $bx = a$ وذلك لجميع الأعداد الصحيحة للمقدارين a , b حيث $b \neq 0$ ، وبالتالى فإن $x = \frac{a}{b}$ مما أدى إلى ظهور عمليات القسمة وهى عكس عملية الضرب وبالتالى $x = \frac{a}{b}$ ، أ $a \div b$ حيث a هى البسط ، b هى المقام فإذا رمزنا للأعداد القياسية بالرمز Q فإن : $Q = \frac{a}{b}$ حيث :-

a = أحد عناصر الأعداد الصحيحة ، $a \in Z$ ،

b = أحد عناصر الأعداد الطبيعية ، $b \in N$ ، $b \neq 0$

أمثلة : $\frac{-7}{100} = -0.07 , \frac{51}{100} = 0.51 , \frac{4}{7} , \frac{11}{2} , 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ والعدد 57 يمكن كتابته $\frac{57}{1}$ وبذلك فإن أى عدد قياسى n يمكن كتابته فى صورة كسر $\frac{n}{1}$ وبذلك فإن كل الأعداد الصحيحة تُعتبر فئة جزئية من الأعداد القياسية أى $N \subset Z \subset Q \subset R$.

(٤) الأعداد غير القياسية "اللاقياسية" أو الأعداد الصماء :Irrational Numbers

ويرمز لها بالرمز Q' وهى عبارة عن الأعداد التى لا يمكن التعبير عنها فى الصورة الكسرية $\frac{a}{b}$ حيث a , b أعداداً صحيحة . والأعداد اللاقياسية أو الصماء ، تكون مثل $\sqrt{3}$ والنسبة التقريبية π"ط" ، $\sqrt{2}$ ، $\log 3$ ويلاحظ أنه لا يمكن وضعها فى الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a , b أعداداً صحيحة ، $b \neq 0$ وكل من فئة الأعداد القياسية وفئة الأعداد غير القياسية تُعرف بفئة الأعداد الحقيقية أى أن اتحاد كل من Q ، Q' هو R –" اتحاد كل من Q , Q' " $\therefore R = Q \cup Q'$ وذلك لتمييزها عن فئة الأعداد التخيلية والجذور التربيعية لمعظم الأعداد تكون لا قياسية ويجب أن لا نغفل أن π عدد لا قياسى ولكن $\frac{22}{7}$ أو 3.14 هى قيمة تقريبية لهذا العدد اللاقياسى .

وفى بعض الأحيان نلجأ إلى التعبير عن الأعداد القياسية (المُنطّقة) بأعداد تقريبية فمثلا قد نعتبر قيمة الكسر $\frac{1}{3}$ هى 0.33 فقط وهى أقل من $\frac{1}{3}$ أو قد نعتبرها 0.3333 وهى أيضاً أقل من $\frac{1}{3}$ وفى الحالتين السابقتين0.3333 و 0.33 فإننا أخذنا قيمة تقريبية للكسر أقل منه أى أقل من $\frac{1}{3}$ وقد تقرب قيمة الكسر إلى 0.34 أو إلى 0.334 أو إلى 0.3334 وهى أكبر من $\frac{1}{3}$ ويتوقف هذا على درجة الدقة المطلوبة .

ولذلك فإن الأعداد القياسية (المُنطّقة) ، الموجودة ليست كافية فى تطبيقاتنا العملية عِند قياس سمك شريحة معدنية رقيقة مثلا وليكن سمكها مساوياً للعدد 0.058mm ويجب أن لا ننسى هنا درجة الدقة فى كل جهاز مُستخدم فى القياس ومدى الدقة المطلوبة . إلا أنه فى علم الرياضيات فإنه يفترض الدقة المطلقة فى القياس وعلى ذلك كان لزاما إدخال أعداد جديدة وهى الأعداد الصماء أو اللاقياسية أو اللامنطقة وهى تُعبر عن القياس غير المقاس بوحدات القياس (مثل محيط الدائرة) .

فمثلا لا يمكن التعبير عن طول قطر مربع طول ضلعه L بالأعداد القياسية " طول القطر $= L\sqrt{2}$ " أو عن جيب تمام الزاوية 30° وهو يساوى $\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو عن النسبة بين محيط الدائرة إلى قطرها $= \pi$ " $\frac{22}{7}$ تقريباً "

وبصفة عامة فإنه لا يمكننا التعبير عن النسبة بين المستقيمات غير القياسية بالأعداد القياسية فمثلا العدد $\pi = \frac{22}{7}$ تقريباً هو عدد لا قياسى " أصم " وله قيمة تقريبية = 3.14159 وهى أقل من العدد ذاته كما أنه ذو قيمة تقريبية وطبقاً لدرجة الدقة = 3.14160 وهى أكبر من العدد ذاته والفرق بين هاتين القيمتين التقريبيتين هو 0.00001 وعلى ذلك فإن خطأ كل منهما لا يتجاوز فى قدره المطلق العدد 0.00001 وإذا اقتضى الأمر ألا يزيد الخطأ عن المقدار 0.000001 فإننا نجد القيمتين :

3.141592 وهى أقل من π

3.141593 وهى أكبر من π

وعلى هذا فإن العدد اللاقياسى " الأصم أو اللا منطق " لا يمكن أن يكون مساوياً للعدد المنطق بالضبط ، إلا أنه يمكننا أن نجد لكل عدد لا قياسى ، أعداداً قياسية مساوية له بالتقريب كأن تكون أكبر منه قليلا أو أصغر منه قليلا وبذلك فإنه يصبح بالإمكان جعل الخطأ صغيراً بدرجة كافية .

ولإيضاح الأعداد الصماء بصورة أكثر ؛ لنعتبر أن لدينا مربع طول ضلعه $x\ Cm$ مثلا ، باعتبار وحدة القياس هى السنتيمتر فإنه يمكننا أن نرسم مربعات طول ضلعها $x\ Cm$ ، $0.7\ x$ ، $3\ x$ ، $\frac{5}{6}x$ وقد لا نكتب وحدة القياس فنكتب $0.7\ x$ أو $3\ x$ إذا لم يكن هنالك التباس. وتستخدم عادة فى القياس ، أعداد جذرية موجبة فى غالب الأحيان فإنها تعطى قيمة هذا الطول مُقربة بتفريط أو بإفراط " زيادة أو نقصاناً "

فالمربع الذى طول ضلعه = $1\ Cm$ مساحته $1\ Cm^2$

، والمربع الذى طول ضلعه = $2\ Cm$ مساحته $4\ Cm^2$

، والمربع الذى طول ضلعه = $\frac{5}{2}\ Cm$ مساحته $6.25\ Cm^2$

ولكن المشكلة تنشأ من أنه إذا كان لدينا مربع معروفة مساحته فهل سيكون طول ضلعه فى جميع الحالات عدداً جذرياً " قياسياً " موجبا ؟؟

والأمر قد يكون سهلا فى بعض الحالات كما يتضح من الأمثلة التالية :-

المساحة = $16\ Cm^2$ ← طول الضلع = ٤

، المساحة = $\frac{25}{4}\ Cm^2$ ← طول الضلع = $2.5\ Cm = \frac{5}{2}$

فالعدد الجذرى الموجب الذى مربعه = ١٦ هو العدد ٤

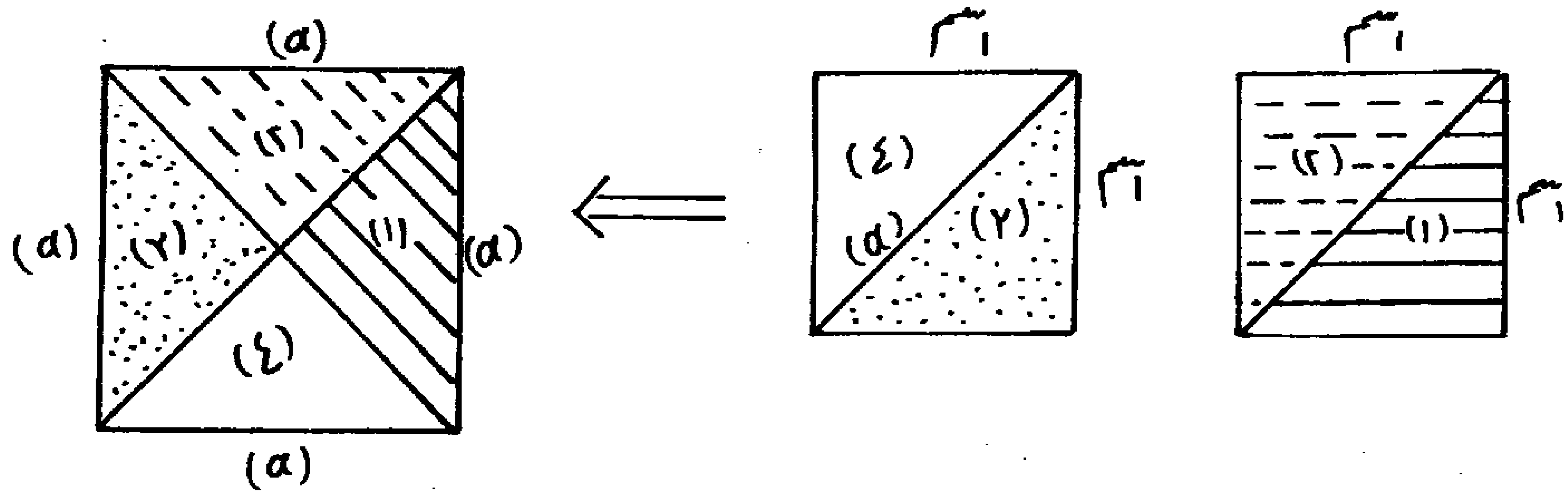
، فالعدد الجذرى الموجب الذى مربعه = $\frac{25}{4}$ هو العدد $\frac{5}{2}$

وبذلك فإن ٤ هى الجذر التربيعى للعدد ١٦ ، $4 = \sqrt{16}$

، $\frac{5}{2}$ هى الجذر التربيعى للعدد $\frac{25}{4}$ ، $\frac{5}{2} = \sqrt{\frac{25}{4}}$

والآن ، سنقوم برسم مربعين على قطعة من الورق ، طول ضلع كـل منهمـا $1\ Cm$ أى أن مساحة كل منهما = وحدة المساحات = $1\ Cm^2$ ثم نقـوم بتقسـيم كـل مربـع إلى قسمين فى اتجاه القطر ونلون كل جزء منهما أو نميزه ، ثم نقوم بتجميعها مرة ثانية " 4 أجزاء " لعمل مربع واحد كبير وستكون مساحة هذا المربع $2\ Cm^2$ وطـول ضلـع كـل منهما = طول قطر المربع الصغير = $a = \sqrt{2} = \sqrt{1+1}$

مساحة المربع $\therefore\ a^2 = 2\ Cm^2$



شكــــل (١-١)

وقد برهن الرياضيون القدامى منذ حوالى 2000 عام أن هذا القياس لـ : a لا ينتمـى إلى المجموعة Q وسموه عدداً لا جذرياً ، لا قياسياً أو أصم وكان هذا أول مثـال لعـدد لا جذرى . وحيث أن $\sqrt{9} = 3$ لأن $3^2 = 9$ فإننـا نسـمى العـدد a الـذى مربعـه =2 بالجذر التربيعى للعدد 2 ونكتبه $\sqrt{2}$

وهُنالك أمثلة كثيرة للأعداد اللاجذرية مثل : $\sqrt{3}\ ,\ \sqrt{5}\ ,\ \sqrt{6}\ ,\ \sqrt{7}\ ,\ \sqrt{8}\ ,\ \sqrt{10}$

وعلمنا مما سبق أن أى عدد أو كل عدد قياسى " جذرى " يمكن أن يكتب فى الصـورة الكسرية $\frac{a}{b}$ حيث $a \in Z$ ، $b \in N$ ، $b \neq 0$

وقـد برهـن الريـاضيون أن $\sqrt{2}$ وبـالمثل $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، ..... لا يمكـن أن تكتـب علـى الصورة $\frac{a}{b}$ وبالمثل جميع الأعداد اللاجذرية (اللاقياسية)

وإذا كان لدينا مكعب حجمه = $8\ Cm^3$ فإن طول ضلعه = $2\ Cm$ لأن 2 هي الجذر التكعيبي للعدد 8 وتُكتب $2 = \sqrt[3]{8}$ ولكن إذا كان لدينا مكعب حجمه = $2\ Cm^3$ ، فهل سيكون قياس طول ضلعه عدد جذري موجب ؟

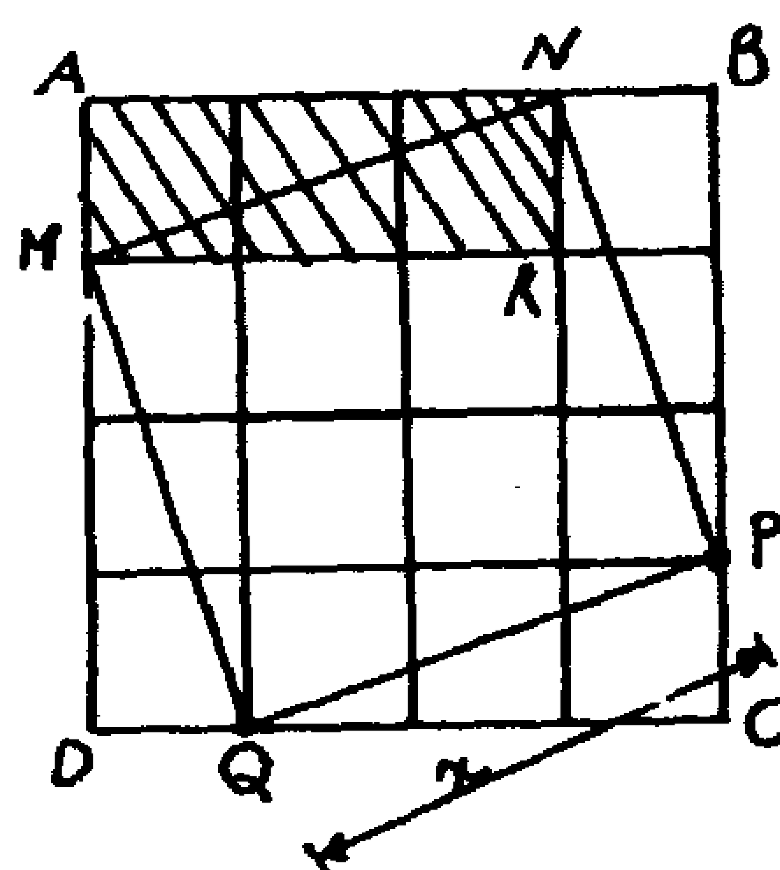
وقد أجاب الرياضيون عن هذا التساؤل بالبرهان بأن هذا القياس لا ينتمي هو الآخر للمجموعة Q وكتبوه $\sqrt[3]{2}$

ومن أمثلة هذا الكثير مثل : $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{100}$

وهذا يوصلنا إلى الحقيقة التي ذكرناها سابقا ، أن الأعداد الجذرية الموجبة ، غير كافية للقياس ولنعتبر عدداً أصم أو لا مُنطق أو لا قياسي أو لا جذري ، آخر مثل $\sqrt{10}$.

ولنعتبر مربعاً $ABCD$ طول ضلعه = $4\ Cm$ ، قُم بتجزئته إلى عدد 16 مربعا متساوياً ، فإذا أخذنا النقط M على AD ، Q على DC ، P على CB ، N على AB كما بالشكل بحيث يكون كل من : NA , PB , QC , DM مساوياً $3\ Cm$ ، ثم ننشئ المستطيل $AMRN$ ومساحته = $3\ Cm^2$ ويمكننا برهان أن الشكل $MQPN$ مربع ومساحته = $10\ Cm^2$ وقياس أو طول ضلع هذا المربع = $\sqrt{10}$ ، فالمساحة :

$x^2 = 10\ Cm^2$



شكل (١-٢)

وسوف نحاول إيجاد بعض القيم لـ x

وتقل بقيمة صغيرة جداً عن 10 , $3^2 = 9$

وتزيد بقيمة كبيرة جداً عن 10 . $4^2 = 16$,

$\therefore\ 3 < x < 4$

وتقل بقيمة صغيرة جداً كذلك $(3.1)^2 = 9.61$,

وتقل بقيمة صغيرة كذلك $(3.16)^2 = 9.9856$,

وتزيد بقيمة صغيرة عن 10 $(3.17)^2 = 10.0489$.

$\therefore\ 3.16 < x < 3.17$

ويمكن أن نستمر بهذه الطريقة لمحاولة إيجاد قيمة أقرب ما تكون وعلى حسب درجة الدقة المطلوبة **إلا أن العملية لن تنتهى أبداً** ولن يمكننا الحصول على عدد قياسى جذرى مربعه = 10 تماماً وفى الحقيقة فإن $\sqrt{10}$ لا يمكن التعبير عنه كعدد جذرى قياسى فى الصورة $\frac{a}{b}$ ولذلك يطلق عليه عدداً لا قياسياً

والجذور التربيعية لمعظم الأعداد هى لا قياسية (ماعدا $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{9}$ ، $\sqrt{16}$ مثلا)، π هى أيضاً عدداً لا قياسياً ويجب أن لا ننسى أن 3.14 أ، $\frac{22}{7}$ هى مجرد قيمة تقريبية للعدد π

ويلاحظ أن $\sqrt{10} \cong 3.1622777$

مقرباً إلى جزء من عشرة من المليون ، إلا أن مربع هذا العدد لا يزال أقل من 10 ولا يعطى 10 تماماً ، أبداً .

١-٤ :- التمثيل الهندسى للأعداد الحقيقية :-

يمكن تمثيل أى عدد حقيقى x ينتمى إلى فئة الأعداد الحقيقية R ، $x \in R$ على خط مستقيم يُعرف بالمحور الحقيقى أو بخط الأعداد الحقيقية *Real line* أو بمحور الأعداد . وكل عدد حقيقى تناظره نقطة واحدة فقط على الخط المستقيم وبنفس الطريقة فإنه يوجد عنصر واحد فقط من فئات الأعداد الحقيقية يناظر عنصراً واحداً فقط من فئات النقط على الخط المستقيم فالأعداد التى على يمين نقطة الأصل 0 هى فئة الأعداد الموجبة بينما الأعداد التى على يسار 0 هى فئة الأعداد السالبة ونقطة 0 ذاتها ليست موجبة ولا سالبة .

١-٥ :- العمليات الجبرية على الأعداد الحقيقية :-

إذا كانت R هى فئة الأعداد الحقيقية ، $\{a , b , c\}$ هى فئة جزئية منها :

$\{a,b,c\}\subset R$

فإن ∴

(١) كل من حاصل $a+b$ ، $a.b$ ينتميان لفئة الأعداد الحقيقية ويُعرف هذا بقانون الإقفال

(٢) $b+a = a+b$ ويعرف هذا بقانون الإبدال الجمعى

(٣) $a+(b+c) = (a+b)+c$ ويُعرف هذا بقانون الترافق الجمعى

(٤) $a . b = b . a$ " " " الإبدال فى الضرب

(٥) $a.(bc) = (ab).c$ " " " الترافق فى الضرب

(٦) $a.(b+c) = ab+ac$ " " " التـــوزيـــع

(٧) $a+0 = 0+a=a$ وتعرف 0 بالعدد المحايد فى الجمع

(٨) $a . 1 = 1.a = a$ وتعرف 1 بالعدد المحايد فى الضرب

(٩) لأى عنصر a ينتمى إلى R يوجد عدد z بحيث أن :

$z+a=0$ وتعرف z بمعكوس a فى عمليات الجمع ، $z=-a$

(١٠) لأى مقدار $a\neq 0$ يوجد عدد z ينتمى إلى R بحيث أن $a z=1$ وتُعرف z بمعكوس a فى عمليات الضرب ، $z=\frac{1}{a}$ or a^{-1}

١-٦ :- القيمة المطلقة للعدد الحقيقى :-

يرمز للقيمة المطلقة للعدد الحقيقى a بالرمز $|a|$ وتُعرف بمقياس أو معيار a ، a قد تكون موجبة أو صفر أو سالبة . ، $|a|$ هى المسافة بين العددين a , 0 أى أنها $S\ (a , 0)$ فمثلا : -

$$|4|=4 , |-4|=4 \quad , \quad |-\sqrt{3}|=|\sqrt{3}|=\sqrt{3}$$

$$,|1|=1 , |0| = 0 \quad , \quad \left|\frac{-2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

أى أن القيمة المطلقة للعدد الحقيقى a هى عدد حقيقى غير سالب أى أن $|a|\geq 0$

ويلاحظ الآتى ∴

(١) $|a \,.\, b \,.\, c| = |a|\,|b|\,|c|$

ومنها $|a \,.\, b \,.\, c \ldots\ldots r| = |a|\,|b|\,|c| \ldots\ldots |r|$

(٢) $|a + b| \leqq |a| + |b|$

ومنها $|a + b + c \ldots\ldots r| \leqq |a| + |b| + |c| + \ldots\ldots |r|$

(٣) $|a - b| \geqq |a| - |b|$

والمسافة بين النقطتين x_2 , x_1 وهما من الأعداد الحقيقة على محور الأعداد الحقيقيـة هى : – $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$

١–٧ :– الأسـس والجـذور :–

إذا ضربنا x فى نفسها عدد n من المرات

أى $x \,.\, x \,.\, x \ldots\ldots$ ، n من المرات

ويمكن أن نعبر رياضيا عن حاصل الضرب السابق كالتالى :–

x^n وتُعرف x بالأســاس ، n بالأُس .

القواعد الأساسية للوغاريتمات :

(١) $x^m \,.\, x^n = x^{m+n}$

فمثـــلا : $x^4 \,.\, x^5 = x^9$

(٢) $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

فمثـــلا : $\dfrac{x^8}{x^3} = x^{8-3} = x^5$

(٣) $(x^m)^n = x^{mn}$

فمثـــلا : $(x^2)^3 = x^6$

(٤) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^m = \dfrac{x^m}{y^m}$

فمثـــلا : $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2^4}{3^4}$

ومن القاعدة الثانيـــة ، :- ،

إذا كانت $m=n$ فإن $x^{m-n} = x^0 = 1$

وهذا منطقى لأن : $\frac{x^m}{x^n}=\frac{x^m}{x^m}=\frac{x^n}{x^n}=x^{m-m}=x^{n-n}=x^0=1$

وذلك طالما $m=n$ وكذلك إذا كان لدينا المقدار x^{m-n} وكانت $m=0$ فإن :-

$x^{m-n} = x^{-n}$ ومنها $\therefore$ $x^{-n} = 1/x^n$ وإذا كانت $x^n = M$ فإن x تُعرف بأنها الجذر النونى (الذى رتبته n) للمقدار M وتكتب هكذا $x = \sqrt[n]{M}$ وأحيانا فإنه قد يوجد أكثر من جذر حقيقى رتبته n للمقدار M فمثلا $9 = 3^2$ ،والعدد 9 له جذران تربيعيان حقيقيان وهما $3 , -3$ وإذا كان لدينا m , n عددين صحيحين موجبين فإن المقدار $x^{m/n}$ يُمكن وضعه على الصورة $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$

١-٨ :- اللوغاريتمات :-

إذا كانت $x^m = N$ فإن m تُعرف بأنها لوغاريتم المقدار N للأساس x وتكتب كالتالى :

$$m = \log_x N$$

$$\log_C a.b = \log_C a + \log_C b \quad ،$$

$$\log_C \frac{a}{b} = \log_C a - \log_C b \quad ،$$

$$\log_C a^b = b \log_C a \quad ،$$

ويُستخدم عادة فى اللوغاريتمات أساسان وهما الأساس 10 ويُعرف بنظام بريجزيان والأساس e ويُعرف بالنظام النابييرى حيث $e \cong 2.71828.....$

١-٩ :- التباينات (اللاتعادلية)

إذا كان لدينا $x - y =$ عددا موجباً فإنه يمكن أن نُعبر عن ذلك بأن x أكبر من y أو y أصغر من x ويُعبر عنهما على الترتيب كالتالى $x > y$ أو $y < x$ وإذا كان من الممكن أن يكون $x = y$ فإنه يمكن التعبير عن هذه الحالة كالتالى $x \geqq y$ أو $y \leqq x$ وتكون x على محور تمثيل الأعداد الحقيقية واقعة على يمين y

أمثـــلة :-

(١) $x \leqq a$ يعنى ذلك أن x عدد حقيقى من الممكن أن يكـون مسـاويا للعـدد a أو أقل من a

(٢) $-6 < -5$ ويمكن كتابها $-5 > -6$

(٣) $7 > 6$ ويمكن كتابتها $6 < 7$

قواعـد المتباينـات الأساسيـــة :-

أذا كان لدينا a , b , C أعداداً حقيقية فإنه :-

١- إمـا $a > b$

أ ، $b > a$ " قانون الثلاثيـة "

أ ، $a = b$

٢- إذا كانت $a > b$, $b > c$ فإن $a > c$ " قانون الإنتقالية "

٣- إذا كانت $a > b$ فإن $a+h > b+h$

٤- إذا كانت $a > b$ ، $h > 0$ فإن $ah > bh$

٥- إذا كانت $a > b$ ، $h < 0$ فإن $ah < bh$

١-١٠ :- الفترات على خط الأعداد الحقيقى :-

(١) الفترة المفتوحة :- Open interval :-

إذا كان a , b عددين حقيقيين وبحيث أن $a < b$ فإن الفترة المفتوحة من a إلى b عبـارة عن مجموعة الأعداد x التى تُحقق المتباينة $a < x < b$ ويرمز للفـترة المفتوحـة بـالرمز (a , b) أو بالرمز $]a , b[$ $i.e \ (a,b)=\{a<x<b \quad , x \in R\}$

(٢) الفترة المُغلقة (المُقفلة) :- Closed interval :-

إذا كان a , b عددين حقيقيين ، $a < b$ فإن الفترة المُغلقة مـن a إلى b عبـارة عـن مجموعة الأعداد x التى تُحقق المتباينة $a \leqq x \leqq b$ ويُرمز للفترة المغلقة بالرمز $[a , b]$ أى أن كل من النهايتين a , b قد أضيفت لعناصر الفترة $a < x < b$

(٣) الفترة النصف مفتوحة :-

وهى مجموعة الأعـداد التى تحقـق المتبـاينة $a < x \leqq b$ ويرمز لها بالرمز $(a , b]$

(٤) الفترة النصف مُغلقة :-

وهى مجموعة الأعـداد التى تحقـق المتباينة $a \leqq x < b$ ويرمز لها بالرمز $[a , b)$

(٥) فئة الأعداد الحقيقية R عبارة عن الفترة المفتوحة $(-\infty , \infty)$

$i.e \;\; R=(-\infty , \infty)=\{x: -\infty < x < \infty\}$

ومجموعة الأعداد التى أكبر من a تُسمى بالفترة (a , ∞)

بينما مجموعة الأعداد التى أصغر من a تُسمى بالفترة $(-\infty , a)$

ومن ذلك فإن مجموعة كل الأعداد الحقيقية هى الفترة $(-\infty , \infty)$ والفترة سـواء كـانت مفتوحة أو مغلقة يُطلق عليها بمصطلح واحد " الفترة " .

١-١١ :-المقادير المتغيرة والمقادير الثابتة Variables and Constants :-

المقدار المتغير هو المقدار الذى يمكن أن يأخذ قيما مختلفة فى المسألة المطروحـة فـى حـين أن المقدار الثابت يظل محتفظاً بنفس قيمته تحت نفس شروط المسألة وقـد يكـون المقـدار الثابت فى مسألة مطروحة هو مقدار متغير فـى مسـألة أخـرى وفـى التعبـيرات والصيـغ الجبرية فإنه تُستعمل رموزاً للتعبير عن المقـادير أو الأعـداد ، بعضهـا يمثـل مقـدار متغـير وبعضها يمثل مقدار ثابت .

مثـــال (١) : لنعتبر الصيغة الرياضية الممثلة لحجم الكرة V ، $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

حيث $r =$ نصف القطر فإن :

(١) كل من V , r متغيران بتغير حجم الكرة ويطلق عليهما بالمتغيرات

(٢) كل من π , $\frac{4}{3}$ مقادير ثابتة مهما كان حجم الكرة

مثـــال (٢) : فى حالة سقوط جسم من وضع السكون فإن العلاقة المعبرة عن المسـافة المقطوعة فى أى لحظة هى :- $S=\frac{1}{2} gt^2$

حيث تُمثل S ؛ المسافة المقطوعة فى الزمن t ، g = عجلة الجاذبية الأرضية . فإن :

(١) كل من t , S عبارة عن مُتغيرات

(٢) g , $\frac{1}{2}$ مقاديـــر ثابـــتة

١-١٢ :-المتغير التابع والمتغير المستقل

-: Dependent and independent variables

ويمكننا أن نلاحظ من المثـالين السـابقين أن هنـالك نوعـين مـن المتغـيرات ففـى حالـة : $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ فإنه بزيادة أو نقص r ، فإن الحجم V يزيد أو ينقص على الترتيب أى أن التغير فى V يعتمد على التغير فى r .

وفى حالة :- $S = \frac{1}{2} gt^2$ فإن مسافة السقوط S تعتمدعلى الزمـن t وعمومـا فإنـه فـى كل الصيغ والعلاقات الرياضية ، هنالك نوعين من المتغـيرات ، المتغير المسـتقل والمتغـير التابع :-

(١) فالمتغير الـذى تعتمـد قيمتـه على قيمـة ومقـدار متغـير آخـر يعـرف بـالمتغير التـابع dependent Variable مثل V فى مثالنا السابق عن الكرة .

(٢) والمتغير الذى يؤدى التغير فى قيمته إلى قيم مناظرة فى المتغير الآخر ، يُعرف بالمتغير المستقل مثل t , r فى الأمثـــلة الســـابقة .

وعند التعبير عن معادلة من الدرجة الثانية فى صورتها العامة فإن :- $y = ax^2 + bx + c$ فإن كل من a , b , c ثوابت تُستخدم لتحديد مدى العلاقة بين x , y فـى حـين أن x هى المتغير المستقل " الذى يبدأ فى التغير " وينتـج عـن هـذا التغـير ، تغـير منـاظر فـى y ولذلك فإن y هى المتغير التابع .

الباب الثانـــى

الـــــدوال Functions

٢-١ :- عام

تُعرف العلاقة التى تربط بين متغيرين بحيث أن قيمـة أحدهمـا تعتمـد علـى قيمـة الآخـر بالنص التالى :-

" المتغير التابع دالة فى المتغير المستقل "

وفى الأمثـلة السابقة فإن :-

(١) حجم الكرة V دالة فى نصف قطرها

(٢) المسافة المقطوعة S بالجسم الساقط من السكون دالة فى الزمن t وهُناك أمثلة لدوال أُخرى مثل :-

١- لوغاريتم العدد هو دالة فى العـدد فمثـلاً $y = \log x$ ، y هـو لوغـاريتم العـدد x وبذلك فإن y دالة فى x أو لوغاريتم العدد دالة فى العدد ذاته .

٢- حجم كتلة معينة من الغاز ، دالة فى درجة الحرارة عند ثبوت الضغط

٣- ضغط كتلة محددة من الغاز ، دالة فى درجة الحرارة عند ثبوت الحجم

٤- جيوب وجيوب تمام وظلال الزوايا هى دوال فى هذه الزوايا

٥- مدى قذيفة المدفع هو دالة فى زاوية القذف مع ثبوت قوة القذف

٢-٢ :-تعريف الدالة : Defination of a function :-

عموما ، إذا كان هنالك علاقة بين متغيرين Y , X بحيـث أن أى قيمـة تأخذهـا X ، توجد قيمة مناظرة (أو أكثر) لـ Y فإنه يمكن القول أن Y دالة فى X .

٢-٣ :-رمـوز الـدوال Expression of functions :-

إذا كـانت y دالـة فـى x فإنهـا تُكتـب $y = f(x)$ أو $y = G(x)$ أو $y = \Phi(x)$ أو $y = \psi(x)$ حيث تعنـى الرمـوز f , G للدالـة بينمـا تعنـى $G(a)$, $f(a)$ بقيمـة الدالة عندما $x = a$.

وإذا كان لكل قيمة تأخذها x قيمة واحدة فقط لـ Y فإن الدالة تُسمى بدالة وحيدة القيمة . أما إذا كانت لكل قيمة تأخذها x أكثر من قيمة لـ Y فإن الدالة تُسمى دالة مُتعددة القيم مثل $y^2 = x$ ومنها $y = \pm\sqrt{x}$ أى لها قيمتان لكل قيمة لـ x وعموما فإنه يتم استخدام الحروف الأخيرة من الأبجدية الإنجليزية مثل x , y , z للتعبير عن المتغيرات وعادة تُستخدم x للتعبير عن المتغير المستقل فى حين تُستخدم y للتعبير عن المتغير التابع . أما الثوابت فى الدوال المختلفة فإنه يتم استخدام الحروف الأولى من الأبجدية الإنجليزية للتعبير عنها مثل a , b , c أو بالحروف الوسطى من الأبجدية الإنجليزية مثل l, m, n مثل $y = mx + b$ حيث m , b ثوابت فى المعادلة العامة للخط المستقيم . وعند الرغبة فى التعبير عن الدوال فى الزوايا مثل $y = \sin(a) + \cos(a)$ أو $y = \cos^2\theta$ أو $y = \tan\Phi$ فإنه تستخدم الرموز اليونانية Greek Letters للتعبير عن الزوايا مثل θ " ثيتا theta " أو Φ " فاى phi " وكذلك تستخدم x فى هذا الصدد .

فإذا كانت لدينا الدالة : $f(x) = x^2 + 3x - 4$

فإن $f(1)$ ترمز لقيمة الدالة عددياً عند التعويض بالعدد ١ بدلا من x وبذلك فإنه للدالة السابقة :-

$$f(1) = 1^2 + 3\times1 - 4 = 0$$

$$، \quad f(2) = 2^2 + 3\times2 - 4 = 6$$

$$، \quad f(0) = 0 + 0 - 4 = -4$$

$$f(a) = a^2 + 3 \times a - 4$$

$$، \quad f(a+h) = (a+h)^2 + 3(a+h) - 4$$

وبالمثل إذا كان لدينا الدالة : $\Phi(\theta) = 3\sin\theta$

فإن :-

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\times 1=3$$

$$،\ \Phi(0)=3\sin(0)=0$$

$$،\ \Phi\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\times\frac{1}{\sqrt{2}}=2.1213$$

٢ – ٤ : رمز الزيادة فى الدالة : Notation for increases in functions

إذا كانت x ترمز لمتغير ما ، فإن الرمز δx أو Δx أحياناً وتُنطق "دلتا – delta x" ، يستخدم للدلالة على الزيادة فى قيمة x والرمز δ هو الحرف اليونانى المرادف للحرف الإنجليزى "d" .

ولا تعنى Δx كما هو المعتاد فى الضرب ، لا تعنى حاصل ضرب $\Delta\times x$ ويجب عدم الفصل بين الحرفين Δ, x . وبذلك فإن Δx تعنى الزيادة أو النقص فى x .

وهذا خلاف $a\times x$ فهى هنا تعنى حاصل ضرب قيمة كل من a ، قيمة x ، فى بعضهما.

ونتيجة للزيادة أو النقص فى x فإنه يتبع هذا زيادة أو نقص فى y يعادل Δy

وعلى هذا فإنه إذا كانت :

$$y=f(x)$$

$$\therefore y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$

(بالطرح)

$$\therefore \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

فمثلاً إذا كانت :

$$y=x^3-5x^2+3x$$

$$\therefore y+\Delta y=(x+\Delta x)^3-5(x+\Delta x)+3(x+\Delta x)$$

وقد تُستخدم الحروف الأبجدية الصغيرة للتعبير عن التغير الطفيف فى قيمة x فمثلا فى مثالنا السابق عن الجسم الساقط :

$$S=\frac{1}{2}gt^2 \qquad i.e.\ S=f(t)$$

$$\therefore S+\Delta S=\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2$$

ويمكن كتابة الأخيرة بالحروف الأبجدية الصغيرة بدلاً من Δ كالتالى :

"d,h"

$$S+d=\frac{1}{2}g(t+h)^2$$

حيث h هى التغير الطفيف فى الزمن d,t هى التغير فى المسافة المترتب على التغير فى الزمـــن .

٢ - ٥ :- التمثيل البيانى للدوال :

Graphic representation of functions

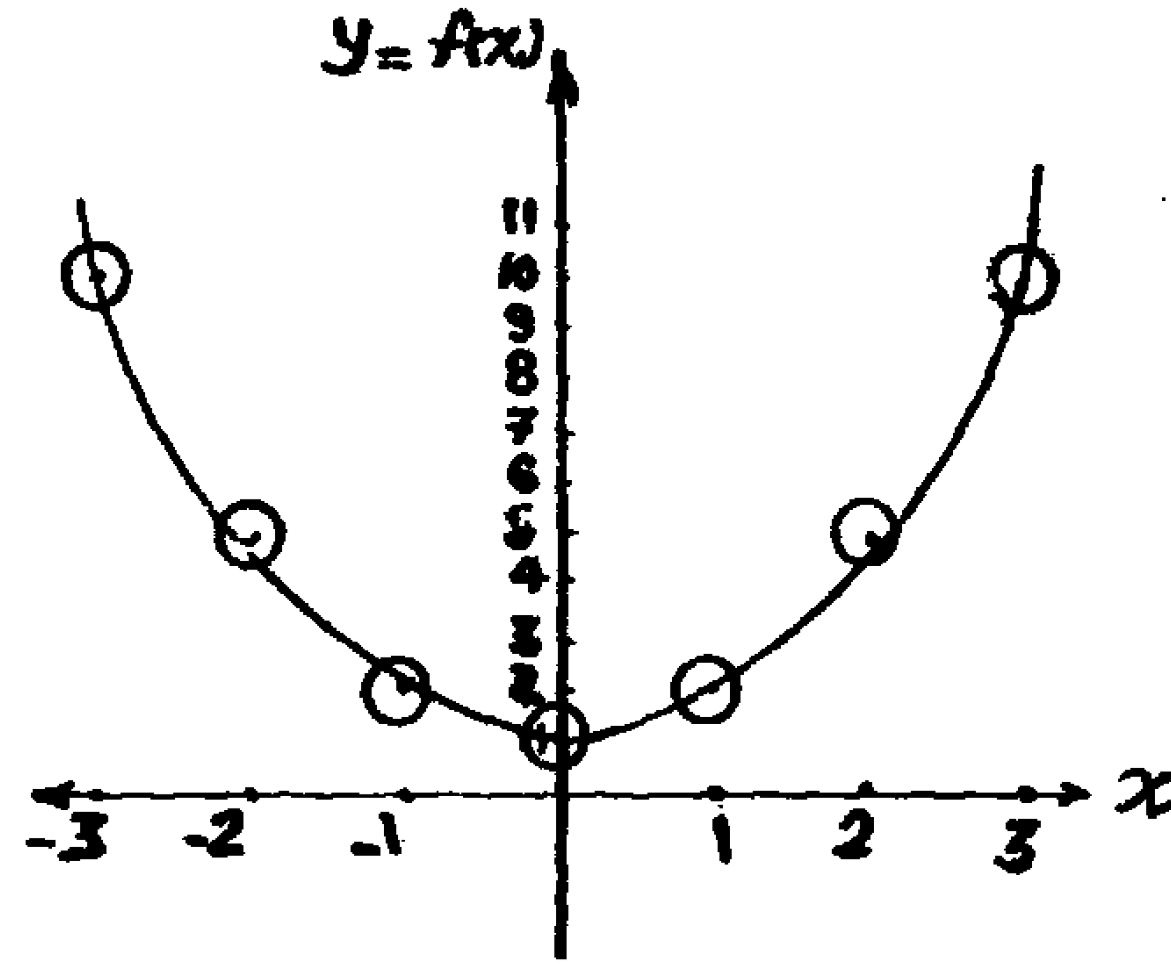
لنعتبر $y = f(x)$ هى دالة فى (x) وحيث أنه لكل قيمة تأخذها x توجد قيمة مناظرة تأخذها y ؛ لذلك فإننا نفترض مجموعة قيم مختلفة للمتغير x ونحسب قيم $f(x)$ أو y المناظرة لهذه القيم . ثم ندون النتائج فى جدول مناسب كالتالى :

الدالة : $y = f(x) = x^2 + 1$

ونفرض قيم لـ x $[-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3]$ مثلاً ثم نحسب قيم y المناظرة .

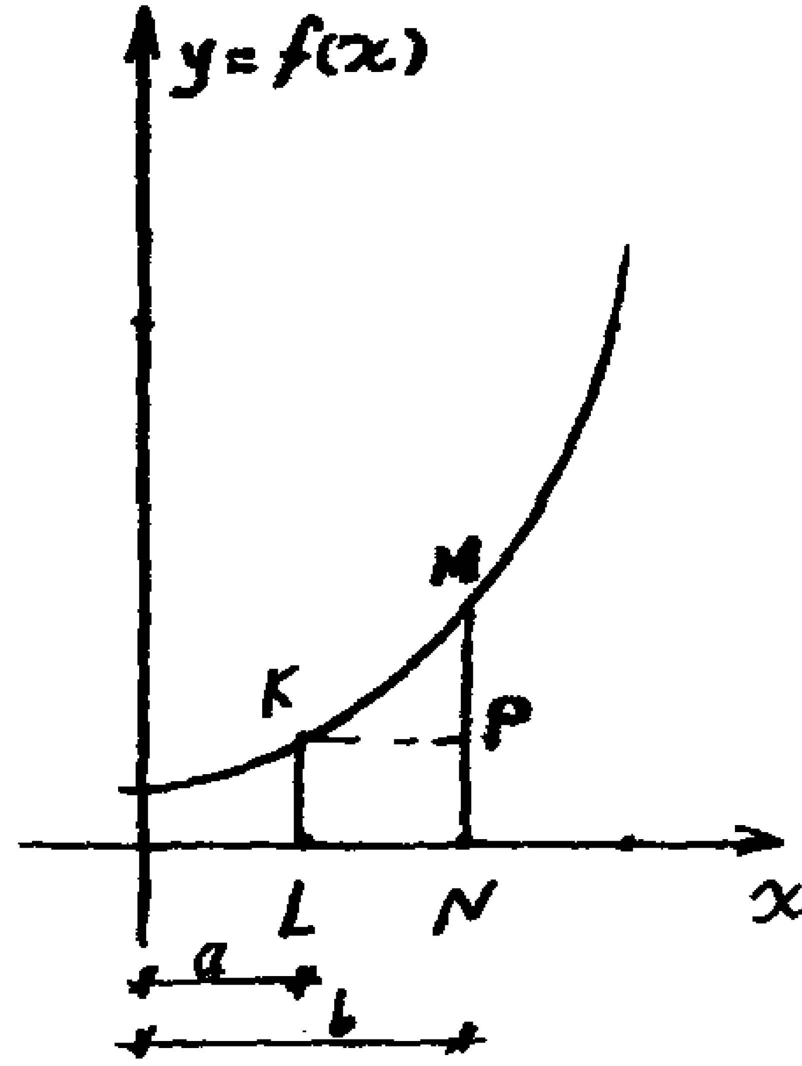
x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
y = f(x)	10	5	2	1	2	5	10

ومن القيم المدونة بالجدول ، يمكنك ملاحظة أن $f(-a)$ لها نفس قيم $f(a)$ وعلى ذلك فإن المنحنى يكون متماثلاً حول محور الصادات " المحور الرأسى" $yy`$ ، والدالة عبارة عن منحنى قطع مكافئ Parabola . وذلك كما يتضح من الشكل (٢ - ١) .



شكل (٢-١)

وفى الشكل (٢-٢) والذى يمثل جزء من المنحنى $y = f(x) = x^2 + 1$



شكل (٢-٢)

نأخذ النقط L,N على المحور OX بحيث أن : $OL=a \ , \ ON=b$

ثم نرسم الإحداثى الرأسى ordinate المناظر $(KL \ , MN)$.

$\therefore KL=f(a) \quad , \quad MN=(fb)$.

وعموماً ؛ إذا كانت L ، أى نقطة على OX بحيث أن $OL=X$

فإننا إذا اعتبرنا أن X تزيد بالمقدار LN حيث :

$LN=\Delta x$ فإن MP تُمثل الزيادة المناظرة فى $f(x)$ أو فى y .

$\therefore \ MP=\Delta y \quad , \quad KL=f(x)$

$, \quad MN=f(x+\Delta x)$

$\therefore \ MP=f(x+\Delta x)-f(x)$

$or\,\Delta Y \ =f(x+\Delta x)-f(x)$

٢ - ٦ : تصنيـــف الـدوال :-

(١) دوال كثيرة الحدود Polynominal functions :-

وتكون فى الصورة : $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+.....+a_{n-1}x+a_n$

حـــيث : $a_0 , a_1 ,..., a_n$ ثوابت، n عدد صحيح موجب ومقداره يرمز لدرجة الدالة.

فإذا كانت $f(x)=0$ وهى دالة كثيرة الحدود ، فإن لها على الأقل جذر واحد ، وعندما تكون n هى درجة الدالة فإنه يكون للدالة حينئذ عدداً من الجذور $= n$.

(٢) الـدالة الخطيـة Linear function :-

عندما $n=1$ فإننا نحصل على كثيرة حدود مـن الدرجـة الأولى وتُعـرف بالدالـة الخطيـة

وهى على الصورة : $f(x)=a_0x+a_1$.

وصورتها المألوفة هى : $f(x)=mx+c$ والتى تمثل خطـــــاً مستقيماً ميله $= a_0$ أو m وطول الجزء المقطوع به من محور الصادات $= a_1$ أو c

(٣) الدالة التربيعية :- Quadratic function :

عندما تكون $n=2$ فإننا نحصل على كثيرة حدود من الدرجة الثانية وصورتها المألوفة :

$$f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$$

وهى تمثل منحنى فى المستوى .

وصورتها الأكثر شيوعاً :- $f(x)=ax^2+bx+c$

(٤) الـدوال أحادية القيمة ومتعددة القيم :-

إذا كانت لكل قيمة من قيم المتغير المستقل x قيمـة واحـدة فقـط منـاظرة لهـا مـن قيـم الدالة (y) فإن الدالة تُسمى أُحادية القيمة .

أما إذا كان لكل قيمة تأخذها x قيمتان أو أكـثر للدالـة (y) فـإن الدالـة تُعـرف بأنهـا متعددة القيـم (ثنائية أو ثلاثية أو ....)

مثـــال :- عند قذف جسم لأعلى وباعتبار s هى مقدار ارتفاعه عـن سـطح الأرض وأن t الزمن الذى مر منذ لحظة قذفه ، هنا تكون s دالة فى المتغير المسـتقل t وذلـك لأن الجسم يكون فى كل لحظة من زمن حركته على ارتفاع معين .

كما أن t تكون كذلك دالة فى المتغير المستقل s وذلـك لأن كـل ارتفـاع يصـل إليـه الجسم تناظره قيمتان من قيم t إحداهما عند صعود الجسم والثانية عند هبوطه .

وفى مثالنا هذا ، تكون s دالة أُحادية القيمة فى المتغير المستقل t بينمـا تكـون t دالـة ثنائية القيمة فى المتغير المستقل s .

(٥) الـدوال الفردية والدوال الزوجية :-

وقد تكون الدالة فردية أو زوجية ، فيقال للدالة $y=f(x)$ بأنها فردية إذا كانت تحقق العلاقة $f(-x)=-f(x)$.

مثــــل : $y=x^5$ ، $y=\sin x$ ، $y=\tan x$

بينما يقال للدالة بأنها زوجية إذا كانت تُحقق العلاقة $f(x)=f(-x)$

مثــــل : $y=x^2$ ، $y=x^4+5$ ، $y=\cos x$

وقد تكون الدالة لافردية ولازوجية :-

مثــــل : $y=\sin x+\cos x$ ، $y=x^5+5$

(٦) الـدوال الصريحة والدوال الضمنية :-

Explicit and Implicit Functions

إذا كانت $y=f(x)$ وأعطينا المتغير المستقل x قيمة معينه وأمكننا حساب $y=f(x)$ فإنه يقال أن الدالة $f(x)$ دالة صريحة فى (x)

مثــــل : $y_1=x^2+4$ ، $y_2=3x-2$ ، $y_3=x^2-2x+8$

فإذا ما اعتبرنا قيمة $x=3$ فى الأمثلة السابقة فإنه يمكننا بسهولة حساب $y=f(3)$ ، لكل من هذه الدوال وتكون قيمتها كالتالى :-

$y_1=13$, $y_2=7$, $y_3=11$

أما إذا كانت العلاقة بين المتغيرين x,y ، لا تُعطى قيمة y مباشرة عند تحديد قيمة معينة لـ x بل يستوجب ذلك إجراء مجموعة من العمليات الجبرية أولاً ؛ فإن الدالة يُطلق عليها بأنها دالة ضمنية فى x

أمثــــلة : (١) ——— $x^2+3xy+y^3=0$

(٢) ——— $\sqrt{x-2y^2}=0$,

ويلاحظ من الدوال الأخيرة أنه يصعب إيجاد قيمة y مباشرة عند إعطاء قيمة لـ x بل يلزم إجراء مجموعة من العمليات الجبرية بحيث نتمكن فى النهاية من وضع y فى طرف، x فى الطرف الثانى .

ففى المثال الثانى (٢) السابق : $\because \sqrt{x-2y^2}=0$

$\therefore$ بتربيع الطرفين $\therefore x=2y^2 \qquad \therefore y=\sqrt{\frac{x}{2}}$

وإذا كان هذا ممكناً فى بعض الدوال ، فإنه يكون صعباً وربما مُحال فى دوال أُخرى

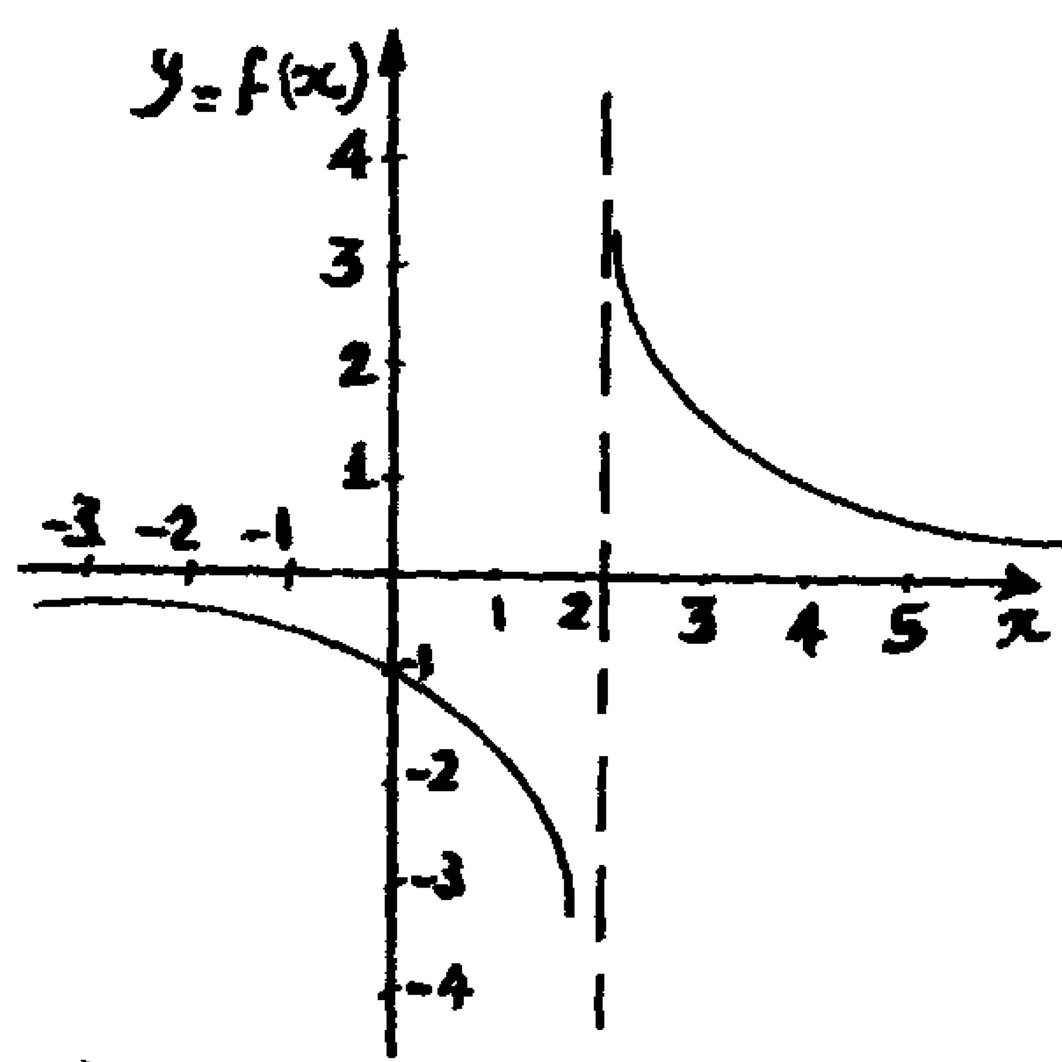
(٧) الـدوال المتصلة (المستمرة) والدوال غير المتصلة (المتقطعة) :-

Continuous and Dsicrete functions

تكون الدالة متصلة إذا كانت المتغيرات المستقلة لهذه الدالة x ، $y=f(x)$ متصلـة أو مستمرة . فاستمرار اتصـال هـذه المتغيـرات يـؤدى إلى اسـتمرار أو اتصـال الدالـة وفـى الدوال المتقطعة تكون هنالك قيم غير معرفة للمتغيرالتابع y عند قيم مُعينة لـ x .

فمثلاً :- الدالة $y=\frac{1}{x-2}$ ، محدودة فى الفترة (5 , 3) .

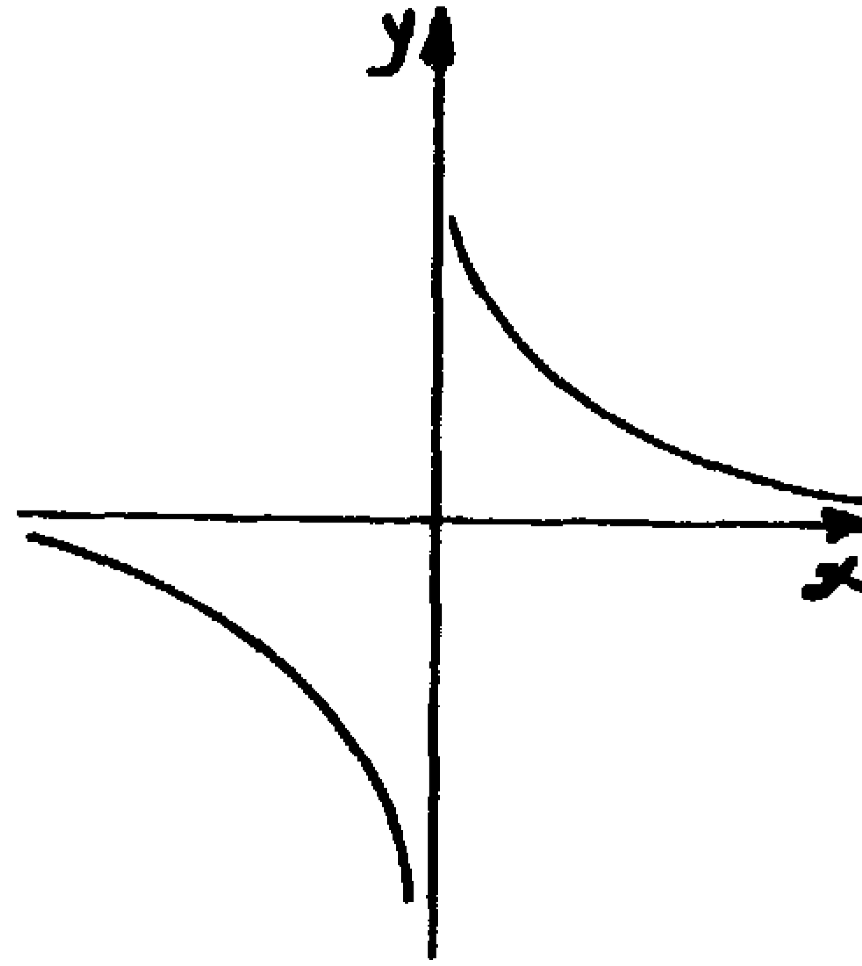
ولكنها غير محدودة فى الفترة (5 , 2) وذلك لأن المتغير المستقل x بوجوده فـى الفـترة (5 , 2) يمكن أن يؤول إلى 2 وحينئذ ستكون الدالة متناهية فى الكبـر ، انظر الشـكل (٢-٣)



شكل (٢-٣)

ويجب ملاحظة أنه عند $x=2$ فإن : $y=\frac{1}{2-2}=\frac{1}{0}$.

وهى كمية غير معينة ومن الرسم يتضح أن الدالة غير متصلة عند $x=2$ وكذلك الدالة $y=\frac{1}{x}$ غير متصلة عند $x=0$ انظر الرسم شكل (٢-٤) .



(٢ - ٤)

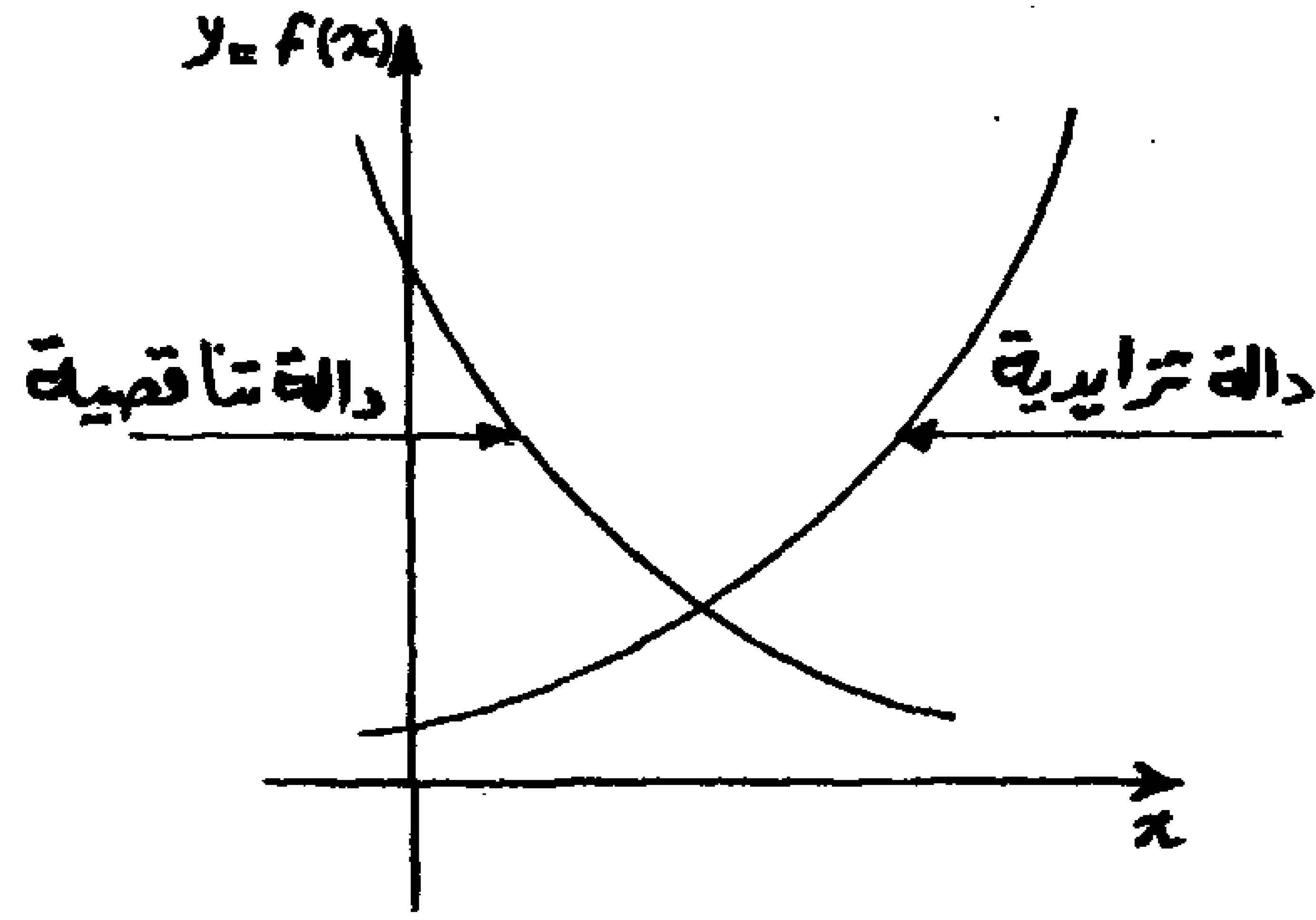
وكذلك الدالة $y=\frac{x^2-1}{x-1}$

سنجد أنه عند $x=1$ فإن $y=\frac{Zero}{zero}$ وهى قيمة غير معينة

لذلك فإن y دالة غير متصلة فى x لأنه عند قيمة معينة لـ x $(x=1)$ فإن $y=f(x)$ تكون غير مُعرفة أولها قيمة غير معينة .

(٨) الـدوال التزايدية والـدوال التناقصية :-

إذا كانت الدالة $y=f(x)$ مُعرفة فىالفترة المفتوحة $(a\ ,\ b)$ فإنـه يُطلـق علـى الدالـة $f(x)$ بأنها تزايدية ؛ إذا كانت قيمة $f(x)$ تزيد بزيادة قيمـة المتغير المسـتقل (x) فـى حين يُطلق عليها بأنها تناقصية ، إذا كانت قيمة $y=f(x)$ تنقص كلما ازدادت قيمـة x



شـــكل (٢-٥)

(٩) الـدالة الجبرية والـدالة غير الجبرية :-

تكون الدالة جبريـة إذا كـانت العمليـات التـى نُجريهـا علـى المتغير المستقل فيهـا هـى عمليات الجمع والضرب والطرح والقسمة والتربيع وإيجاد الجذور وإيجـاد اللوغـاريتم أو الرفع للأسس ، وهكذا ....

أمثـــــلة :- الدوال التالية هى دوال جبرية

$$y=\frac{2x^3+2\sqrt[3]{x^2}-5\log x}{(4+3x)^{\frac{3}{2}}+7}$$

$$,y=\sqrt{\frac{(x+2)^4}{x^2-3x}}$$

ويطلق على ما عدا ذلك من الدوال غير الجبرية وهى :-

(١٠) دالـــة القـــوى :-

مثل الدالة : $y=x^n$ حيث n عدد حقيقى ثابت

وعندما تكون $n=0$ فإن الدالة y تساوى مقداراً ثابتاً = 1

(١١) الـــدالة الأسيـــة :- Exponential function

مثل الدالة : $y=a^x$ حيث x عدد صحيح غير الواحد والصفر ، $a\neq 0\,,1$ ،

الدالـــة :- $y=e^x$ حيث e عدد حقيقى $\cong$ 2.71828

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ، $n \in N$ وذلك عندما $a = e$

فإذا كانت $a = e = 2.71828$ وهى عدد حقيقى فإنه يسمى بالأساس الطبيعى

للوغاريتم ومن ثم فإن $y = f(x) = \log_e x = \ln x$ . .

ويطلق على $\ln x$ باللوغاريتم الطبيعى للمقدار x .

(١٢) الــدالة اللوغاريتميـــة :- logarithmic function

وتكون فى الصورة : $y = \log_a x$ حيث a عدد موجب لا يساوى الواحد ولا الصفـر

$a \neq 0 , 1$ وكذلك $y = \log_e x$.

(١٣) الدوال المثلثيـــة :- trigonometric functions

مثـــل :-

$$\sin x\ ,\ \cos x\ ,\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\ ,\ \operatorname{cosec}\ x = \frac{1}{\sin x}$$

$$,\ \sec x = \frac{1}{\cos x},\ \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

ويعبر عن x عادةً بالزوايا النصف قطرية $(\pi - radians = 180^\circ)$

بعــض خــواص الــدوال المثلثيــة :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x\ \cos y \pm \cos x\ \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x\ \cos y \mp \sin x\ \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x\ \tan y}$$

(١٤) الـــدوال المثلثيـــة العكسيـــة (الدوال الدائرية) :

$$y = arc\sin x = \sin^{-1} x\left[-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \pi/2\right]$$

$$y = arc\cos x = \cos^{-1} x\left[0 \leqq y \leqq \pi\right]$$

$$y = arc\ \tan\ x = \tan^{-1} x\left[-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = arc\ \cot\ x = \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\left[0 < y < \pi\right]$$

$$y = arc\ \sec\ x = \sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\left[0 \leqq y \leqq \pi\right]$$

$$y = arc\ \text{cosec}\ x = \text{cosec}^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\left[-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right]$$

(١٥) الـــدوال الزائـــدية :- **Hyperpolic functions**

تُعرف هذه الدوال بدلالة الدوال الأُسية e^{-x} , e^{x} ذات الأساس الطبيعى e .

$$\sinh\ x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \quad , \quad \text{cosch}\ x = \frac{1}{\sinh\ x} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$\cosh\ x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \quad , \quad \text{sech}\ x = \frac{1}{\cosh\ x} = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

بعـــض خـــواص الـــدوال الزائـــدية :-

$$\coth^{2} x - 1 = \text{cosch}^{2} x$$

$$5h2x = 2\,sh\,x\ ch\,x$$

$$\cosh^{2} x - \sinh^{2} x = 1$$

$$1 - \tanh^{2} x = \text{sech}^{2} x$$

$$ch\ 2x = ch^{2} x + sh^{2} x$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$
$$\tanh(-x) = -\tanh x$$
$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$
$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$
$$\cosh x + sh\, x = e^{x}$$
$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

(١٦) الــدوال الزائــدية العكسيــة :-

إذا كان لدينا $x = \sinh y$ فــــإن $y = \sinh^{-1} x$ ، هى الجيــب الزائـــدى العكسـى للمقدار x .

وفيما يلى قيم الدوال الزائدية العكسية بدلالة اللوغاريتم الطبيعى (ln) ومدى x الــذى تكون فيه الدالة حقيقية :-

وذلك لكل قيم x .

$$\sinh^{-1} x = arc \sinh x = \ln\left[x + \sqrt{x^2 + 1}\right]$$
$$\cosh^{-1} x = arc \cosh x = \ln\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right], x \geqq 1$$
$$\tanh^{-1} x = arc \tanh x = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right], |x| < 1$$
$$\operatorname{csch}^{-1} x = arc \operatorname{csch} x = \ln\left[\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right], x \neq 0$$
$$\operatorname{sech}^{-1} x = arc \operatorname{sech} x = \ln\left[\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right], 0 < x \leqq 1$$
$$\coth^{-1} x = arc \coth x = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{x+1}{x-1}\right], |x| > 1$$

(١٧) الـدوال المركبـة (دالـة الـدالة) :-

إذا كان لدينا $y = f(z)$ وكانت z فى نفس الوقت دالة فى x فإن هذا يعنى أن y دالـة فى x .

حيث : $z = \Phi(x)$ $\quad \therefore y = f[\Phi(x)]$

وهى دالة فى الدالة أو دالة مُركبة .

أمثلـة :-

عند نفخ بالون مثلاً فإن نصف قطره يتغير مع الزمن بعلاقة معينة ، ويتغير حجم البالون بالتالى بتغير نصف القطر :

$$r = \Phi(t) \quad , \quad v = f(r) \quad , \quad v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\therefore v = \Psi(t)$$

وكذلك الدالة $y = \sin x^3$ فإذا ما وضعنا $Z = x^3$:

$$\therefore y = \sin Z$$

وهنا تصبح y دالة فى z ، z أصلاً دالة فى x :

$$\therefore y = \Phi(x)$$

(١٨) الـدالة الكســرية :- **Fractional function**

إذا كانت الدالة يمكن التعبير عنها فى صورة خارج قسمة دالتين كثيرتى الحدود ، البسط كثيرة حدود من درجة n والمقام كثيرة حدود من درجة m مثلاً :

$$\therefore f(x) = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m}$$

وتُعرف هذه الدالة بأنها دالة كسرية مثل :

$$y = f(x) = \frac{5 + 2x + 7x^2 - 4x^3}{2 - 3x + 8x^2 + 5x^3 - 2x^4}$$

(١٩) الـدوال الـدورية :-

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ وبحيث أنه يوجد رقم ثابت k ، بحيث إذا أُضيف أو طُرح من المتغير x فإن قيمة الدالة لا تتغير ، فإن الدالة تُعرف بأنها دالة دورية .

$$i.e\ y = f(x) = f(x + k)$$

وأصغر هذه الأعداد التى يمكن إضافتها أو طرحها بحيث لا تتغير قيمة الدالة يُطلق عليها بموجة الدالة أو دورتها .

فمثــلاً :- $y = \sin x$ هى دالة دورية ودورتها $= k = 2\pi$

، $y = \cos x$ هى دالة دورية ودورتها $= k = 2\pi$

، $y = \tan x$ هى دالة دورية ودورتها $= k = \pi$

، $y = \cot x$ هى دالة دورية ودورتها $= k = \pi$

وذلك لأن :-

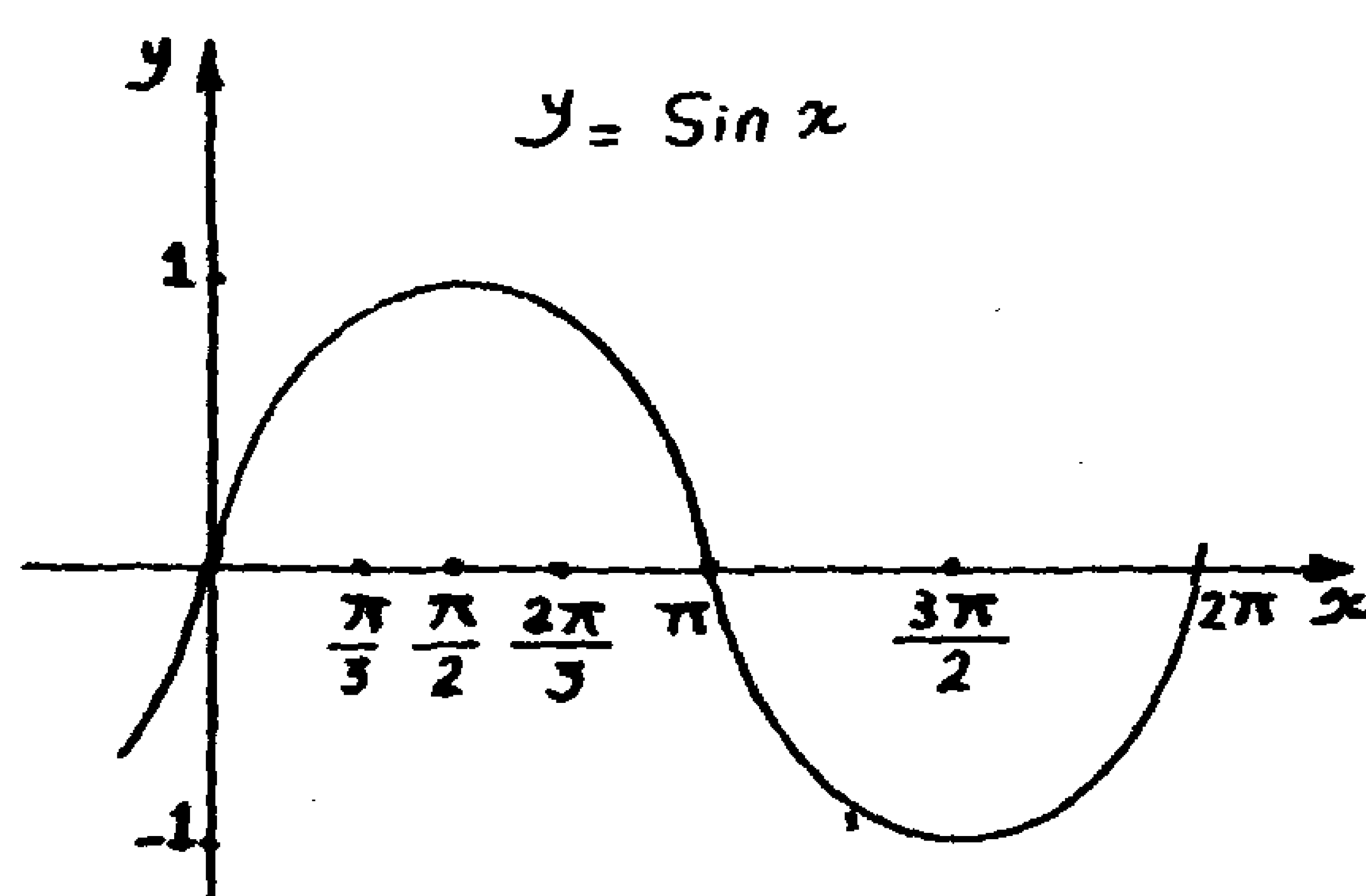
$$y = \sin 30 = \sin(30+360) = \frac{1}{2}$$

$$y = \cos 60 = \cos(60+360) = \frac{1}{2}$$

$$y = \tan 30 = \tan(30+180) = 0.5773502 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y = \cot 30 = \cot(30+180) = 1.7320508 = \sqrt{3}$$

انظر الرسم شكل (٢-٦) .



نموذج للدالة الدورية

شــكل (٢-٦)

(٢٠) الـدالة العكسيـة :- Inverse functions

إذا كانت $y=x^2$ فـإن $x=\sqrt{y}$

ففى الدالة الأولى عبرنا عن y بدلالة x أى أن y دالة فى (x) .

وفى الدالة الثانية عبرنا عن x بدلالة y أى أن x دالة فى (y) .

ويُطلق على كل من الدالتين $y=x^2$ ، $x=\sqrt{y}$ بالدوال العكسية .

وكذلك إذا كانت $y=a^x$ فـإن $\leftarrow$ $x=\log_a y$

، إذا كانت $y=\sin x$ فـإن $\leftarrow$ $x=\sin^{-1} y$

الباب الثـالـث

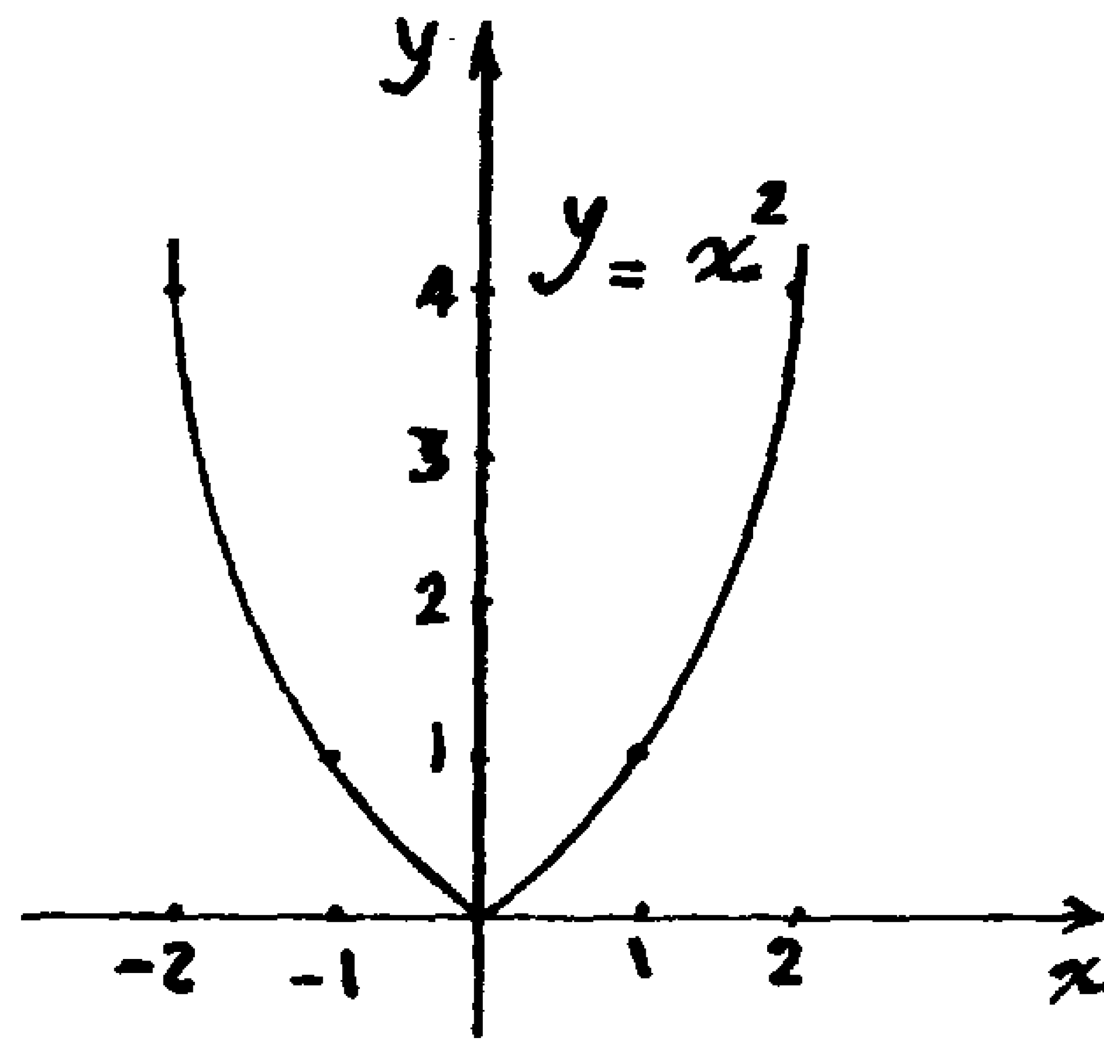
التغيـر فى الـدوال ـ النهـايات

٣-١ :- التغيـر فى الـدوال :-

علمنا من تعريف الدالة أنه عندما تتغير قيمة المتغير المستقل x فإن قيمة الدالة تتغير بالتبعية .

وسوف نتعرض فيما يلى لبعض الأمثلة لإيضاح كيفية تغير الدوال ، وسوف يساعد الرسم البيانى كثيراً فى إيضاح هذه التغيرات .

ولنبدأ بالدالة الشهيرة : $y = f(x) = x^2$ ، انظر شكل (٣-١)



شكل (٣-١)

ويتضح من الشكل كيفية تغير الدالة فى الحدود التى يتغيرها المتغير المستقل $(-3 \le x \le 3)$ على المحور XOX وتتغير قيمة الدالة على المحور OY .

وبدراسة المنحنى يتضح الآتى :-

(١) بزيادة قيم X باستمرار من القيم السالبة إلى الصفر ، فإن قيم Y تكون موجبة وتتناقص إلى الصفر عند نقطة الأصل .

(٢) بزيادة قيم X بدءاً من الصفر فى مدى القيم الموجبة فإن Y تزداد كذلك وتكون موجبة .

(٣) عند نقطة الأصل ، تميل Y إلى أن تنعدم ثم تبدأ فى الزيـــادة ويُطلق على هـــذه النقطة بنقطة تحول Turning point على المنحنى .

(٤) إذا ما فرضنـا أن x ازدادت بـــدون حدود فإن y تـزداد كذلـك بـــدون حـدود ولقيم x السالبة ، فإنه بنقص قيمة x بدون حدود فإن y تزداد بدون حدود أيضاً .

مثـــال آخـــر :- دراسة التغير فى الدالة $y=\dfrac{1}{x}$

(١) عند زيادة قيمة المقام بزيادة قيمة x فإن قيمة الكسر أو قيمة y تقل .

(٢) عند نقص قيمة المقام بنقص قيمة x فإن قيمة الكسر أو قيمة y تزداد . وبذلك فإنه فى هذه الدالة :-

أ) إذا كانت x كبيرة جداً ولنقل 10^{10} ، فإن y تُصبح عدداً صغيراً جداً .

ب) إذا كانت $x = \left(10^{10}\right)^{20}$ مثلاً ، فإن قيمـــة y تُصبح عدداً متناهى فى الصغر .

ويُطلق على مثل هذه الأرقام أو الكميات (المتناهية فى الصغر والمتناهية فى الكبر ، فى الرياضيات بأنها أرقام محدودة Finite) .

فإذا ما تخيلنا أن x قد ازدادت وبدرجة تُصبح معها أكبر من أى عدد ممكن التعبير عنه رياضياً فإننا نقول حينئذ أن x قد ازدادت بدون حدود ويقال حينئذ أنها تقترب مـــن اللانهاية والتى نعبر عنها رياضياً بالرمز ∞ .

[ولاتعنى ∞ أنها رقم معين يمكن التعامل معه كالمعتاد ، فقسمة هذا الرقم على أى رقم مُعين أو ضربه فى هذا العدد تُبقى على قيمته كما هى أى ∞] .

ويتضح مما سبق أنه عندما تُصبح x ذات قيمة لانهائية فى الكبر فإن الدالة $\dfrac{1}{x}$ يمكن التعبير عنها فى الصورة $y=\dfrac{1}{\infty}$ وهى مقـدار متنـاهى فـى الصغـر ، ويطلـق علـى هـذا المقدار المتناهى فى الصغر بالصفر 0 – *zero* .

[ومن هنا يجب أن لا نتعامل مع الصفر كرقم ولكن ككمية متناهية فى الصغر ، غيـــر محدد مدى صغرها .]

وعملية الضرب فى هذه الكمية المتناهية فى الصغر تؤدى إلى الناتج صفر أيضاً وقسمة هذه الكمية المتناهية فى الصغر على أى عدد محدود لا تعنى غير الصفر كذلك .

فإذا ما قسمنا عدد محدد على الصفر ، مثلاً الدالة $y=\frac{1}{x}=\frac{1}{0}$

فإن هذا يعنى قسمة الواحد على كمية متناهية فى الصغر فتكون الإجابة ، كمية متناهية فى الكبر $i.e.=\frac{1}{0}=\infty$.

ويمكن تلخيص ما سبق كالتالى :-

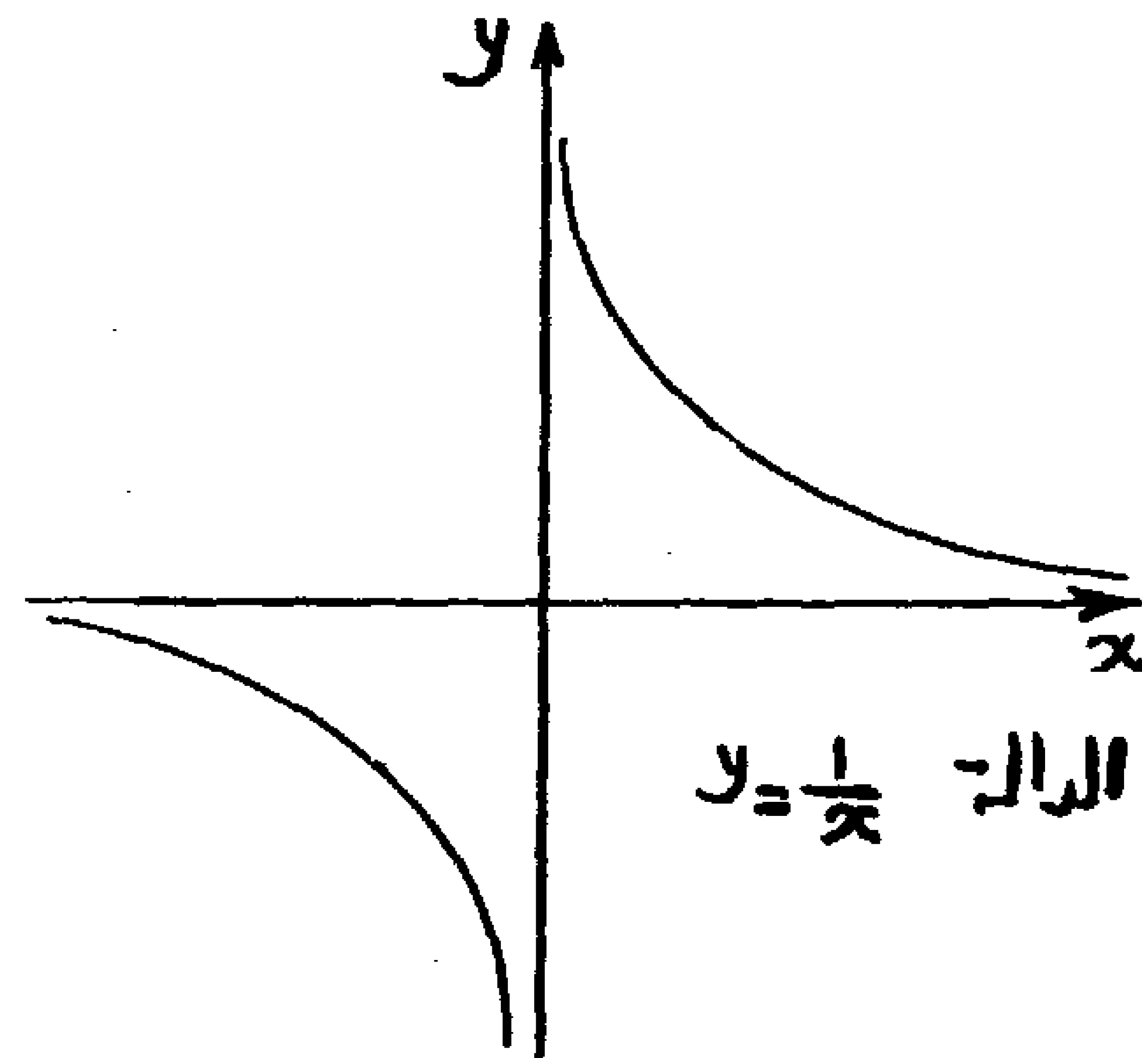
$$when \quad x \to \infty \qquad \therefore \frac{1}{x} \to 0$$

$$, when \quad x \to 0 \qquad \therefore \frac{1}{x} \to \infty$$

ونفس التحليل السابق صحيح إذا كانت قيمة البسط خلاف الواحد كأن تُصبح $= a$ ، حيث a عدد محدود موجب أو سالب أو كسر $i.e.\ y=\frac{a}{x}$

ويمكن إيضاح التحليل السابق برسم منحنى الدالة $y=\frac{1}{x}$

أنظر الرسم شكل (٣-٢) .



شكل (٣-٢)

وقد قمنا برسم الدالة كالمعتاد بفرض قيم مناسبة لـ x ثم نحسب القيم المقابلة لها y وتدوينها بجدول فنحصل على المنحنى المبين بالشكل .

ويُعرف هذا المنحنى بمنحنى القطع الزائد hyperbola وهو يتكون من فرعين بنفس الشكل ، مناظرين لقيم x الموجبة والسالبة أى أن أحد الفرعين فى الاتجاه الموجب لمحور السينات والفرع الآخر فى الاتجاه السالب لمحور السينات .

فإذا ما اعتبرنا الفرع الموجب للمنحنى سنجد :-

(١) بزيادة قيم x تتناقص قيمة y ويقترب المنحنى من محور X وعندما تقترب x من اللانهاية فإن المنحنى يزداد اقتراباً حتى ينطبق مع محور x عند اللانهاية .

وبالتعبير الهندسى فإن محور OX يُعتبر كمماس للمنحنى عند نقطة اللانهاية .

(٢) عند قيم x فيما بين $1 , 0$ فإن المنحنى يقترب من محور Y وبنفس الطريقة فإن المحور OY يُعتبر كمماس للمنحنى عند اللانهاية ويُطلق على الخط المستقيم الذى يلاقى المنحنى عند اللانهاية وبذلك يكون كمماس للمنحنى عند اللانهاية بأنه الخط المُقارب للمنحنى Asymplote .

وبذلك فإن محورى الإحداثيات OX , OY هما خطى تقارب المنحنى $y=\frac{1}{x}$ (الفرع الأيمن) .

ونفس التحليل ينطبق على الفرع السالب للمنحنى ويُصبح محورى الإحداثيات OX' , OY' هما خطى تقارب الفرع السالب للمنحنى .

وبذلك فإن كلاً من $X'oX , Y'OY$ هما خطى تقارب المنحنى $Y=\frac{1}{x}$

ويلاحظ التالى على المنحنى :-

لكل قيم X من $-\infty$ إلى $+\infty$ فإن قيمة y تتناقص دائماً ، إلا أن التغير المفاجئ من $-\infty$ إلى $+\infty$ يحدث عند مرور X بنقطة الصفر وهى حالة قيد الاعتبار فيما بعد .

مثـال آخـر :- $y = \tan x$

٣-٢ :- النهـــــايات Limits

إذا كان لدينا دالة كسرية فى x وكان كل من البســط والمقـام يحتــوى علـى المتغير المستقل x وبفرض أن كل منهما يقترب من اللانهاية عندما تقـترب x مـن اللانهايـة فإن الكسر يأخذ الصورة $\frac{\infty}{\infty}$

فمثـــلاً إذا كان :-

$$f(x) = \frac{3x}{x+4}$$

فإن كلا من البسط والمقام يُصبح لانهائى عندما تُصبح x لانهائية .

والســؤال الذى يطرح نفسه الآن ، ماذا يعنى المقدار $\frac{\infty}{\infty}$

فإذا ما قسمنا كل من البسط والمقام على x :

بعد القسمة على x ؛ $\therefore f(x) = \frac{3x}{x+4} = \frac{3}{1+\frac{4}{x}}$

فإذا ما اقتربت x من ∞ فــإن $\frac{4}{x} \to 0$

وبذلك فإن الكسر تقترب قيمته من $\frac{3}{1+0}$ أى من 3

وبذلك فإن $\frac{3x}{x+4}$ تقترب من القيمة المحددة 3 عندما تقترب x من ∞

ولذلك فإننا نُطلق على 3 بأنها النهاية التى يقترب منها المقدار الكسرى $\frac{3x}{x+4}$ عندما تقترب x من اللانهاية .

وتُعرف بقيمة النهاية Limiting Value أو نهاية الدالة Limit of the function .

وتستخدم الرموز التالية للتعبير عن نهاية الدالة $\frac{3x}{x+4}$:

$$\underset{x \to \infty}{Lt} \frac{3x}{x+4} = 3$$

ويرمز للقيمة التى تقترب منها x بالرمز $\infty \rightarrow x$ وتوضع تحت الرمز Lt وفكرة النهاية ذات أهمية كبيرة جداً ، ليس فقط فى حساب التفاضل ولكن فى كل الصيغ الرياضية بالرياضيات العالية .

نهـــاية الـدالة على الصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{0}{0}$:

لنعتبر الدالة :- $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

ويمكننا إيجاد قيمة الدالة لأى قيمة لـ x ولكن إذا اعتبرنا $x = 2$ فإن قيمة كل من البسط والمقام تُصبح صفراً

ويأخذ الكسر الشكل $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ويُطلق على هذا المقدار بأنه كمية غير معينة ويُصبح من الخطأ اعتبار أن قيمة الكسر ككل = صفر

والصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فى غاية الأهمية وسوف نحلل معناها فيما يلى :-

لنعتبر قيمة x أكبر قليلاً أو أقل قليلاً من المقدار 2 :-

(١) لتكن $x=2.1$ مثلاً

$$\therefore \frac{x^2-4}{x-2}=\frac{4.41-4}{2.1-2}=\frac{0.41}{0.1}=4.1$$

(٢) نعتبر $x = 2.01$

$$\therefore \frac{x^2-4}{x-2}=\frac{4.0401-4}{2.01-2}=\frac{0.0401}{0.01}=4.01$$

(٣) نعتبر $x = 2.001$

$$\therefore \frac{x^2-4}{x-2}=\frac{4.004001-4}{2.001-2}=\frac{0.004001}{0.001}=4.001$$

ولنأخذ الآن قيماً لـ x أقل من 2 :-

(٤) نعتبر $x = 1.9$

$$\therefore \frac{x^2-4}{x-2}=\frac{3.61-4}{1.9-1}=\frac{-0.39}{-0.1}=3.9$$

(٥) نعتبر $x = 1.99$

$$\therefore \frac{x^2-4}{x-2}=\frac{3.9601-4}{1.99-1}=\frac{-0.0399}{-0.01}=3.99$$

وبمقارنة هذه النتائج نصل إلى التالى :-

كلما اقتربت x من 2 فإن قيمة الكسر تقترب من 4 وأنه عندما تختلف قيمة x عن المقدار 2 بفارق ضئيل فإن قيمة الكسر تختلف عن المقدار 4 بفارق ضئيل كذلك . وأنه كلما قل الفارق بين 2 , x كلما قل الفارق بين قيمة الكسر ، 4 وفى النهاية ؛ عندما يصبح الفرق بين x ، 2 متناهياً فى الصغر فإن الفرق بين قيمة الكسر ، 4 يكون متناهياً فى الصغر .

ويمكن التعبير عن هذا كالتالى :-

$$as \;\; x \to 2 \quad \therefore \frac{x^2-4}{x-2} \to 4$$

وقد اتضح لنا الآن أن الدالة $\frac{x^2-4}{x-2}$ لها قيمة محددة عندما تقترب x من 2 أو بالتعبير برموز النهايات فإن :

$$\underset{x \to 2}{Lt} \quad \frac{x^2-4}{x-2} \to 4$$

ولندرس الحالة السابقة فى صورة عامة وليكن مثالنا فى هذا :-

الـدالة الكسرية : $f(x)=\frac{x^2-a^2}{x-a}$

ونوجد قيمتها عندما $x \to a$ ؛ ويجب ملاحظة أنه عندما $x=a$ فإن قيمة الكسر تصبح $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$.

وباتباع نفس الطريقة السابقة فى المثال السابق ولكن بصورة عامة :-

نعتبر $x=a+h$ حيث h تعنى كمية صغيرة متغيرة والتى تختلف قيمة x عن a بمقدارها . وبالتعويض فى قيمة الكسر :

$$\therefore \frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{(a+h)^2-a^2}{(a+h)-a}=\frac{2ah+h^2}{h}$$

وبقسمة كل من البسط والمقام على h (والتى ليست بالصفر)

$$\therefore \frac{x^2-a^2}{x-a} = 2a+h$$

وبتناقص قيمة h فإن قيمة x تقترب من a ، أو عندما تقترب x اقتراباً نهائياً من قيمة a فإن h تقترب من الصفر .

$\therefore$ $2a+h$ تقترب من $2a$

$$i.e\ x \to a \qquad \therefore h \to 0$$

$$, \frac{x^2-a^2}{x-a} \to 2a.$$

أى أن $2a$ هى قيمة نهاية الدالة .

$$\therefore \underset{x \to a}{Lt} \frac{x^2-a^2}{x-a} = 2a$$

ويتضح مما سبق أن التعبير $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ المستخدم فى الأمثلة السابقة يمكن اعتباره بأنه نسبة بين مقدارين متناهيين فى الصغر وتقترب قيمة هذه النسبة من قيمة محددة ، عندما يقترب كل من البسط والمقام من الصفر .

٣ - ٣ : - طرق حساب النهايات : -

لحساب نهاية مقدار ، نقوم أولاً بالتعويض بقيمة x التى يؤول إليها المقدار مباشرة . فإذا كانت هنالك قيمة محددة للمقدار بعد التعويض ، فإنها تعتبر نهاية المقدار المطلوبة ؛ أما إذا كانت قيمة المقدار (أو الدالة) قيمة غير معينة : $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ فإنه يلزم اتباع أيا من الطريقتين التاليتين :

(١) التحليل للمقدار أو للدالة وذلك بتحليل كل من البسط والمقام إلى عوامله الأولية ثم نختصر العوامل المتشابهه ، ثم نعوض فى الباقى بقيمة x التى تؤول إليها .

(٢) الطريقة العامة وهذه نستخدمها فى حالة عدم تمكننا من تحليل $f(x)$ التى على الصورة الكسرية .

حيث لا نعوض بقيمة x التى تؤول لها فى الدالة ولتكن (a) ولكن نعوض بقيمة قريبة جداً منها ولتكن $(a+h)$

أو $(a+\varepsilon)$ أو $(a+\Delta)$ ثم نوجد قيمة $f(x)$ عند اقتراب h أو Δ من الصفر أى عند اقتراب x من القيمة (a) فنحصل على النهاية .

وفيما يلى أمثلة لإيضاح ما سبق : -

مثال (١) أوجد قيمة : $\underset{x\to 3}{Lt}\ f(x)=\dfrac{x+3}{x-3}$

الحل : - بالتعويض فى الدالة مباشرة عن $x=3$: -

$$\therefore \frac{3+3}{3-3}=\frac{6}{0}=\infty$$

∞ كمية معينة ومحددة ، وتعتبر نهاية لهذه الدالة عند اقتراب x من 3

مثال (٢) : - أوجد قيمة : $\underset{x\to 3}{Lt}\ \dfrac{x^2-9}{x-3}$

الحـــل :- بالتعويض فى الدالة مباشرة عن $x=3$

$$\therefore \frac{9-9}{3-3}=\frac{0}{0}$$

وهى قيمة غير معينة أو محددة وحيث أن $f(x)$ لها قيمة غير معينة وفى الصورة الكسرية ، لذلك فإننا نلجأ للطريقة الأولى كما ذكرنا وهى التحليل :

البسط $= (x^2-9)=(x-3)(x+3)$

$$\therefore f(x)=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=(x+3)$$

$$\therefore \underset{x\to 3}{Lt}\ f(x)=\underset{x\to 3}{Lt}\ (x+3)=3+3=6$$

مثال (٣) : - أوجد قيمة :

$$\underset{x\to 2}{Lt}\ f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$$

الحل : - بالتعويض المباشر : -

$$\therefore f(x)=\frac{2^3-8}{2-2}=\frac{zero}{zero} \quad at\ x=2$$

وهى قيمة غير معينة ، لذلك نقوم بتحليل كل من البسط والمقام إلى عواملهما الأولية :

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)}$$

$$\therefore f(x)=x^2+2x+4$$

$$\therefore \underset{x\to 2}{Lt} \quad (x^2+2x+4)=4+4+4 \ =12.$$

ويحدث أحياناً أن تكون درجة البسط أعلى من درجة المقام كما فى المثال السابق .

ويمكن فى الحالة السابقة إجراء قسمة البسط على المقام فإذا حصلنا على خارج القسمة بدون باقى فإن الناتج يعتبر $f(x)$ بعد حذف المقام أى أن قسمة (x^3-2^3)على $(x-2)$ تعطى x^2+2x+4 وبدون باقى .

$$\therefore f(x)=x^2+2x+2$$

حيث تم حذف المقام $(x-2)$.

والآن نفترض أننا لم نتمكن من حذف أو تحليل مقدار البسط (x^3-2^3) إلى عوامله الأولية : $(x-2)(x^2+2x+4)$

فإنه يمكننا استخدام الطريقة الثانية (الطريقة العامة) ، كالتالى : -

$$f(x)=\frac{x^3-2^3}{x-2}$$

نضع $x=2+h$ ، h مقدار ضئيل جداً يؤول إلى الصفر عندما تؤول x إلى 2

$$\therefore f(x)=f(2+h)$$

$$، \ f(2+h)=\frac{(2+h)^3-2^3}{(2+h)-2}$$

$$=\frac{(8+12h+6h^2+h^3)-8}{h}$$

$$=\frac{12h+6h^2+h^3}{h}$$

وبقسمة كل من البسط والمقام على h :

$$\therefore f(2+h)=12+6h+h^2$$

ولما كانت قيمة h صغيرة جداً فإنه عندما تؤول x إلى 2 فإن h تؤول إلى صفر وبالطبع h^2 تؤول هى الأخرى للصفر

$$\therefore \underset{x\to 2}{Lt}\left(\frac{x^3-2^3}{x-2}\right)=\underset{h\to 0}{Lt}\,12+6h+h^2=12.$$

وفى الأمثلة السابقة ، كانت قيمة $f(x)$ عند التعويض مباشرة بقيمة x فى الدالـة هـى $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهى قيمة غير معينة

إلا أنه فى بعض الأحيان تكون قيمة $f(x)$ مسـاوية لــ $\frac{\infty}{\infty}$ عنـد التعويـض بقيمـة x مباشرة فى الدالة .

وهنا يلزم قسمة كل من البسط والمقام.فى $f(x)$ على أعلى قوة للمتغير المستقل x كما فى الأمثلة التالية : –

مثال (٤) : – إذا كانت $f(x)=\frac{x^2}{x^2+2}$

فاوجد : $\underset{x\to\infty}{Lt}\, f(x)$

الحل : – إذا عوضنا بقيمة $x=\infty$ فإن :

$$f(x)=\frac{\infty^2}{\infty+2}=\frac{\infty}{\infty}$$

وهى قيمة غير محددة (معينة) ، هنا نقوم بقسمة كل من البسط والمقام على أعلى قوة لــ x :

$$\therefore f(x)=\frac{\left(\frac{x^2}{x^2}\right)}{\left(\frac{x^2}{x^2}\right)+\left(\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$\therefore \underset{x\to\infty}{Lt}\, f(x)=\frac{1}{1+\frac{2}{\infty}}=\frac{1}{1+0}=\frac{1}{1}=1$$

لاحظ أن أى كمية محددة مقسومة على ∞ = صفر $\left(\frac{2}{\infty}=0\right)$

مثال (٥) : – إذا كانت :

$$f(x)=\frac{3x^2+4x-5}{4x^2-2x+3}$$

فأوجد قيمة :

$$\underset{x\to\infty}{Lt}\ f(x)$$

الحل : – بالتعويض بقيمة $x=\infty$ سنجد أن : –

$$f(x)=\frac{\infty}{\infty}\ \text{(وهى قيمة غير معينة)}$$

لذلك نقوم بقسمة كل من البسط والمقام على (x^2) حيث (x^2) هى أكبر قـوة للمتغير المستقل x .

$$\therefore f(x)=\frac{3+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}{4\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}$$

$$\therefore \underset{x\to\infty}{Lt}\ f(x)=\frac{3+\frac{4}{\infty}-\frac{5}{\infty}}{4-\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty}}=\frac{3+0-0}{4-0+0}=\frac{3}{4}$$

ولاحظ أن أى كمية محددة مقسومة على ∞ = صفر .

٣–٤ :– نهـايـة المتـتـابعـات Limit of a series

فى الأمثلة البسيطة السابقة اعتبرنا نهاية الدالة إلا أنه سبق لنا معرفة أن النهايـة تستخدم كذلك فى بعض الحالات عند إيجاد مجموع متتابعة

ففى المتتابعة الهندسـية (المتواليـة الهندسـية) Geometrical Progression ، إذا كـان الأساس عدد كسرى ملائم فإن مجموع حدود المتتابعة يقـترب مـن قيمـة محـددة عندمـا يزداد عدد الحدود كثيراً .

وتسمى هذه القيمة ، بنهاية المجموع أو مجموع المتوالية .

ولنعتبر المتوالية الهندسية التالية : S_n

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

حـيـث :– $a=$ الحد الأول

$n =$ عدد الحدود

$r =$ النسبة الثابتة بين الحدود (الأساس)

$S_n =$ مجموع n من الحدود

$$, S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

فإذا كانت r ، كسراً مناسباً فإن قيمة r^n تتناقص بزيادة n وبذلك فإن $r^n \to 0$

عنـــدما $n \to \infty$

أى أن : $ar^n \to 0$ ، عنــــدئذ .

$$\therefore \underset{n\to\infty}{Lt}\left(\frac{ar^n}{1-r}\right) = 0$$

ويتضح من A أن S_n تقترب من $\frac{a}{1-r}$ كنهاية عندما تزداد n بلا حدود وبذلك فإن

$\frac{a}{1-r}$ تُصبح حد أو نهاية المتتالية عندما تزداد n بلا حدود

وتُعرف بمجموع المتتالية عند اللانهاية .

أما إذا كانت r أكبر من الواحــــــد الصحيح فإن قيمة الحدود تزداد بزيادة n ، وعند اقتراب n من اللانهاية فإن المجموع يقترب كذلك من اللانهاية .

ويجب أن نعلم أن هنالك أنواع متعددة من المتتابعات ولذا فإنه مـــن المهـم أن نعـرف مـا يلي عن مجموع n من الحدود عند زيادة n بلا حدود :-

(١) هل يقترب المجموع من قيمة محددة .

(٢) هل يصبح ذو قيمة غير محددة .

فــإذا مــا اقترب المجمــوع من قيمة محــددة فإنه يُطلــق على المتتابعـة بــأنها تقاربيـــة Convergent ، أما إذا أصبح المجموع لا نهائيا فإنه يُطلق عليها متباعدة divergent .

ومع بعض الاستثناءات المحدودة ، فإن معظم المتتابعات إما أن تكون تقاربية أو تباعدية.

مثـــال :- لنأخذ المتتابعة : $y_1 = 0.3 \;,\; y_2 = 0.33 \;,\; y_3 = 0.333$

، سنجد أن الحد y_n يقترب بلا حدود من $\frac{1}{3}$ بزيادة عدد الحدود وعليه فإن الكسر $\frac{1}{3}$ يُعتبر نهاية المتتابعة .

ملاحظة : تعطى الكسور العشرية ، .... , 0.33 , 0.3 قيماً أكثر دقة للكسر $\frac{1}{3}$ وبذلك فإن :

$$\underset{n\to\infty}{Lt}\ y_n = \frac{1}{3}$$

ويلاحظ أن الفرق : $\left(y_n - \frac{1}{3}\right)$ يعطى القيم التالية على التتابع :

$$y_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30}\ ,\ y_2 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{300}\ ,\ y_3 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3000}$$

أى أن :

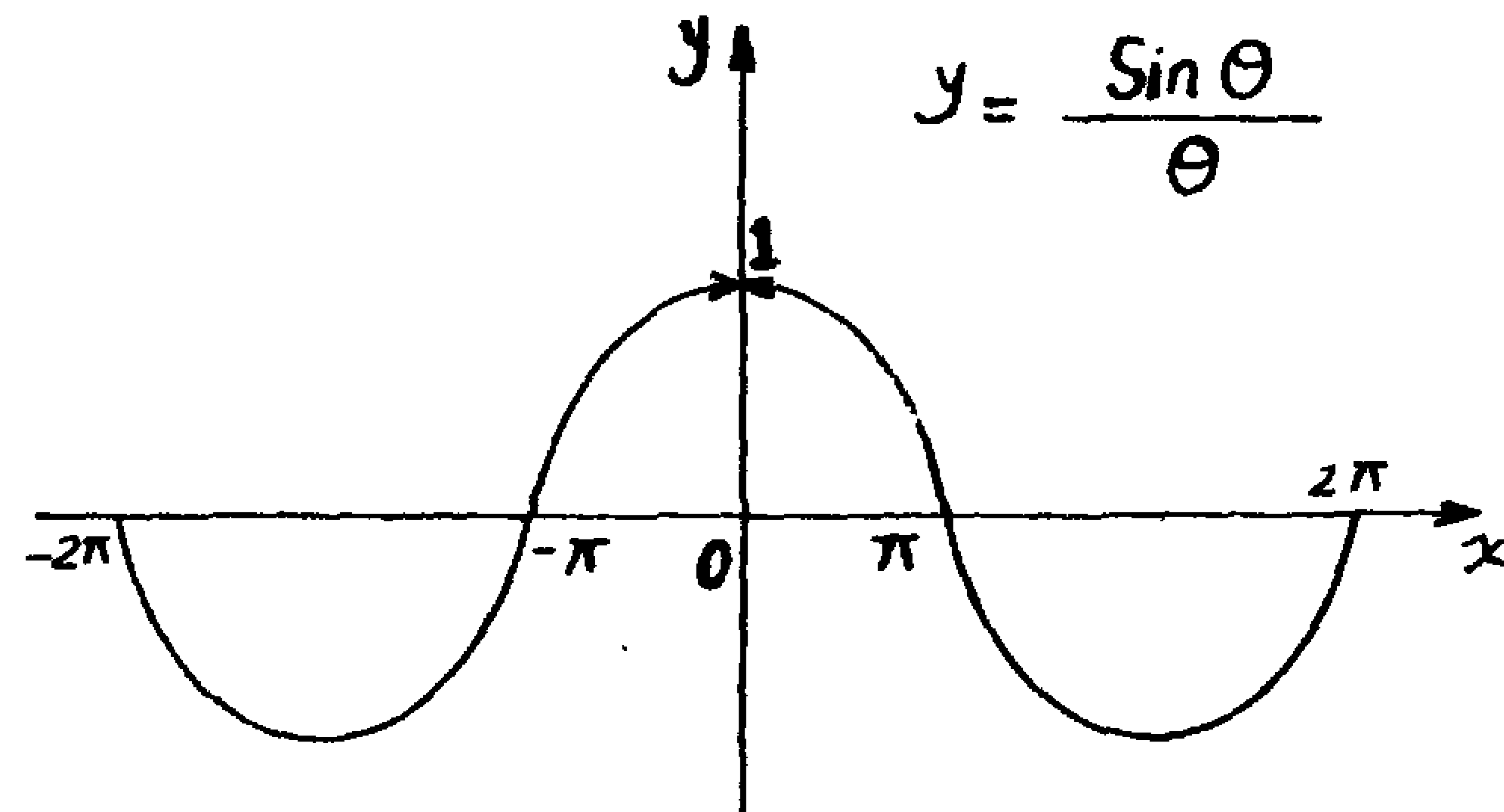
$$y_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3\times 10^n}$$

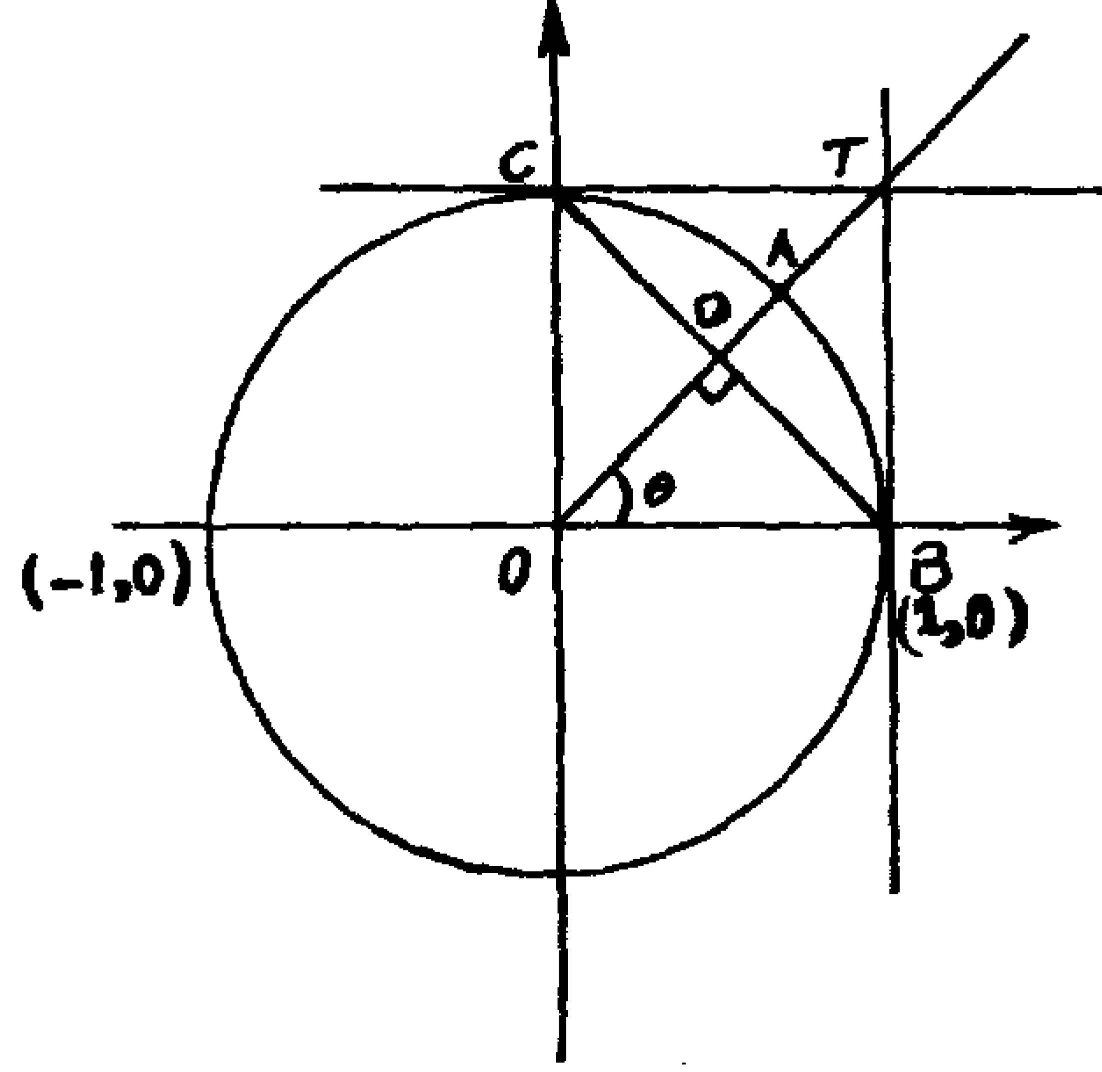
٣-٥ :- نهايات النسب المثلثية Trigonometrical limit

لنعتبر الدالة $\frac{\sin\theta}{\theta}$ ويراد إيجاد النهاية لها عندما $\theta \to 0$.

$$\underset{\theta\to 0}{Lt}\ \frac{\sin\theta}{\theta}$$

واضح من الشكل (٣-٣) أنه عندما تصغر θ جداً فإن $\sin\theta$ تصغراً جداً كذلك ، وبذلك فإنه عندما تقترب كل من θ ، $\sin\theta$ من الصفر فإن النسبة $\frac{\sin\theta}{\theta}$ تقترب من النسبة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ونهاية هذه الكمية إيجادها كما يلى :-





شـكل (٣-٣)

ومن الشكل نعتبر O هى مركز الدائرة التى طول نصف قطرها مساوياً للوحدة . ولنعتبر BAC قوس بها ، BC وتر بها ، OA نصف قطر يقطع الوتر وينصفه فى D وعمودى عليه وكذلك يقطع القوس BAC وينصفه .

ثم نرسم B,C مماسين للدائرة BT,CT يتقاطعان مع OA أو امتداده فى T

ولتكن زاوية $\angle AOB$ هى θ بالتقدير الدائرى

$\therefore TB+TC >$ القوس BAC

وكذلك : القوس $BAC >$ الوتر BC

$\therefore BT > arc \quad BA > BD$ .... (١)

(الوحدة $= 1 = OB$) ، $\tan\theta = \dfrac{BT}{OB} = BT$

$$\therefore \theta = \frac{arc \ BA}{OB} = arc \ BA$$

$$\sin\theta = \frac{BD}{OB} = BD$$ ،

∴ من المعادلة (١)

$$\tan\theta > \theta > \sin\theta$$

$$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta} > \theta > \sin\theta$$

وبالقسمة على : $\sin\theta$

$$\therefore \frac{1}{\cos\theta} > \frac{\theta}{\sin\theta} > 1$$

$$But\ when\ \theta \to 0 \quad \therefore \cos\theta \to 1$$

وبالتالى فإن : $\frac{1}{\cos\theta} \to 1$

وحيث أن : $\frac{\theta}{\sin\theta}$ تقع دائماً بين $\frac{1}{\cos\theta}, 1$

$$\therefore when\ \theta \to 0 \quad , \quad \frac{1}{\cos\theta} \to 1$$

$$\therefore \frac{\theta}{\sin\theta} \to 1$$

أى أنه عندما تقترب $0 \leftarrow \theta$ فإن $\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)$ تقترب من الواحد كنهاية

$$\therefore \underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

وبالمثل فإن :

$$\underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$$

ويمكن للقارئ إثبات ذلك كما تقدم .

٣-٦ :- التوضيح الهندسى للنهاية A geometrical illustration of a limit

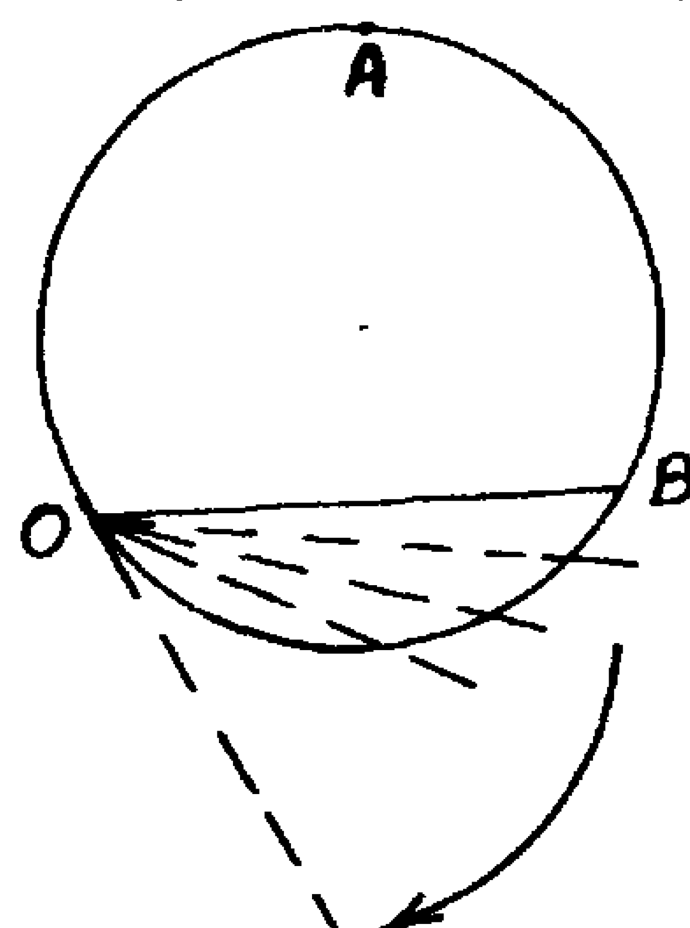
نفترض أن لدينا الدائرة OAB ، OB وتر بها يقطعها فى O, B .

فإذا افترضنا أن هذا الوتر سيأخذ فى الدوران فى اتجاه عقرب الساعة حول O فإن نقطة التقاطع B سوف تتحرك على المحيط (القوس الأصغر BO) من B إلى O حيث سيتناقص طول كل من القوس BO والوتر BO كذلك .

فإذا ما استمر الـــدوران حتى يقترب من O فإن كل من القـــوس والوتـر يتناقصـان إلى أن يُصبحا صغيران جداً.

ومن هذا فإنه فى الوضع المحدد ، عندما تتحرك B للإنطباق على O فـإن الوتـر لــن يقطع الدائرة فى نقطة أخرى خلاف O .

أى أن الوتر يُصبح مماساً للدائرة عند O ، انظر الشكل (٣-٤)



شكل (٣-٤)

٣-٧ :- النظـريـات الأساسية للنهايات theorems on limits

سنورد فيما يلى القواعد الأساسية للنهايات ، بدون برهان :-

نظرية (١) :- إذا كان هُنالك متغيران متساويان دائماً فإن نهايتهما تكون متساوية .

نظرية (٢) :- نهاية مجموع عدد من الدوال Limit of a sum :-

نهاية حاصل جمع حدين أو ثلاثة أو أى عدد ثابت من الحدود أو الدوال تكون مساوية لمجموع نهايات كل حد من الحدود أو كل دالة من الدوال على حدة .

فإذا ما فرضنا أن كل من U,V دوال فى نفس المتغير x

$$\therefore Lt(U+V)=Lt(U)+Lt(V)$$

$$Lim(u_1+u_2+.....u_k)=Lt(u_1)+Lt(u_2)....+Lt\ \ U_k$$

وباختصار فإن نهاية المجموع تساوى مجموع النهايات .

نظرية (٣) :- وهى حالة خاصة من نظرية (٢) :-

نهاية الفرق بين حدين أو دالتين ، تساوى الفرق بين نهايتى الحدين أو الدالتين :

$$Lim(U-V)=Lim(U)-Lim(V)$$

نظرية (٤) : – نهاية المقدار الثابت = المقدار ذاته : $Lt\ \ k = k$

نظرية (٥) :– نهاية حاصل الضرب Limit of product

نهاية حاصل ضرب حدين أو ثلاثة أو أى عدد ثابت من الحدود تساوى حاصل ضرب نهايات هذه الحدود .

$$Lt(u_1 u_2 ......u_n)\ Lt(u_1) \times Lt(u_2) \times .... \times Lt(u_n)$$

نظرية (٦) :– وهى حالة خاصة من نظرية (٤) :–

نهاية حاصل ضرب عدد ثابت × حد (أو دالة) = الثابت مضروباً فى نهاية الحد أو الدالة $Lt\ \ ku = k\ Lt(u)$

حيث k عدد ثابت ، u الدالة .

نظرية (٧) :– نهاية خارج قسمة حدين أو دالتين Limit of a quotient

نهاية خارج قسمة الحدين أو الدالتين تساوى خارج قسمة نهايات الحدين أو الدالتين على أن لا يكون نهاية المقسوم عليه مساوية للصفر :–

$$Lt\left(\frac{u}{v}\right) = Lt(u) \div Lt(v)$$

مالم تكن $unless\quad Lt(v) = zero$

نظرية (٨) :–
$$Lim\ \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

وذلك لجميع قيم n

٣–٨ :– نهايات خاصة :–

إذا كانت الزاوية θ مُقاسة بالتقدير الدائرى (زاوية نصف قطرية)

$$\therefore \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \qquad , \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = zero$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad , \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{Lnx} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad , \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

٣ – ٩ : – أمثلة محلولة : –

ملاحظة :– من المفيد رسم الدالة حيث أنه يمكن عادة من الرسم استنتاج ما إذا كان للدالة نهاية أم لا .

مثال (١) اوجد نهاية الدالة :

$$f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 6$$

عندما $x = 1$

الحل :–

$$\lim_{x\to 1} 5x^3 + 4x^2 - 7x + 6$$
$$= \lim_{x\to 1} 5x^3 + \lim_{x\to 1} 4x^2 - \lim_{x\to 1} 7x + \lim_{x\to 1} 6$$
$$= 5\times 1^3 + 4\times 1^2 - 7\times 1 + 6$$
$$= 5 + 4 - 7 + 6 = 8$$

مثال (٢) إذا كانت $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x-3}}{x+7}$

فاوجد نهاية $f(x)$ **عندما** $x = 7$

الحل :–

$$\lim_{x\to 7} \frac{x^2\sqrt{x-3}}{x+7} = \frac{\lim_{x\to 7} x^2 \times \lim_{x\to 7}\sqrt{x-3}}{\lim_{x\to 7} x + \lim_{x\to 7} 7}$$
$$= \frac{7^2\times\sqrt{7-3}}{7+7} = \frac{49\times\sqrt{4}}{14} = \frac{49\times 2}{14}$$
$$= 7$$

مثال (٣) إذا كانت $f(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$ **فاوجد قيمة** . $\lim_{x\to 7} f(x)$.

الحل :–

$$\lim_{x\to 7}\frac{x+2}{x-4} = \lim_{x\to 7} x + 2 \div \lim_{x\to 7} x - 4$$
$$= 7 + 2 \div 7 - 4$$
$$= 9 \div 3 \quad = 3$$

ملاحظة :- إذا كانت نهاية المقسوم عليه تساوى صفر فى حين أن نهاية المقسوم غير مساوية للصفر فإن خارج القسمة له نهاية غير محدودة .

مثال (٤) إذا كانت $f(x)=\dfrac{x+4}{x-2}$

فأوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

الحـــل :-

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x+4)\div\lim_{x\to 2}(x-2)$$

$$=(2+4)\div(2-2)=\frac{6}{0}=\infty$$

مثال (٥) أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$

الحـــل :-

" حل هذا المثال يعتبر برهان للنظرية رقم (٨) من نظريات النهايات "

لنعتبر $x=a+h$ حيث h مقدار صغير جداً

$$\therefore \frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{(a+h)^n-a^n}{(a+h)-a}$$

وبفك المقدار $(a+h)^n$ بنظرية ذات الحدين Binominal theorem

$$\therefore \frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{\left\{a^n+na^{n-1}h+\dfrac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^{n-2}h^2+\ldots\ldots\right\}-a^n}{h}$$

$$=na^{n-1}+\frac{n(n-1)a^{n-2}h}{\lfloor 2}+\ldots\ldots$$

ولكن حيث أن $x=a+h$ فإنه عندما تقترب x من a فإن h تقترب من الصفر .

$i.e \ at \ x\to a \quad \therefore h\to 0$

$\therefore$ النهاية تُصبح

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\left\{na^{n-1}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^{n-2}h^2+\ldots\ldots\right\}$$

$$=na^{n-1} \quad , \quad [h\to 0]$$

وذلك لأن بقية الحدود تحتوى على المقدار h وبقوى متزايدة وعند اقتراب x من a فإن $h=0$ وباختصار فإنه عندما $x=a$ فإن كل الحدود المحتوية على h تتلاشى .

مثال (٦) أوجد نهاية الدالة :-

$$f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$$

عندما $x=3$

الحـــل :-

يلاحظ أن كلاً من البسط numerator والمقام denominator يتلاشى عند $x=3$

وبالتالى فإن الدالة تأخذ الصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$.

وبحذف الجذور rationalising من المقام :

$$\therefore \frac{x-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}=\frac{(x-3)\left[\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right]}{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)}$$

$$=\frac{(x-3)\left[\sqrt{(x-2)}+\sqrt{(4-x)}\right]}{(x-2)-(4-x)}=\frac{(x-3)\left[\sqrt{(x-2)}+\sqrt{4-x}\right]}{2(x-3)}$$

$$=\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}{2}$$

وبذلك فإن النهاية عندما $x=3$ تُصبح :

$$\frac{\sqrt{3-2}+\sqrt{4-3}}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

مثال (٧) أوجد قيمة :

$$\lim_{x\to 2} x^2-5x+3$$

الحـــل :-

$$\lim_{x\to 2} x^2-5x+3=\lim_{x\to 2} x^2+\lim_{x\to 2}(-5x)+\lim_{x\to 2} 3$$

$$=\left(\lim_{x\to 2} x\right)\left(\lim_{x\to 2} x\right)+\left(\lim_{x\to 2} -5\right)\left(\lim_{x\to 2} x\right)+\left(\lim_{x\to 2} 3\right)$$

$$=2\times 2+\ -5\times 2+3=4-10-+3=-3$$

مثال (٨) أوجد قيمة : $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+5)(3x-2)}{x^2-3x+1}$

الحـــــل :-

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{\lim\limits_{x \to -1} (x+5) \times \lim\limits_{x \to -1} (3x-2)}{\lim\limits_{x \to -1} \left(x^2-3x+1\right)}$$

$$= \frac{(-1+5) \times (3 \times -1-2)}{(-1)^2-3(-1)+1} = \frac{4 \times (-5)}{5} = -4$$

مثال (٩) أوجد قيمة :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4+2x^2-3}{4x^4-2x^3+2x}$$

الحـــــل :-

بالتعويض مباشرة بقيمة x نجد أن كلاً من البسط والمقام يعطى الكسر $\frac{\infty}{\infty}$ ،

لذلك نقسم على أعلى قوة x^4

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^4}}{4-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}}$$

وذلك بالقسمة على x^4

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 3 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x^2} + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-3}{x^4}}{\lim\limits_{x \to \infty} 4 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-2}{x} + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x^3}}$$

$$= \frac{3+0-0}{4-0+0} = \frac{3}{4}$$

مثال (١٠) أوجد قيمة :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{9+h}-2}{h}$$

الحـــــل :-

$$\lim_{h \to 0} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{9+h}-2}{h} \times \frac{\sqrt{9+h}+2}{\sqrt{9+h}+2}$$

وذلك بالضرب فى المرافق ؛

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + h - 4}{h\left(\sqrt{9+h} + 2\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{5}{\sqrt{9+h} + 2}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{9} + 2} = \frac{5}{3+2} = \frac{5}{5} = 1$$

مثال (١١) أوجد قيمة

$$\lim_{a \to 0} \frac{\sin a}{\sqrt{a}}$$

الحـــــل :-

$$\lim_{a \to 0} \frac{\sin a}{\sqrt{a}} = \lim_{a \to 0} \frac{\sin a \,.\, \sqrt{a}}{\sqrt{a} \,.\, \sqrt{a}}$$

$$= \lim_{a \to 0} \frac{\sin a}{a} \times \lim_{a \to 0} \sqrt{a}$$

$$= 1 \times Zero = Zero$$

وقد سبق بيان أن : $\lim_{a \to 0} \frac{\sin a}{a} = 1$

مثال (١٢) أوجد

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 3x - 7$$

الحـــــل :-

بالتعويض فى الدالة $f(x)$ مباشرة بقيمة $x = 3$

$$\therefore f(x) = 3 \times 3 - 7 = 2$$

$$\therefore \lim_{x \to 3} (3x - 7) = 2$$

مثال (١٣) أوجد قيمة

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x + 2}$$

الحـــــل :-

بالتعويض المباشر فى الدالة عن قيمة $x = 3$ سنجد أن :

$$\lim_{x\to3} \frac{x^2-9}{x+2} = \frac{3^2-9}{3+2} = \frac{0}{5} = 0$$

وهى النهاية المطلوبة .

مثال (١٤) أوجد قيمة

$$\lim_{x\to2} \frac{x^2-8}{x+4}$$

الحـــــل :-

بالنسبة للبسط فقط ، سنقوم بحساب النهاية كالتالى :-

$$\lim_{x\to2} \left(x^2-8\right) = 2^2-8 = -4$$

وبالنسبة للمقام فقط

$$\lim_{x\to2} (x+4) = 2+4 = 6$$

$$\therefore \lim \frac{x^2-8}{x+4} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

مثال (١٥) أوجد قيمة

$$\lim_{x\to3} f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}, x \neq 3$$

الحـــــل :-

برسم منحنى هذه الـــدالة حول $x = 3$ ، سنجد أنها تـــزداد بدون حـــد عند اقتراب x من 3

وبالتعويض المباشر نجد أن :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{0} = \infty$$

مثال (١٦) أوجد قيمة

$$\lim_{x\to4} \frac{3x}{8-2x}$$

الحـــــل :-

بالنسبة للبسط :-

$$\lim_{x\to4} 3x = 3\times4 = 12$$

، بالنسبة للمقام :-

$$\lim_{x\to4} (8-2x) = 8-2\times4 = 8-8 = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to4} f(x) = \lim_{x\to4} \frac{3x}{8-2x} = \frac{12}{0} = \infty$$

وبذلك فإن الدالة ليس لها نهاية عند $x = 4$

مثال (١٧) أوجد

$$a) \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-3x+5}{x^2+x-6}$$

$$b) \lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2-3x+5}{x^2+x-6}$$

$$c) \lim_{x\to 2} \frac{2x^2-3x+5}{x^2+x-6}$$

الحـــل :-

$$(a) \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-3x+5}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-3x+5}{(x-2)(x+3)}$$

ونهاية البسط يمكن حسابها على انفراد بسهولة وهى تساوى :-

$$2\times 2^2-3\times 2+5=8-6+5=7$$

ولإيجاد نهاية المقام :-

$$\lim_{x\to 2^+} (x-2)(x+3) = \lim_{x\to 2^+} (x-2) \times \lim_{x\to 2^+} (x+3)$$

$$=(2-2)(2+3)=0\times 5=0$$

أى أن نهاية المقام = صفر ، وحيث أنه يقترب من الصفر من خلال القيم الموجبة $(x^+ : 2^+)$.

$$\therefore \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-3x+5}{x^2+x-6} = \frac{7}{0} = +\infty$$

$$(b) \lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2-3x+5}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2-3x+5}{(x-2)(x+3)}$$

وكما سبق فى الجزء الأول (a) فإن نهاية البسط $= 7$

ولإيجاد نهاية المقام :-

$$\lim_{x\to 2^-} (x-2)(x+3) = \lim_{x\to 2^-} (x-2) \times \lim_{x\to 2^-} (x+3)$$

$$=-(2-2)(2+3)=0\times 5=0$$

ويلاحظ أن نهاية المقام تساوى الصفر أيضاً ، ولكن حيث أن المقام يقترب من الصفر من خلال القيم السالبة : $(x^- , 2^-)$

$$\therefore \lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2-3x+5}{x^2+x-6} = (-\infty)$$

$$(c) \lim_{x\to 2} \frac{2x^2-3x+5}{x^2+x-6} = (|\infty|)$$

مثال (١٨) أوجد قيمة

$$\lim_{x\to 0} \left[x\sqrt{x-5}\right]$$

الحـــل :-

إذا إختبرنا قيمة الدالة بالتعويض المباشر عند $x=0$

$\therefore x\sqrt{x-5}=0 \qquad if \;\; x=0$

وعلى كل فإن هذه الدالة ليس لها قيم حقيقية لقيم x الأقل من5 ولهذا وحيث أن x لا تقترب من الصفر فإن $f(x)$ لن تقترب من الصفر كذلك ولا توجد نهاية .

ويوضح هذا المثال أنه لا يمكننا إيجاد $\lim_{x\to a} f(x)$

بإيجاد قيمة $f(a)$ حتى ولو كانوا متساويين فى حالات كثيرة ، بل يجب أن نعتبر قيم لـ x قريبة من (a) ولكنها لا تساوى a

مثال (١٩) أوجد

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} (\tan\theta)$$

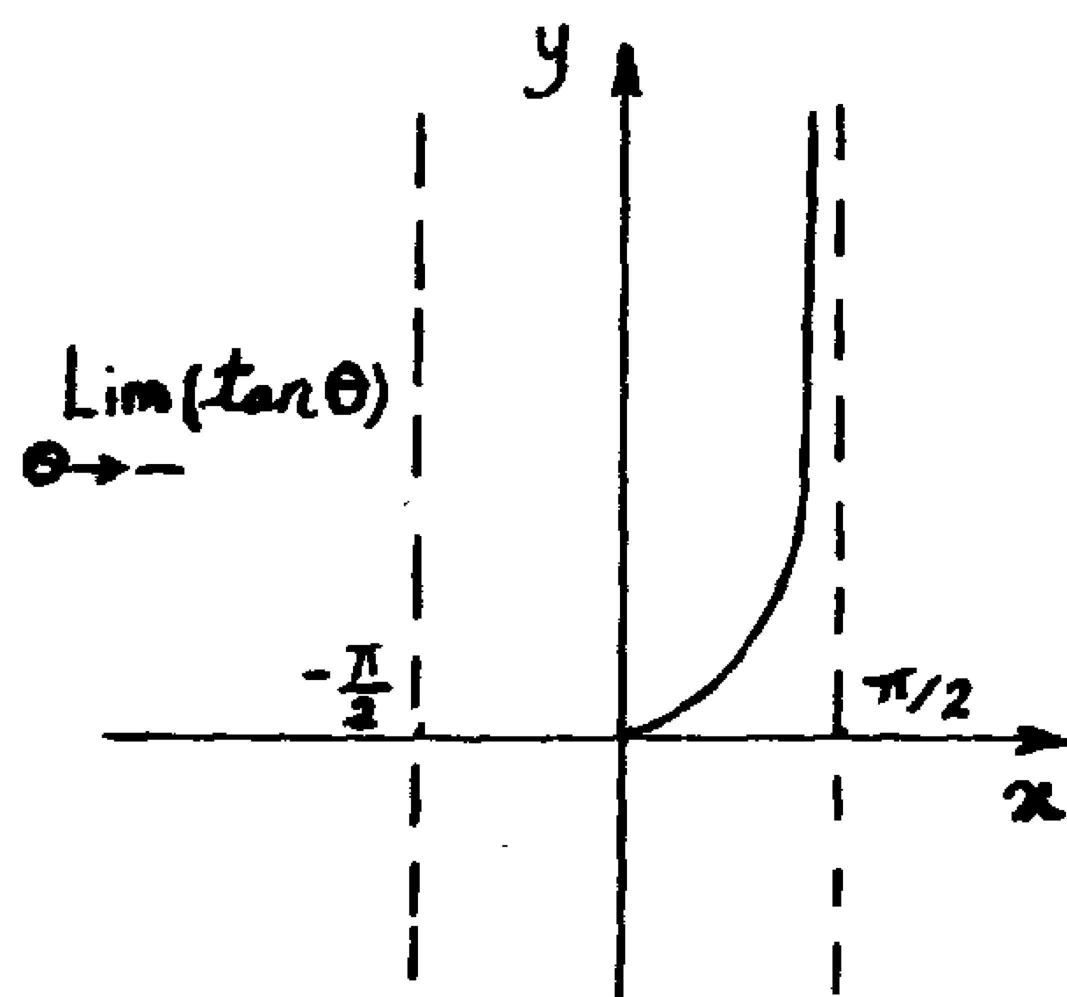
الحـــل :-

حيث أن θ تقترب من $\frac{\pi}{2}$ من جهة قيم θ الأقل من $\frac{\pi}{2}$ فإن :

$\tan\theta$ تزيـد بدون حدود

ولكن عندما تقترب θ من $\frac{\pi}{2}$ من جهة قيم θ الأكبر من $\frac{\pi}{2}$ فـإن $\tan\theta$ تتنـاقص بدون حدود . ولهذا فإن $\tan\frac{\pi}{2}$ ليس لها نهاية ولا لها قيمة عددية .

أنظر الشكل (٣-٥)



شكل (٣–٥)

مثال (٢٠) أوجد

$$\lim_{x,y\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$$

الحـــل :–

سوف نتبع الخطوات المستخدمة فى متغير واحد وبذلك :–

$$\lim_{y\to(0)} \frac{x^3-y^3}{x^3+y^3} = \frac{x^3}{x^3}$$

وعند $x \to 0$ فإن $\frac{x^3}{x^3} \to 1$ وهذا يوضح بجلاء أن النهاية المطلوبة تقترب من 1

وعلى كل ، لنعتبر الحالة العكسية حيث :–

$$\lim_{y\to(0)} \frac{x^3-y^3}{x^3+y^3} = \frac{-y^3}{y^3}$$

فعندما $y \to 0$ فإن $\frac{-y^3}{y^3} \to -1$

وهى نتيجة مختلفة كلية عن الحالة السابقة وبالتالى فإنه لا توجد نهاية لهذه المسألة .

مثال (٢١) إذا كانت f دالة تعريفها كالتالى :–

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{if } x \neq 4 \\ 5 & \text{if } x = 4 \end{cases}$$

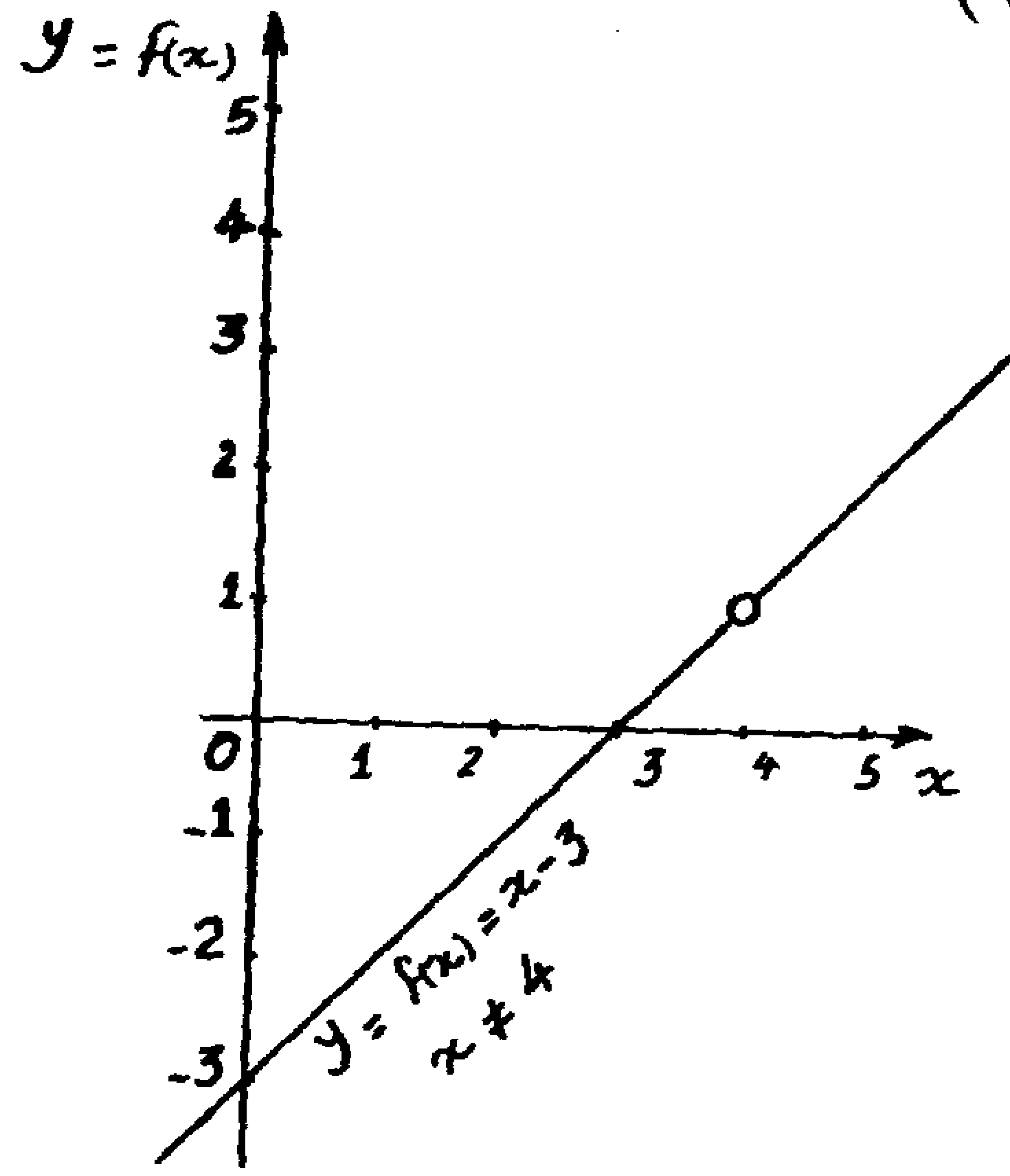
فأوجد $\lim\limits_{x\to4} f(x)$

الحـــــل :-

نرسم $f(x)$ لسهولة الإيضاح وسوف نجد أن : $f(x)=x-3$ عبارة عن خط مستقيم لا يمر بالنقطة $x=4$ وعند $x=4$ فإن $f(x)=5$ ولا تساوى (الواحد) وعلى كل؛ فعند تقدير قيمـــــــة $\lim\limits_{x\to4} f(x)$ فسوف نعتبر قيم x القريبة من 4 ولكن لا تساوى 4 وبذلك فإن :

$$\lim_{x\to4} f(x) = \lim_{x\to4}(x-3) = 4-3=1$$

انظر الرسم شكل (٣-٦)



شكل (٣-٦)

وفى هذا المثال :

$$\lim_{x\to4} f(x)=1 \quad but \quad f(4)=5$$

ولذلك فإن :

$$\lim_{x\to4} f(x) \neq f(4)$$

مثال (٢٢) أوجد

$$\lim_{x\to0} g(x)$$

والدالة مُعرفة كالتالى :

$$g(x)\begin{cases}|X| & \text{if } X\neq 0\\ 2 & \text{if } X=0\end{cases}$$

الحـــــل :-

يفضل هنا رسم الدالة ويلاحظ من الرسم أن الدالة غير متصلة عند $X=0$

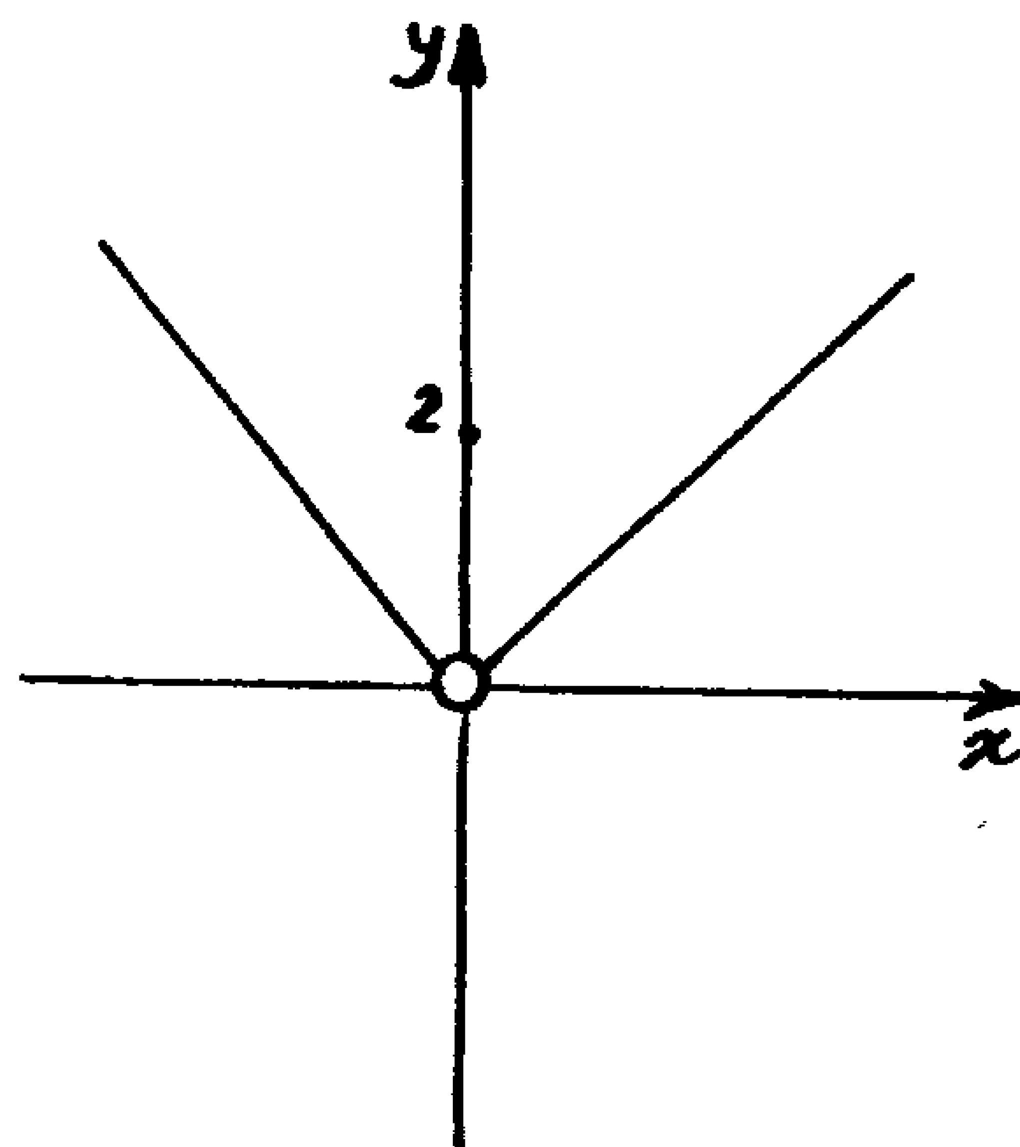
$$\therefore \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} (-X) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} (X) = 0$$

ولهذا فإن $\lim_{x\to 0} g(x)$ ، موجودة وتســـاوى الصفر . كما يلاحـظ أن $g(0)=2$ إلا أن هذا ليس له تأثير على $\lim_{x\to 0} g(x)$.

وبذلك فإنه ومن تعريف النهايات فإننا نعتبر قيم X القريبة جداً مـن الصفـر ولكنهـا لا تساوى الصفر .

انظر الرسم شكل (٣-٧) .



شكل (٣-٧)

مثال (٢٣) أوجد

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{ax^2+bxy+cy^2}{dx^2+exy+fy^2}\right\}-\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bxy+cy^2}{dx^2+exy+fy^2}\right\}$$

$$, ad \neq 0$$

$$, cf \neq 0$$

الحـــل :-

يتم حل هذه المسألة على خمسة خطوات أساسية ، حيث يلزم تحديد النهايات بداخل الأقواس ثم بخارج الأقواس ثم طرح المقدارين

وسوف نبدأ بإيجاد النهاية للمقدار الذى بداخل القوس الأول :-

$$\lim_{y\to 0}\frac{ax^2+bxy+cy^2}{dx^2+exy+fy^2}$$

$$=\frac{ax^2+bx.0+c.0}{dx^2+ex.0+f.0}=\frac{ax^2}{dx^2}=\frac{a}{d}$$

ثم نوجد النهاية بخارج القوس : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a}{d}\right)$

وهى تساوى بالطبع $\frac{a}{d}$

ويلاحظ أن المقدار $\frac{a}{d}$ مستقل عن x ، فعند اقتراب x من الصفر فإن قيمته تبقى $\frac{a}{d}$ ، ويمكن تعريف الكسر $\frac{a}{d}$ ، فقط عندما $d\neq 0$ وحيث أنه من المسألة فإن $ad\neq 0$ فإنه لا $a=0$ ولا $d=0$ ← $\therefore d\neq 0$

وبالتالى فإن $\frac{a}{d}$ تكون مُعرّفة .

ثم نوجد النهاية لما بداخل القوس الثانى ويتم حسابه بنفس الطريقة كما سبق :-

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{ax^2+bxy+cy^2}{dx^2+exy+fy^2}\right\}$$

$$=\frac{a.0+b.0.y+cy^2}{d.0+e.0.y+fy^2}=\frac{cy^2}{fy^2}=\frac{c}{f}$$

والخطوة الرابعة هى إيجاد $\lim_{y\to 0}\left(\frac{c}{f}\right)$

وهى تساوى بالطبع $\frac{c}{f}$ ويلاحظ أن $\frac{c}{f}$ مستقلة عن y ولا تعتمد عليها فعند اقتراب y من الصفر $(y \to 0)$ فإن النهاية تبقى $\frac{c}{f}$ وهى معرفة فقط عندما $f \neq 0$ وحيث أنه $cf \neq 0$ لذلك فإنه لا $c = 0$ ولا $f = 0$

وبذلك فإن $f \neq 0$ ، $\frac{c}{f}$ تكون لذلك مُعرّفة .

والخطوة الأخيرة هى أن نقوم بطرح النهايتين وتساوى :-

$$\frac{a}{d} - \frac{c}{f}$$

مثال (٢٤) أوجد

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

الحـــــل :-

$$\because 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\therefore \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \times \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right]^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

مثال (٢٥) أوجد

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

الحـــل :-

بوضع $y=\frac{1}{x}$ $\therefore at\ x\to\infty$

فـــإن : $y\to 0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} x\ .\ \sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$$

مثال (٢٦) أوجد

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

الحـــل :-

يلاحظ أنه عند $\theta=\frac{\pi}{2}$ فإن $\theta-\frac{\pi}{2}\to 0$

$$\because \sin\theta=\cos(90-\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\because \cos\theta=\sin(90-\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

لذلك سنعتبر $y=\frac{\pi}{2}-\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right\}=\lim_{\frac{\pi}{2}-\theta\to 0}\left\{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right\}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left\{\frac{1-\cos y}{\sin y}\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\frac{1-\cos y}{\sin y}\left(\frac{1+\cos y}{1+\cos y}\right)\right\}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left\{\frac{1-\cos^2 y}{\sin y(1+\cos y)}\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\frac{\sin^2 y}{\sin y(1+\cos y)}\right\}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{1+\cos y}=\frac{\sin 0}{1+\cos 0}=\frac{0}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

وهى نهاية هذه الدالة عند $\theta \to \frac{\pi}{2}$

٣-٩ :- الكميات المتناهية فى الصغر ، المتكافئة

يقال لكميتين متناهيتين فى الصغر ، أنهما متكافئتان إذا كانت نهاية النسبة بينهما تساوى (واحد) .

فمثلاً الكميتان $\sin x$, x متناهيتان فى الصغر عندما تؤول x إلى الصفر $x \to 0$

كما أنهما متكافئتان لأن $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (كما سبق)

وكذلك الكميتان $\sin 2x$, $2x$ متكافئتان ، x^2 ، $\sin^2 x$ متكافئتان كذلك .

مثال :- الكميتان $(a^3 - 3a^4),(a^3 + 2a^4)$ متكافئتان عندما $a \to 0$

وذلك لأن :-
$$\lim_{a \to 0} \frac{a^3 + 2a^4}{a^3 - 3a^4} = \lim_{a \to 0} \frac{1 + 2a}{1 - 3a} = \frac{1}{1} = 1$$

ونرمز لتكافؤ كميتين متناهيتين فى الصغر بالرمز ~ الذى يعنى المساواة التقريبية (يساوى تقريباً) .

فمثلاً
$$a^3 + 2a^4 \sim a^3 - 3a^4$$
$$\sin^3 x \sim x^3 \quad ، \quad \sin 3x \sim 3x$$

والكميات المتكافئة هى فى واقع الأمر كميات متساوية تقريباً ويكون التساوى أكثر دقة كلما اقتربت الكميات المتكافئة من الصفر .

فمثلاً عندما تكون $(a = 0.01)$ فإن الكمية $(a^3 + 2a^4)$ تساوى (202×10^{-8}) .

فى حين أن الكمية $(a^3 - 3a^4)$ تساوى (197×10^{-8}) والفرق بينهما = 5×10^{-8} .

وهو يعادل حوالى 2.5% من إحدى الكميتين المتكافئتين . وكلما اقتربنا من الصفر كلما قلت هذه النسبة المئوية .

مثال (٢٧) أوجد $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

الحـــل :-

نعوض بـ $2x$ بدلاً من $\sin 2x$ ككمية متكافئة عند $x \to 0$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2$$

مثال (٢٨) أوجد $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x}$

الحـــل :-

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}$$

مثال (٢٩) أوجد $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

الحـــل :-

$$\because 1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\because \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \sim \left(\frac{x}{2}\right)^2$$ (كميات متكافئة)

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x} = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$$

$$= \frac{0}{2} = 0$$

مثال (٣٠) أوجد

a) $\lim_{x\to 2} (5x+2)$

b) $\lim_{x\to -2} \left(x^2 - 5x + 7\right)$

الحـــل :-

حيث أن $5x+2$ كثيرة حدود فى x لذلك نعوض مباشرة عن قيمة a) $x = 2$

$$\lim_{x\to 2} 5x+2 = 5\times 2 + 2 = 12$$

حيث أن $x^2 - 5x + 7$ دالة كثيرة الحدود فى x لذلك نعوض مباشـرة عـن قيمـة (b)

: $x = -2$

$$\therefore \lim_{x\to 2} x^2 - 5x + 7 = (-2)^2 - 5\times(-2) + 7 = 4 + 10 + 7 = 21$$

مثال (٣١) أوجد

$$a)\ \lim_{x\to 3} \frac{3x-5}{x+1}$$

$$b)\ \lim_{x\to -2} \frac{x^2-3x-1}{x^2-1}$$

الحـــل :-

a) بالرجوع لنظريات النهايات :-

$$\therefore \lim_{x\to 3} \frac{3x-5}{x+1} = \frac{\lim_{x\to 3}(3x-5)}{\lim_{x\to 3}(x+1)}$$

ويلاحظ أن كلاً من البسط والمقام دالة كثيرة الحدود

$$b)\ \lim_{x\to -2} \frac{x^2-3x-1}{x^2-1} = \frac{(-2)^2-3(-2)-1}{(-2)^2-1}$$

$$= \frac{4+6-1}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$

ومما سبق يمكننا أن نستنتج النتيجة الهامة التالية :-

إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود :

$$\therefore \lim_{x\to a} [f(x)]^n = [f(x)]^n$$

ويتضح ذلك من المثال التالى :-

مثال (٣٢) اوجد

$$a)\ \lim_{x\to 2} (3x-2)^3$$

$$b)\ \lim_{x\to -2} \left(x^2-3x-2\right)^{-3}$$

الحـــــل :-

$$a)\ \lim_{x\to 2}(3x-2)^3=(3\times 2-2)^3=4^3=64$$

$$b)\ \lim_{x\to -2}\left(x^2-3x-2\right)^{-3}=\left[(-2)^2-3\times(-2)-2\right]^{-3}=$$

$$=[4+6-2]^{-3}=8^{-3}=\frac{1}{8^3}=\frac{1}{512}$$

مثال (٣٣) اوجد

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{5x-2}{3x+4}\right)^3$$

$$b)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+3x+28}{x^4-2x^2+3}\right)^{\frac{3}{4}}$$

الحـــــل :-

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{5x-2}{3x+4}\right)^3=\left(\frac{-2}{4}\right)^3=\left(\frac{-1}{2}\right)^3=\frac{-1}{8}$$

$$b)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+3x+28}{x^4-2x^2+3}\right)^{3/4}=\left(\frac{1+3\times 1+28}{1-2\times 1+3}\right)^{3/4}=\left(\frac{32}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$=(16)^{3/4}=\left(2^4\right)^{3/4}=2^3=8$$

مثال (٣٤) أوجد

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

الحـــــل :-

بالتعويض مباشرة نجد أن لهذه الدالة الكسرية نهاية = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهنا يلزم أن نوجد معامل مشترك فى كل من البسط والمقام ثم نختصره والعامل هنا هو $(x-2)$ ويتبقى لنا بعد الاختصار دالة أخرى $g(x)$ حيث $g(x)=(x+2)$

$$,\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$$

أما إذا حاولنا إيجاد قيمة $\lim_{x\to 2} g(x)$ ووجدنا أنها تعطى الكمية غير المعينة $\frac{zero}{zero}$ فإنه يلزم أن نختصر عامل مشترك من كل من البسط والمقام مرة ثانية ، كما يتضح فى المثال (٣٥) غير أن هذه المسألة يمكن حلها باستخدام القاعدة السابق ذكرها :-

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = n\, a^{n-1}$$

والمسألة هى :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x-2}$$

ويمكن وضعها على الصورة :-

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x-2}$$

حيث $a = 2 \quad , \quad n = 2$

والجواب هنا مباشرة يكون : $2\times 2^{2-1} = n\, a^{n-1}$

أى يساوى : $2\times 2 = 4$ كما سبق .

مثال (٣٥) أوجد $\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{x^2 - 4x^2 - 3x + 18}{x^2 - 6x + 9}$

الحــــــل :-

هذه دالة كسرية كثيرة الحدود وبالتعويض مباشرة عن قيمة $x = 3$ نجد أن النهاية تصبح على الصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهى كمية غير معينة ولذلك نقوم بالتحليل لكل من البسط والمقام إلى عواملهما الأولية .

$$\therefore f(x) = \frac{(x-3)(x^2 - x - 6)}{(x-3)(x-3)} = \frac{x^2 - x - 6}{x-3}, x \neq 3$$

والناتج عبارة عن دالة جديدة فى x : $g(x)$

$$g(x) = \frac{3^2 - 3 - 6}{3-3} = \frac{0}{0}$$

وقد عوضنا بقيمة $x = 3$ فى $g(x)$ فوجدنا أن النهاية ستكون على الصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ لذلك يلزم أن نستخرج عامل مشترك آخر فى كل من البسط والمقام .

ويلاحظ أنه عبارة عن $(x-3)$ كذلك

$$\therefore g(x)=\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)}=x+2 \quad , x\neq 3$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} g(x) \;=\; \lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$$

مثال (٣٦) : −

إذا كانت : $f(x)=2x^3-5x$

فأوجد : $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

الحـــــل :−

$\because f(x) \quad =2x^3-5x$ .... (1)

$$\therefore f(x+h)=2(x+h)^3-5(x+h)$$

$=2\left[x^3+3x^2h+3xh^2+h^3\right]-5x-5h$ .... (2)

وبطرح (2) من (1)

$$\therefore f(x+h)-f(x)=6x^2h+6xh^2+2h^3-5h$$

$$=h\left(6x^2+6xh+2h^2-5\right)$$

$$\therefore \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=6x^2+6xh+2h^2-5 \;,\; h\neq 0$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(6x^2+6xh+2h^2-5\right)=$$

$$=6x^2-5$$

Exercise "1"

على النهـــايات

(١) (أ) حدد العدد الذى تقترب منه الدالة : $\frac{1}{x-1}$ عندما تزداد x بدون حدود .

(ب) قيم x التى تكون عندها الدالة سالبة .

(جـ) حدد قيم الدالة عندما تكون قيم x كالتالى : -

$x: 3 , 2.5 , 2 , 1.75 , 1.5 , 1.2 , 1.1 , 0.5 , 0 , -1 , -2$

(د) نهاية الدالة عندما تقترب x من 1 .

(هـ) باستخدام قيم الدالة فى (جـ) ، ارسم منحنى الدالة .

(٢) (أ) أوجد قيم الدالة $\frac{4x+1}{x}$ عندما تكون قيم x : -

$x: 10 , 100 , 1000 , 1{,}000{,}000$

(ب) النهاية التى تقترب منها الدالة عندما تزيد قيمة x بدرجة كبيرة جداً .

(٣) أوجد قيمة : -

(أ) نهاية الدالة : - $\underset{x\to\infty}{Lt}\ \frac{3x+2}{x-1}$

(ب) نهاية الدالة عند اقتراب x من 1 + .

(٤) (أ) أوجد قيم الدالة : - $\frac{x^2-1}{x-1}$ عند قيم x التالية : -

$x: 10 , 4 , 2 , 1.5 , 1.1 , 1.01$

(ب) أوجد نهاية : $\frac{x^2-1}{x-1}$ عند قتراب x من الواحد .

(٥) أوجد نهاية الدالة $\frac{2x^2+1}{x^2-1}$ عندما تقترب x من اللانهاية .

(٦) أوجد : - $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x}$

(٧) أوجد : - $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(٨) أوجد : - $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{3x+1}$

(٩) أوجد : - $\underset{x\to\infty}{Lim}\ \dfrac{5x^2+x-1}{10x^2+2x+1}$

(١٠) أوجد : - $\underset{x\to 1}{Lim}\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$

(١١) أوجد : - $\underset{x\to\infty}{Lim}\ \dfrac{5x^3-2x^2+3}{5x-3x^2+2x^3}$

(١٢) أوجد : - $\underset{h\to 0}{Lt}\ \dfrac{\sqrt{x-h}-\sqrt{x}}{h}$

(١٣) أوجد : - $\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{\sin 7x}{x}$

(١٤) أوجد : - $\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{2\sin x}{3\tan x}$

(١٥) أوجد : - $\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$

(١٦) أوجد : - $a)\ \underset{x\to 2}{Lt}\ \dfrac{x^2-4x+1}{2x+1}$

$b)\ \underset{x\to \frac{\pi}{4}}{Lt}\ \dfrac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$

(١٧) أوجد : - $\underset{x\to 2}{Lim}\ \dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$

إرشاد : - يمكن الحل بوضع $x=2+h$ أو بتحليل المقام لمعاملاته .

(١٨) أوجد : - $\underset{x\to 3}{Lim}\ \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

(١٩) أوجد : - $\underset{x\to \pi}{Lim}\ \dfrac{\tan x}{\sin 2x}$

(٢٠) أوجد : - $\underset{x\to \frac{\pi}{4}}{Lim}\ \dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$

(٢١) أوجد : - $\underset{x\to 1}{Lim}\ \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

إرشاد : افرض $x=n^6$

(٢٢) أوجد : - $\underset{x\to 0}{Lim}\ \dfrac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$

إرشاد : إفرض $1+mx=n^3$

(٢٣) أوجد : - $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{ax}-x}{x-a}$

(٢٤) أوجد : - $\lim \frac{x}{\sqrt{1+3x^{-1}}}$

(٢٥) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(٢٦) أوجد : - $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sqrt{1-\tan x}-\sqrt{1+\tan x}}{\sin 2x}$

(٢٧) أوجد : - $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}$

(٢٨) أوجد : - $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x^3-7x}{1-2x^3}$

يمكن حل المسألة السابقة (٢٧) والمسألة (٢٨) بأيٍ من الطريقتين التاليتين : -

أ) القسمة على أكبر قوة لـ x بالمسألة .

ب) بفرض $x=\frac{1}{h}$.

(٢٩) أوجد : - $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x-1}{x^2+1}$

(٣٠) أوجد : - $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$

(٣١) أوجد : - $\lim\limits_{n\to \infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1}$

(٣٢) أوجد : - $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}$

(٣٣) أوجد : - $\lim\limits_{n\to \infty}\frac{3n}{1-2n}$

(٣٤) أوجد : - $\lim\limits_{n\to \infty}\frac{1+2+3+.....+n}{\sqrt{9n^4+1}}$

(٣٥) أوجد : - $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x+6}{x^3+8}$

(٣٦) أوجد : - $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$

(٣٧) أوجد : - $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{5x^2}{1-x^2}+2^{1/x}\right]$

(٣٨) أوجد : - $\lim_{x\to3}\frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$

(٣٩) أوجد : - $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{3n^2+1}}$

(٤٠) أوجد : - $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$

(٤١) أوجد : - $\lim_{x\to\pi+0}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$

(٤٢) أوجد : - $\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+......+(2n-1)}{1+2+3+......+n}$

(٤٣) أوجد : - $\lim_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

(٤٤) أوجد : - $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$

فيما يلى من مسائل تذكر أن :

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

فى حالة θ بالتقدير الدائرى .

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\theta}{\sin\theta}=1$$

(٤٥) أوجد : - $\lim_{x\to0}\sin\frac{6x}{x}$

إرشاد : - بضرب البسط والمقام فى 6 أو نعتبر $6h=\theta$

(٤٦) أوجد : - $\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{3}}{x}$

(٤٧) أوجد : - $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

(٤٨) أوجد : - $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

(٤٩) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

(٥٠) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)}{x^2}$

(٥١) أوجد :- $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$

(٥٢) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(٥٣) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Tan\, x-\sin x}{x^3}$

(٥٤) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x}{x}$

إرشاد : - ضع $\tan^{-1} x=\theta$

(٥٥) أوجد : - $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\sin^{-1}(1-2x)}{4x^2-1}$

إرشاد : - ضع $\sin^{-1}(1-2x)=\theta$

(٥٦) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin 3x}$

(٥٧) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos mx}{x^2}$

(٥٨) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x+\tan^2 x}{x\sin x}$

(٥٩) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$

(٦٠) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$

(٦١) أوجد : - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\sin x}{\sec(x)-1}$

(٦٢) أوجد : - $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x-h)}{h}$

(٦٣) أوجد : - $\lim\limits_{x\to o} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$

(٦٤) أوجد : -

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$$

(٦٥) أوجد : -

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$$

(٦٦) أوجد : -

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$$

(٦٧) أوجد : -

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$$

(٦٨) أوجد : -

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x}$$

(٦٩) أوجد : -

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$$

(٧٠) أوجد : -

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x-\sin x}{1-5x}$$

الباب الرابع

التغير ومُعدل تغير الدالة ، والميل

change , rate of change of a function and gradients

رأينا فيما سبق أن الدالة تتغير قيمتها عندما يتغير المتغير الذى تعتمد عليه والسؤال المهم الآن هو كيفية حساب معدل التغير .

وما يهمنا هنا هو معدل التغير فى الدالة بالنسبة للتغير الحادث فى المتغير الذى تعتمد عليه .

وسوف نوضح هذا فيما يلى بمجموعة من الأمثلة مع مزيد من الإيضاح برسم الدوال المعنية .

٤ – ١ : – الحركة المنتظمة uniform motion

عندما يتحرك جسم بحيث يقطع مسافات متساوية فى فترات زمنية متساوية فإنه يقال أن الجسم يتحرك بانتظام .

فالمسافة دالة فى الزمن ومن التعريف الذى سبق لمعدل تغير الدالة فإن معدل التغير فى حالة الحركة المنتظمة يكون ثابتاً .

ولإيضاح ذلك نعتبر : –

S = المسافة التى يتحركها الجسم .

t = الزمن المستغرق لقطع هذه المسافة .

ومعروف من قوانين الحركة أن : –

$$S = Vt$$

حيث V = السرعة وهى ثابتة وهى المسافة المقطوعة فى كل ثانية .

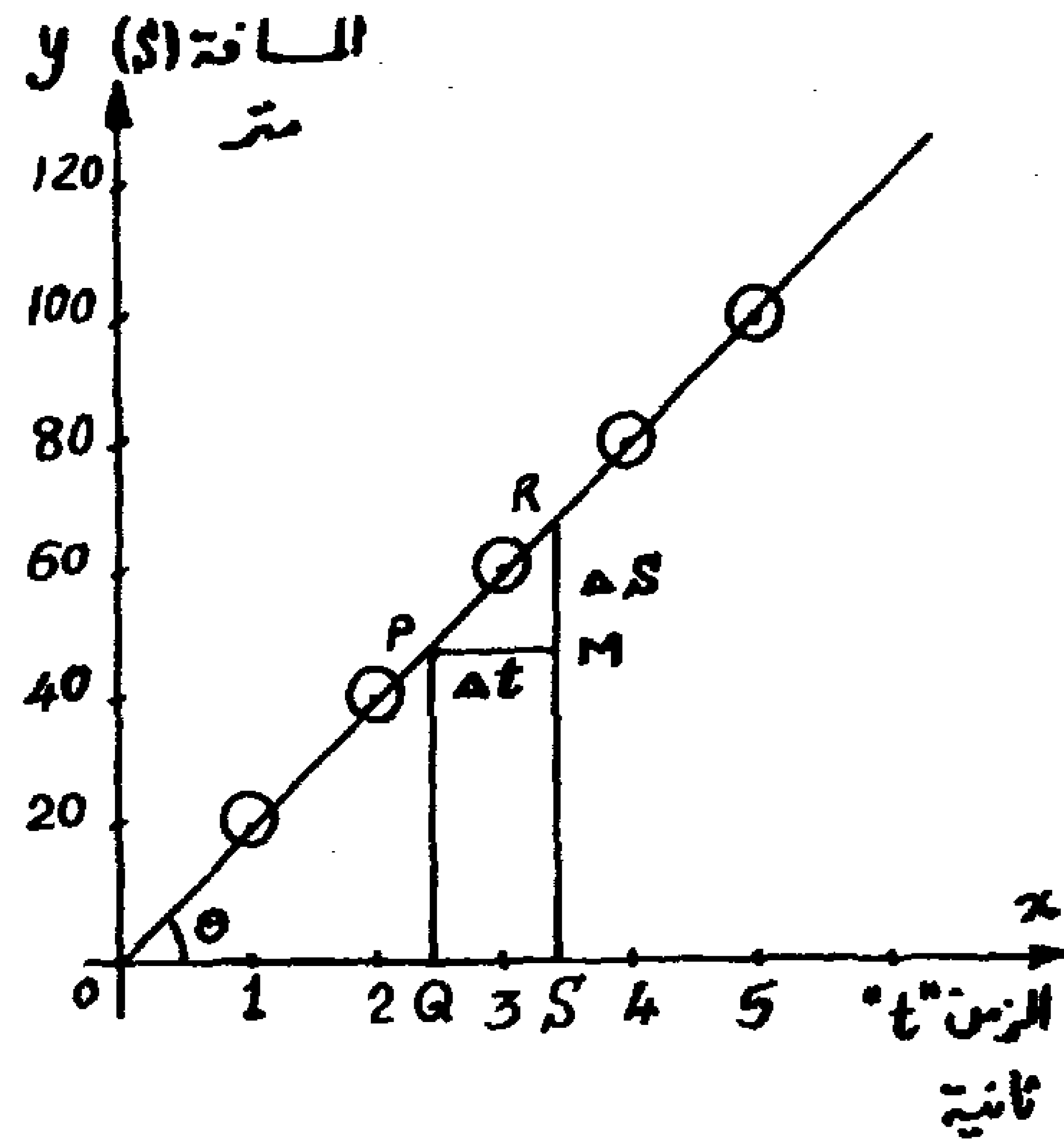
والنسبة بين المتغيرين S , t أى $\frac{S}{t}$ تكون ثابتة .

ولنعتبر المثال التالى الموضح بيانياً : –

سيارة تتحرك بحيث تقطع المسافات الموضحة بالجدول فى الأزمنة المقابلة قرين كل منها.

الزمن بالثانية t	1	2	3	4	5
المسافة بالمتر S	20	40	60	80	100

وقد حسبت هذه القراءات بدءً من نقطة ثابتة على خط تحرك السيارة . وبتوقيع هذه النقط بيانياً والتوصيل بينها نجد أنها تقع على خط مستقيم يمثل هذه العلاقة ، انظر شكل (٤-١) .



شكل (٤ - ١)

ولنعتبر كل من OQ , OS ، يمثلان فترتين زمنيتين (t) ويناظر كل منهما المسافة PQ , RS .

$$\therefore \frac{PQ}{OQ} = \frac{RS}{OS}$$

وهى تعادل ظل الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الأفقى .

وهذا صحيح بالنسبة لجميع أوضاع P, R ولذلك فإن الرسم عبارة عن خط مستقيم .

ولتكن θ هى الزاوية التى يصنعها هذا الخط مع OX

$$i.e \angle POQ$$

$$\therefore \frac{PQ}{PO} = \frac{RS}{OS} = \tan\theta$$

$$\therefore \frac{PQ}{OQ}$$ يُمثل ميل الخط المستقيم

ولنعتبر PM مستقيم يوازى OX وهو يمثل الزيادة فى الزمن ولتكن $= \Delta t$

، RM يُمثل الزيادة فى المسافة ولتكن $= \Delta S$

$$\therefore \quad \frac{\text{الزيادة فى المسافة}}{\text{الزيادة فى الزمن}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$\text{ميل الخط المستقيم} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \tan\theta$$

وعلى ذلك فإنه لأى قيم مُناظرة لـ S أو t فإنه نسبة الزيادة فى المسافة بالنسبة للزيادة فى الزمن تكون ثابتة وتساوى ميل الخط المستقيم

وفى مثالنا السابق للحركة المنتظمة فإن الميل يساوى :-

$\frac{20m}{1S} = 20mS^{-1}$ ، وهى تعادل سرعة السيارة .

٤-٢ :- ميل الدالة الخطية Gradient of a linear function

يمكننا تعميم ما سبق كالتالى :-

لتكن y دالة فى (x) أى : $y = f(x)$

والخط المستقيم الذى يمثل الدالة قد يكون فى إحدى الصورتين التاليتين :-

$y = mx$ .... (١)

وهى تُمثل خط مستقيم يمر بنقطة الأصل فإذا كانت Δy تُمثل الزيادة فى y ، Δx تمثل الزيادة فى x

فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تكون ثابتة . وتمثل ميل الخط المستقيم وهذا الميل يُمثل بـ " m "

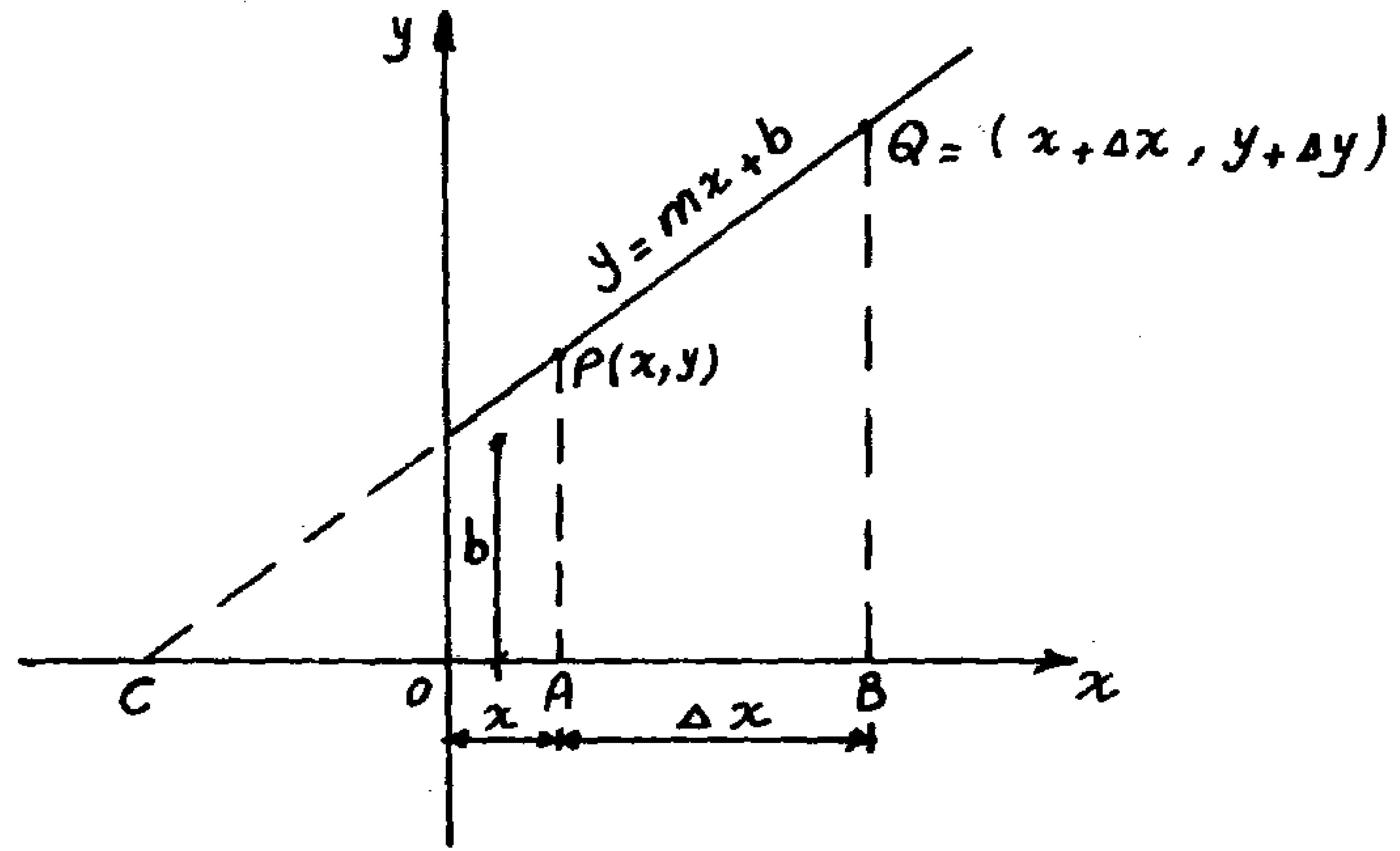
$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

وتُمثل m مُعدل الزيادة فى y بالنسبة إلى x

$y = mx + b$ .... (٢)

وهى تُمثل خط مستقيم لا يمر بنقطة الأصل ولكنه يقطع مسافة b من محور y .

أنظر شكل (٤-٢)



شكل (٤-٢)

وفى الشكل ، ليكن CPQ خط مستقيم معادلته $y = mx + b$

ولتكن θ هى الزاوية التى يصنعها المستقيم مع OX

ولتكن P نقطة على هذا الخط وإحداثييها (x , y)

$i.e\ \ OA = x\ ,\ PA = y$

فإذا ما ازدادت x بمقدار Δx من OA إلى OB ، وازدادت y بمقدار Δy من AP إلـــى BQ

وبرسم PR موازياً للمحور OX

$\therefore$ تكون إحداثيات Q $(x + \Delta x\ ,\ y + \Delta y)$

$i.e\ \ OB = x + \Delta x\quad ,\quad QB = y + \Delta y$

وبالتعويض بهذه القيم فى المعادلة :

$$y = mx + b \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$\therefore y + \Delta y = m(x + \Delta x) + b \qquad \ldots\ldots (2)$$

وبطرح (1) من (2)

$$\therefore \Delta y = m(\Delta x)$$

$$\therefore m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan QCB = \tan PCA = \tan\theta$$

أى أن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تُمثل ميل المستقيم : Gradient of the line

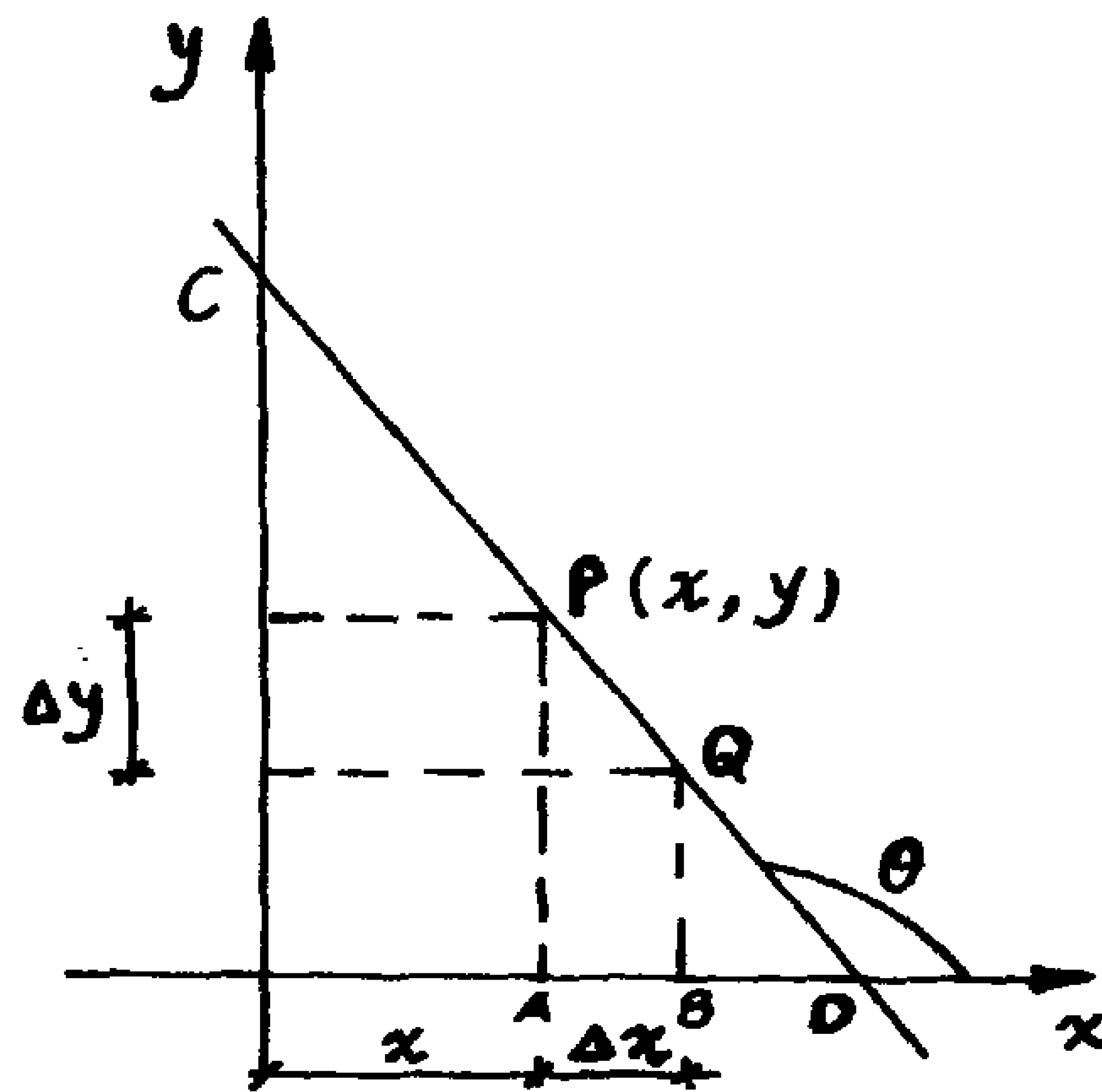
ومن الواضح أن إضافة الثابت b للطرف الأيمن فى المعادلة لن يؤثر فى الميل ، ففى كل من : $y = mx$, $y = mx + b$

فإن الميل ثابت ويساوى m ويتوازى المستقيمان عند أى قيم تأخذها m

٤-٣ :- الميل السالب Negative gradient

تُقاس الزاوية التى يصنعها الخط المستقيم مع محور OX ، دائماً فى الإتجاه العكسى لاتجاه دوران عقارب الساعة anti-clockwise

فعندما تكون هذه الزاوية أكبر من $90°$ ، أى من الزاوية القائمة كما فى حالة زاوية θ التى يصنعها المستقيم CD بالشكل (٤-٣) ، فإن الميل يكون سالباً .



شكل (٤-٣)

فإذا كانت P هى النقطة التى إحداثياتها (x , y)

$$\therefore OA = X \quad , \quad AP = Y$$

فإذا ما ازدادت X بمقدار Δx فى إتجاه OB ، فإن الإحداثى الرأسى للنقطة Q هو QB

وبرسم المستقيم RQ موازياً OX ، سنجد أنه عند حركة النقطة من A إلى B فإن الإحداثى الأفقى (السينى) سيزداد بمقدار Δx بينما يتناقص الإحداثى الرأسى (الصادى) بمقدار ΔY ((من PA إلى QB))

ويعبر عن هذا بأنها زيادة سالبة (أو نقص)

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = negative(-ve)$$

كذلك

$$\therefore \tan\theta = (-ve),$$

وبذلك فإن مُعدل زيادة y بالنسبة إلى x ، يكون سالباً ويمكن تلخيص ما سبق ، كمـــا يلى :-

(١) إذا ازدادت y نتيجة لزيادة x فإن الميل يكون موجباً

(٢) إذا نقصت y نتيجة لزيادة x فإن الميل يكون سالباً .

٤-٤ :- ميــل المنحنى Gradient of a curve

نعلم أن الخط المستقيم ، هو الرسم البيانى المعبر عن أى دالة من الدرجـة الأولى ويكـون ميله ثابتاً عند كل نقط المستقيم

أما إذا كان الرسم البيانى عبارة عن منحنى فإن الميل يكون مختلفـاً عنـد كـل نقطـة مـن نقط المنحنى ولذلك فإنه لا يلاحظ معنى الميل على المنحنى حيث أنه يتغير باستمرار ، وسوف نقوم بإيضاح ذلك فيما يلى بشئ من التفصيل :-

المنحنى البيانى لحركة جسم بسرعة متزايدة بانتظام :-

Body moving with uniformly increasing velocity

سبق أن بينا أن الرسم البيانى الذى يصل بين المسافات والأزمنة المنـاظرة لجسـم يتحـرك بسرعة ثابتة عبارة عن خط مستقيم

وسوف نعتبر هنا أن الجسم يتحرك بسرعة تزايدية منتظمة أى أنه فـى الأزمنـة المتسـاوية فإن سرعته تزداد بنفس المقدار

وهذا يعنى أنه فى الأزمنة المتساوية فإن المسافات المناظرة المقطوعة تكون غير متساوية .

وذلك لأنه كلما زادت السرعة فإن المسافة المقطوعة كذلك تزداد

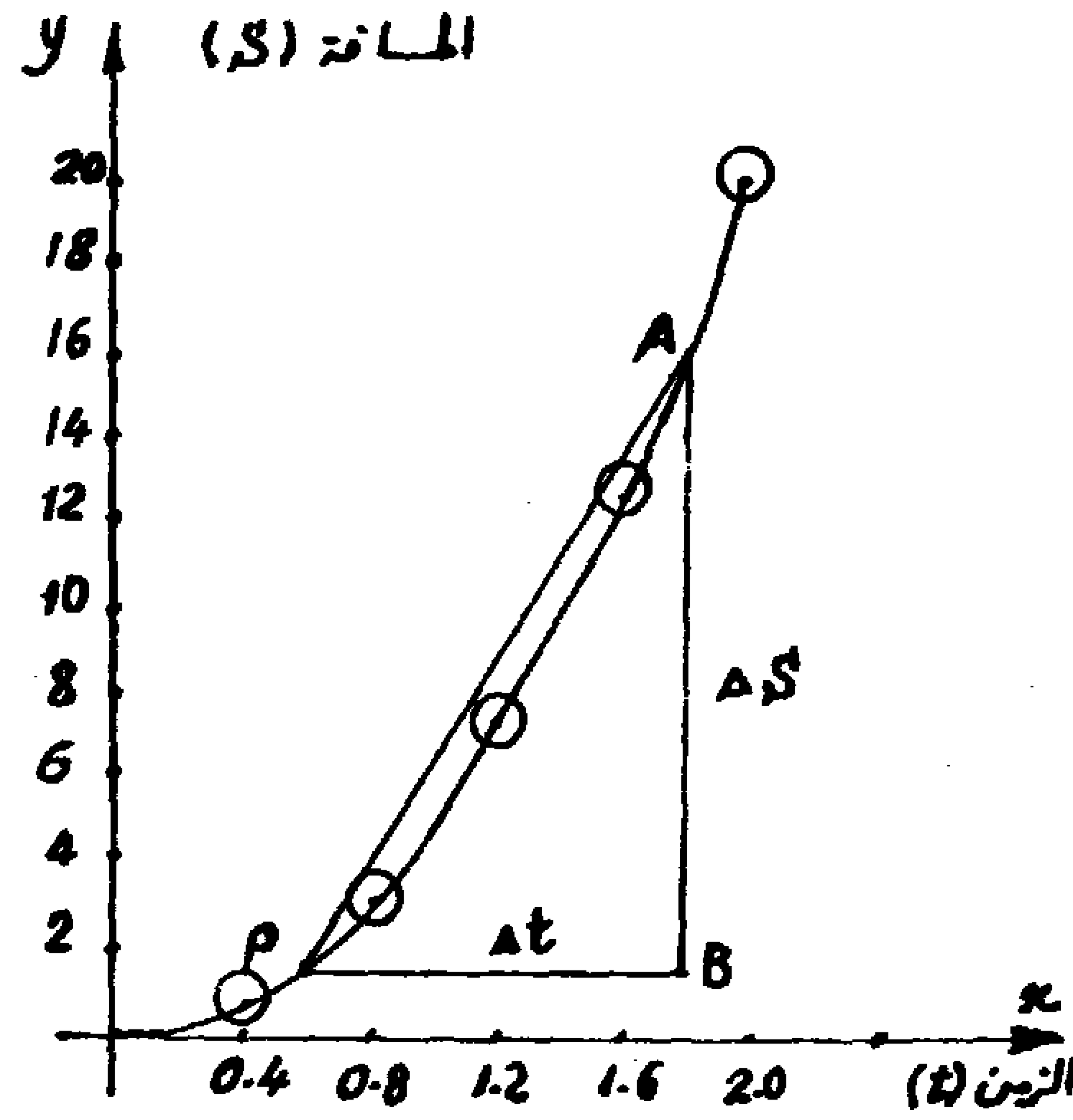
وكلما زادت السرعة ، زادت المسافة المقطوعة.

والمثال البسيط لإيضاح ذلك ، هو الجسم الساقط فسرعته تزداد بمرور الزمن

والجدول التالى يبين المسافات المقطوعة فى الفترات الزمنية المبينة لجسم يسقط سقوطاً حراً من وضع السكون

الزمن t بالثانية	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
المسافة S بالمتـــر	0	0.8	3.2	7.2	12.8	20.0

وبرسم هذه البيانات ، بيانياً ينتج لنا منحنى كما هو مبين بالشكل (٤-٤)



شكل (٤-٤)

وواضح أن المنحنى يميل أكثر فأكثر بانتظام مع زيادة الوقت ، أى أن نسبة المسافة للزمن تزداد أو أن السرعة تزداد .

ويعنى الشكل الإنسيابى للمنحنى أن ازدياد السرعة ثابت ولنعتبر نسبة الزيادة فيما بين المسافة والزمن فى خمسة فترات زمنية كما هو موضح بالجدول التالى :

الفترة الزمنية بالثانية	0 *to* 0.4	0.4 *to* 0.8	0.8 *to* 1.2	1.2 *to* 1.6	1.6 *to* 2.0
المسافة بالمتر	0.8	2.4	4.0	5.6	7.2
المسافة ÷ الزمن	2	6	10	14	18

وتُبين هذه النسب مُعدل السرعات للفترات المناظرة ويجب ملاحظة أن ميل الأوتار التى تصل بين النقط المتتالية على المنحنى يكون مساوياً لمعدلات السرعات .

فإذا ما أخذنا نقطة P على المنحنى ورسمنا منها وتراً يقطع المنحنى عند نقطة A .

ثم نرسم الإحداثى AB الذى يلاقى المستقيم PB المرسوم موازياً لمحور الإحداثيات السينى OX عند B

ولنفترض زيادة فى الزمن قدرها Δt فيما بين نقطتين P , B أى أن $PB = \Delta t$

ومن الرسم فإن التغير فى المسافة بين النقطتين ، يقابل المسافة $AB = \Delta S$

∴ معدل السرعة خلال هذه المرحلة = $\frac{\Delta S}{\Delta t}$. وهو يعادل ميل الوتر PA .

فإذا ما تناقصت الفترة الزمنية Δt فإن المسافة المناظرة لها ΔS تتناقص كذلك ، إلا أن النسبة بينهما لا تزال تعنى معدل السرعة خلال الفترة الزمنية . وتعنى كذلك ميل الوتر PA والذى يتناقص طوله ويتلاشى تدريجياً بتناقص كل من ΔS , Δt

فإذا ما تخيلنا أن الفترة الزمنية قد تناقصت بلا حدود إلى حد متناهى فى الصغر فإن ΔS تتناقص كذلك لقيمة متناهية فى الصغر.

وعندما تصبح A قريبة جداً من P أى منطبقة عليها فإن النسبة $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ تُصبح قريبة جداً من قيمة محددة ويُصبح الوتر PA مماساً للمنحنى عند P ، والنهاية التى تصل إليها النسبة $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ تكون عبارة عن ميل هذا المماس .

وهى تعنى كذلك ، السرعة عند P

وبذلك فإن السرعة عند نقطة ما هى نهاية النسبة $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ ، عندما يُصبح كل من حدى النسبة صغيراً صغراً متناهياً . وهى أيضاً ؛ أى السرعة تعنى فى ذات الوقت ميل المماس للمنحنى عند نقطة P . وبذلك فإن ميل المنحنى عند أى نقطة على المنحنى يكون مساوياً لميل المماس للمنحنى والمرسوم عند هذه النقطة .

وفى الشكل السابق ، نرسم PQ مماساً للمنحنى عند نقطة P , PR بطول يعادل الوحدة موازياً للمحور OX ومن R نرسم RS عمودياً على PR ويلاقى PQ فى S

والزاوية التى يصنعها PQ مع $OX = \angle QPR = \theta$.

وميل PQ :- $\frac{SR}{RP} = \frac{10}{1} = 10$

∴ السرعة عند نقطة P = ميل المماس عند P وتساوى $10\ m/S = 10 ms^{-1}$.

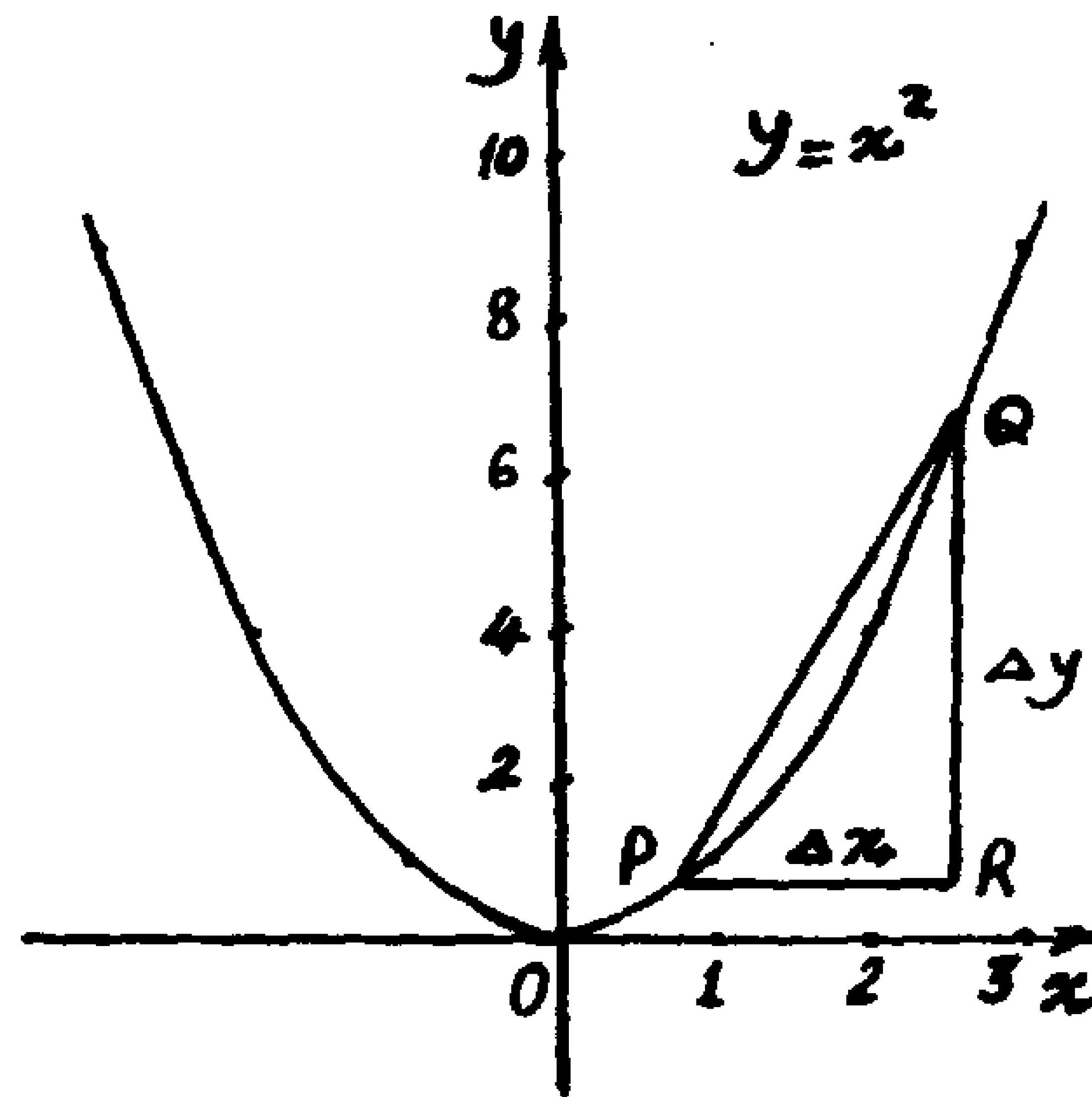
أى أن السرعة عند نهاية ثانية واحدة = $10\ m/S$.

ويمكن للطالب الماهر إثبات أن الإجابة حوالى $(9.8\ m/s)$.

ميـــل المنحنى $y = x^2$:-

يعتبر المنحنى $y = x^2$ من الأمثلة الشائعة والبسيطة للدوال الجبرية وهو من سلسلة المنحنيات $y = ax^2$ وللتبسيط سنعتبر $a = 1$ والطرق المتبعة هنا فى مثالنا $y = x^2$ يمكن تطبيقها لأى منحنى حيث $a \neq 1$ [أى لأى قيمة لـ : a]

والشكل التالى يوضح هذا المنحنى $y = x^2$ ، شكل (٤-٥)



شكل (٤-٥)

، لتكن P هى النقطة $(1 , 1)$ ثم نرسم الوتر PQ الذى يقطع المنحنى Q

ثم نرسم PR موازياً للمحور OX ليلاقى الرأسى من Q فى R ولتكن PR ، تُمثل

الزيادة فى X فيما بين P , Q أى $= \Delta x$

ولتكن QR ، تمثل الزيادة فى Y فيما بين P , Q أى $= \Delta y$

$\therefore$ ميل الوتر PQ = ظل الزاوية $QPR = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

وكذلك فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تساوى معدل الزيادة فى y لكل زيادة بمقدار الوحدة فى x فيما

بين P , Q ، والآن :-

الدالة : $y = x^2$ (1)...........

وعندما تزداد x بمقدار Δx ، تزداد y بمقدار Δy كزيادة مناظرة :-

(2) .... $\therefore y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$

بطرح (1) من (2) :

$$\therefore \Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$$

$$\therefore \Delta y = 2x . \Delta x + (\Delta x)^2$$

وبالقسمة على Δx :

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

ومن ذلك فإن قيمة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ يمكن حسابها لأى قيمة لـ Δx عند أى نقطة على المنحنى حيث

تكون قيمة X معروفة .

وبذلك فإنه عندما $x = 1$ كما هو الحال فى النقطة P على المنحنى السابق فإن :-

$$if \ \Delta x = 0.3 \ , \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \times 1 + 0.3 = 2.3$$

$$if \ \Delta x = 0.2 \ , \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.2 = 2.2$$

$$if \ \Delta x = 0.1 \ , \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.1 = 2.1$$

$$if \ \Delta x = 0.01 \ , \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.01 = 2.01$$

$$if \quad \Delta x = 0.001 \quad , \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.001 = 2.001$$

$$if \quad \Delta x = 0.0001 \quad , \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.0001 = 2.0001$$

وهذه القيم توضح ميل الوتر PQ عندما تتلاشى Δx وتتحرك Q قريبا من P ومن الواضح أن ميل الوتر يقترب من 2 ويمكننا أن نستنتج أنه عندما تتحرك Q للإنطباق على P ويصبح الوتر مماساً للمنحنى عند P ، فإن ميل المماس = 2 .

أى أن معدل الزيادة فى y بالنسبة لوحدة الزيادة فى x عند النقطة $P = 2$.

ويمكن الوصول إلى نفس النتائج لأى نقطة على المنحنى ، إلا أن ميل كل مماس يعتمد على قيمة x عند النقطة المقام منها المماس .

وبذلك سنجد أن الميل عبارة عن دالة فى x .

فمثلاً عند نقطة على المنحنى ، إحداثيها السينى $x = 3$ ، نجد أن ميل المماس سيكون مساوياً لـ : 6 $[2x = 2 \times 3 = 6]$

[وبذلك فإن الميل عند أى نقطة على منحنى ، يمثل دالة ويكون مساوياً لميل المماس المرسوم للمنحنى عند هذه النقطة]

وهو أيضاً عبارة عن معدل زيادة الدالة لقيمة x عند هذه النقطة .

الميل السالب :- Negative gradient

فى الشكل السابق (٤-٥) ، نعتبر النقطة S على المنحنى ولها إحداثى سينى سالب ، نرسم مماس للمنحنى ونمده حتى يلاقى المحور $X'O$ ، سنجد أن الزاوية التى يصنعها هذا المماس أكبر من $90°$ وبالتالى فإن الميل سالب (كما سبق ذكر الميل **السالب** للخط المستقيم) . وهذا يعنى أن معدل الزيادة فى الدالة سالب أى أن الدالة تتناقص وبدراسة المنحنى ، نجد أنه بزيادة x خلال القيم السالبة لها من $(-\infty \to 0)$ فإن الدالة الممثلة بالمنحنى ، تتناقص من $(+\infty \to 0)$ عند نقطة الأصل .

وعند هذه النقطة ، وهى نقطة الأصل ، يكون OX مماساً للمنحنى وميل المنحنى يصبح مساوياً لميل محور السينات وهو يساوى الصفر .

Exercise 2

(١) ارسم الخط المستقيم : $3x-2y=6$ ثم أوجد ميله وإذا كانت P , Q نقطتان على هذا المستقيم بحيث أن قيمة x عند Q أكبر من قيمة x عند P بمقدار 0.8 ، فبكم تزيد قيمة y عند Q عن قيمتها عند P

(٢) أوجد ميل المستقيمات التالية :-

$a)\ \frac{x}{3}-\frac{y}{5}=2$

$b)\ 3x+4y=12$

$c)\ \frac{x}{a}+\frac{2y}{b}=3$

$d)\ 2x-3y=0$

(٣) إذا كان ميل أحد المستقيمات هو 1.5 وكان يمر بالنقطة (2 , 4) فأوجد معادلته .

(٤) إذا كانت المسافة التى يقطعها جسم يسقط سقوطاً حراً من وضع السكون تكون طبقاً للعلاقة التالية ، التقريبية :-

$$S=4.9t^2$$

وباعتبار الزيادة فى الزمن $=\Delta t$ والزيادة المناظرة فى المسافة $=\Delta S$ ، فأوجد بالطرق السابق دراستها فى هذا الموضوع ، صيغة رياضية لـ : ΔS بدلالة Δt لأى قيمة لـ t .

ومن ثم أوجد $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ ومنها إحسب معدل السرعة للفترات الزمنية التالية :-

(1) $2S$ *to* $2.2S$ (2) $2S$ *to* $2.1S$

(3) $2S$ *to* $2.01S$ (4) $2S$ *to* $2.001S$

ومن هذه النتائج استنتج السرعة عند نهاية ثانيتين .

(٥) فى المنحنى الذى معادلته $y=x^2$ وباستخدام نفس الرموز المتقدمه فى الشرح لهذا الموضوع ، أوجد قيمة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما تزيد قيمة x من 3 إلى :-

3.1 , 3.01 , 3.001 , 3.0001 على الترتيب

ثم استنتج ميل المماس للمنحنى عند النقطة التى إحداثيها السينى $=3$

(٦) ارسم المنحنى الذى معادلته $y=x^3$ لقيم x فيما بين :- $0 , 2$

ثم أوجد صيغة لـ Δy بدلالة $x , \Delta x$ ثم أوجد صيغة لـ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

ثم أوجد ميل المماس للمنحنى عند النقطة التى فيها $x=2$ ، أكد صحة الإجابة برسم المماس للمنحنى عند هذه النقطة

(٧) الدالة : $y=\dfrac{1}{x}$ تمثل قطع زائد ، أوجد صيغة لـ Δy بدلالة $x , \Delta x$ ثم أوجد صيغة لـ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ وباعتبار قيم x :- $1.0001 \ , \ 1.001 \ , \ 1.01 \ , \ 1.1$

فأوجد النهاية التى تقترب منها $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ عند اقتراب x من الواحد الصحيح

ثم أوجد الميل وزاوية ميل المنحنى عند نقطة $x=1$ ، وأكد صحة الإجابة برسم المنحنى والمماس له عند هذه النقطة

(٨) أوجد ميل المماس للمنحنيات التالية ، عند $x=1$:-

$a)\ y=3x^2-2$

$b)\ y=2x^2+5$

$c)\ y=\ x^3+3$

(٩) أوجد ميل المماس للمنحنيات التالية عند $x=3$:-

$a)\ y=2x^2-11$

$b)\ y=3x^2+2$

$c)\ y=5x^2-7$

الباب الخامس

المعامل التفاضلى ،والتفاضل

Differential Coefficient , Differential

٥ – ١ : – تقديم

علمنا مما سبق أن التغير Δx فى المتغير المستقل x يناظره تغير Δy فى المتغير التابع y .

وأن معدل التغير = $\dfrac{y \text{ قيمةالتغير فى}}{x \text{ قيمةالتغير فى}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

وأن قيمة الدالة تتغير بتغير المتغير المستقل بها .

ومعدل التغير له أهمية تطبيقية كبيرة ولذلك يجب الإلمام بطرق حسابه .

كما وأن معدل التغير سواء كان بالزيادة أو النقصان ، يمكن حسابه هندسياً كما يلى:–

أ) عندما تكون الدالة من الدرجة الأولى ، فإن مثل هذه الدوال يكون تمثيلها بيانيـاً بخـط مستقيم ويكون ميل هذا الخط مساوياً لمعدل تغير الدالة .

فإذا كانت y دالة فى x ، Δx ، Δy هو مقـدار التغيـر فـى x ، y فـإن الميـل يكـون مساوياً لـ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ويكون ثابتاً على طول الخط المستقيم ويكون معدل التغير مُنتظماً .

ب) إذا لم تكن الدالة من الدرجة الأولى فإن رسمها البيانى يكـون علـى شـكل منحنـى ويكون معدل تغير الدالة مختلفاً على طول المنحنى وتكون قيمته عنـد أى نقطـة مسـاوية لميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة .

وبالرغم من أن الرسم يساعد كثيراً فى إيضاح الموضوع ، إلا أنه من الناحية العملية ، يصعب إيجاد الميل بهذه الطريقة لعدم توفر الدقة التامة .

ولذلك كان لزاماً من استنباط طريقة جبرية لهذه الحالة .

ولنأخذ مثالنا السابق : (1) .... $y=x^2$

(2) .... $y+\Delta y=(x+\Delta x)^2$ ،

وبطرح (1) من (2)

$$\therefore \Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2$$
$$=2x(\Delta x)+(\Delta x)^2$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x \qquad \text{..........}\ (3)$$

وقد رأينا من رسم الدالة ، أنه عندما تقترب Δx من الصفر فإن ميل الوتر والذى يُمثل معدل الزيادة فى الدالة خلال الفترة Δx ، يقترب تدريجياً من ميل المماس عند النقطة المعينة .

وبذلك فإن ميل المماس والذى يمكن تمثيله بـ : - $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، يكون مساوياً لمعدل زيادة الدالة عند النقطة x المعينة ، ومن الدالة (3) : -

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x \qquad \text{..........}\ (3)$$

وعندما $\Delta x \to 0$ فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تقترب من $2x$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=2x \qquad \text{..........}\ (4)$$

أى أنه عندما $\Delta x \to 0$ فإن نهاية $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، تُمثل معدل الزيادة فى y بالنسبة لـ x لأى قيمة لـ x

فمثلاً عندما $x=1$ فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x}=2$ وهذا يعنى أن معدل الزيادة فى y أو فى x^2 بالنسبة إلى $x=2$.

وعند $x=2$ فإن : - $\qquad Lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=4$

وعند $x=3$ فإن : - $\qquad Lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=6$

وبذلك فإنه يمكن كتابة المعادلة B كالتالى : - $\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x$

ويُستغنى عن هذا التعبير رياضياً بكتابته $\frac{dy}{dx}$.

أى أن الاصطلاح $\frac{dy}{dx}$ بدلاً من كتابة $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ حيث يتم استخدام الحرف الأبجدى الإنجليزى d بدلاً من الحرف الأبجدى اليونانى δ [دلتا δ Greek]

وبذلك فإن المعادلة (4) تُصبح : $\frac{dy}{dx} = 2x$

ويُطلق على هذه النهاية أو على $\frac{dy}{dx}$ بالمعامل التفاضلى **differential Coefficient** للدالة بالنسبة إلى المتغير المستقل x

وبنفس الطريقة يمكن حساب المعامل التفاضلى لأى دالة أُخرى ويمكن تلخيص ما سبق فيما يلى : -

(١) إذا كانت y دالة متصلة فى x وكانت Δx تعادل مقدار التغير فى قيمة x فإنه يكون هنالك تغير مناظر زيادة أو نقصان فى قيمة الدالة y ويُعادل Δy .

(٢) تُمثل النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ معدل التغير فى y بالنسبة إلى x عندما تزيد x إلى $x + \Delta x$.

(٣) حيث أن y دالة متصلة فى x فإنه عندما تصغر Δx بدون حد ، فإن Δy تصغر كذلك بدون حد .

(٤) عندما $\Delta x \to 0$ فإن النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تقترب من نهاية محددة .

ويُطلق على هذه النهاية المحددة بالمعامل التفاضلى لـ y بالنسبة إلى x ويرمز له بالرمز $\frac{dy}{dx}$ أى : - $i.e. \; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$

ويهتم حساب التفاضل أساساً بالتغيرات فى الدوال ويمكننا إعتبار المعامل التفاضلى كمقياس لمعدل هذه التغيرات .

فهو يقيس المعدل الذى تتغير به قيمة الدالة مقارنة بالمتغير المستقل بالدالة .

فالدالة $y = x^2$ يكون المعامل التفاضلى لها : $\frac{dy}{dx} = 2x$

فعند $x = 4$ فإن y أو x^2 تتغير قيمتها بمقدار ثمانية أضعاف معدل التغير فى x $[2x = 2 \times 4 = 8]$

والعامل التفاضلى $\frac{dy}{dx}$ يُطلق عليه أيضاً بمشتقة y $(derivative\ of\ y)$ بالنسبة إلى x أو بالدالة المشتقة (derived function) .

ويستخدم أحيانا الرمز y' بدلاً من $\frac{dy}{dx}$

وبذلك فإنه إذا كانت $y = x^2$ فإن $y' = 2x$

وإذا كانت الدالة $y = f(x)$ فإن معاملها التفاضلى يرمز له بالرمز y' أو $f'(x)$.

وإذا كانت u دالة فى V أى $u = f(V)$ فإن المعـامل التفـاضلى لـ u بالنسـبة إلى V يكتب u' أو $f'(v)$ أو $\frac{du}{dv}$ والتفاضل ، هو عملية إيجـاد المعـامل التفـاضلى أو مشـتقة الدالة .

ويمكن استخدام الرمز $\frac{d}{dx}$ بمعنى الرغبة فى إجراء أو إيجاد عملية التفاضل فى الدالة بالنسبة إلى x .

وبذلك فإن تفاضل x^2 بالنسبة إلى x يمكن التعبير عنه بالرموز التالية : -

$$\frac{d(x^2)}{dx} or \frac{d}{dx}(x^2)$$

وعموماً فإن تفاضل $f(x)$ بالنسبة إلى (x) يمكن التعبير عنه بالرموز : -

$$\frac{d\,f(x)}{dx}\ or\ \frac{d}{dx}[f(x)]$$

ويمكن التعبير عنها كذلك بالرموز : Dy أو $D_x y$

ويستخدم الرمز Dy عندما يكون معروفاً أن x هو المتغير المستقل وعندما نقول أن :

$\frac{dy}{dx} = 2x$ للدالة : $y = x^2$

فإن هذا يعنى أن نسبة تفاضل y إلى تفاضل x يساوى $2x$ أو أن تفاضل y يساوى ($2x$ مرة) تفاضل x

ويمكن التعبير عن هذا بالمعادلة : -

$$dy = 2x\,.dx$$

وفى الصورة الأخيرة تظهر $2x$ كمعامل لتفاضل x ومن هنا ظهر التعبير (المعامل التفاضلى) .

ولا يجب أن نتعامل مع $\frac{dy}{dx}$ كما لو كان كسراً ، بسطه dy ومقامه dx أى أن المشتقة ليست نسبة وإن كانت على شكل كسر وإنما هى رمز واحد لا يتجزأ أو بمعنى نهاية نسبة .

$$\therefore \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

٥ – ٢ المعامل التفاضلى للمقدار الثابت

حيث أن المعامل التفاضلى ، يقيس معدل التغير للمتغير فى الدالة ، وحيث أن المقدار الثابت ليس به تغير .

فإن المعامل التفاضلى للمقدار الثابت = صفر

$\therefore \frac{dy}{dx}(C) = 0 \quad , \quad C = \text{Constant}$ ثابت

٥ –٣ : – تفاضل الدالة $y = mx + b$: –

هذه الدالة هى الصورة العامة للدالة من الدرجة الأولى ورسمها يكون على شكل خط مستقيم وبذلك فإن الميل يكون ثابتاً ، ويمكن إيضاح ذلك جبرياً من المبادئ الأولية كما يلى : –

لنفرض أن الزيادة فى $x = \Delta x$

وأن الزيادة المناظرة فى $y = \Delta y$

وبالتعويض فى المعادلة : $y = mx + b$ .... (1)

$\therefore y + \Delta y = m(x + \Delta x) + b$ .... (2)

وبطرح (1) من (2)

$\therefore \Delta y = m(\delta x)$

وبالقسمة على Δx :

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$

وهذا صحيح لكل قيم Δx

وحيث أن m مقدار ثابت

$$\therefore \frac{dy}{dx} = m$$

ويجب ملاحظة أن $\frac{dy}{dx}$ لا تعتمد على b

وعند إختلاف قيم b فإن المعادلة تبقى خط مستقيم أو مجموعة خطوط مستقيمة متوازية ولها نفس الميل m

٥ - ٤ : - تفاضل الدالة $y = x^3$:-

وسوف نقوم بإيجاد المعامل التفاضلى الأول لهذه الدالة من المبادئ الأولية (طريقة Δ):-

فإذا فرضنا أن التغير فى x = Δx

، فإذا افترضنا أن المناظر فى y = Δy

وبالتعويض فى المعادلة $y = x^3$

$$\therefore y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$$

$$= x^3 + 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

وبالطرح : -

$$\therefore \Delta y = 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2 \quad , \quad \Delta x \neq 0$$

وعندما تقترب Δx من الصفر ، يقترب كل من : -

$3x \,.\, (\Delta x)$ ، $(\Delta x)^2$ من الصفر

$$\therefore \underset{\Delta x \to o}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$$

$$i.e \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

٥ – ٥ : – تفاضل الدالة $y = x^4$:–

بنفس الطريقة السابقة فإننا نصل إلى أن : –

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x^3 + 6x^2.(\Delta x) + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\text{،}\quad \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x^3$$

ويلاحظ مما سبق أن أى دالة فى الصورة : $y = x^n$

يمكن التعامل معها بنفس الطريقة السابقة أى من المبادئ الأولية (طريقة Δ) .

وواضح من مفكوك $(x + \Delta x)^n$ أن المعامل التفاضلى هو الحد الثانى فى المفكوك .

فمثلاً : – إذا كانت $y = x^5$ فإن $\frac{dy}{dx} = 5x^4$

وإذا كانت $y = x^6$ فإن : $\frac{dy}{dx} = 6x^5$

وعلى العموم ، إذا كانت x عدد صحيح موجب ، $y = x^n$ $\therefore \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

وسنثبت هذا فيما يلى : –

نفترض أن : $y = x^n$

، Δx = التغير فى x

، Δy = التغير المناظر فى y

وبالتعويض :

$$\therefore y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$$

وبفك الطرف الأيمن بنظرية ذات الحدين :

$$\therefore y + \Delta y = x^n + nx^{n-1}.\Delta x + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}.x^{n-2}.(\Delta x)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}.x^{n-3}.(\Delta x)^3 + ...$$

وبالطرح :

$$\therefore \Delta y = nx^{n-1}.\Delta x + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^{n-2}.(\Delta x)^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}.x^{n-3}.(\Delta x)^3 + \ldots\ldots$$

وبالقسمة على Δx : -

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^{n-2}.(\Delta x) + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}.x^{n-3}(\Delta x)^2$$

فعند اقتراب Δx من الصفر فإن كل الحدود بالطرف الأيمن إبتداء من الحد الثانى (بعد الحد الأول) تقترب من الصفر .

$$\therefore \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

$$i.e \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

وهذا صحيح لجميع قيم n السالبة والموجبة والكسرية ويمكن التأكد من ذلك بإيجاد المعامل التفاضلى للدالة $y = x^n$ بعدة طرق أُخرى بخلاف الطريقة المتضمنة مفكوك ذات الحدين .

وعليه فإنه لجميع قيم n :

$$\therefore \frac{dy}{dx}\left(x^n\right) = n.x^{n-1}$$

٥ –٦ تفاضل الدالة $y = ax^n$

حيث a مقدار ثابت

$$\because y = ax^n$$

$$\therefore y + \Delta y = a(x + \Delta x)^n$$

$$= a\left\{x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}.x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots\right\}$$

وبالطرح : -

$$\therefore \Delta y = a\left\{n.x^{n-1}.(\Delta x)+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}.x^{n-2}(\Delta x)^2+.....\right\}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = a\left\{n.x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}.x^{n-2}.(\Delta x)+.....\right\}$$

وعندما تقترب Δx من الصفر

$$\therefore \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a.n.x^{n-1}$$

ومن هذا نجد أن الثابت a فى الدالة الأصلية يبقى كما هو ولكن مضروباً فى المعامل التفاضلى لـ x^n أى $a \times nx^{n-1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = n.a.x^{n-1}$$

أمثلة محلولة

(١) أوجد مشتقة (العامل التفاضلى) الدالة :

$$y = 3x+2$$

باستخدام المبادئ الأولية .

الحل : -

$$\because y = 3x+2 \qquad \text{..........} (1)$$

$$\therefore y+\Delta y = 3(x+\Delta x)+2 \qquad \text{..........} (2)$$

بطرح (1) من (2) : -

$$\therefore \Delta y = 3.\Delta x$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$$

(٢) أوجد مشتقة الدالة $y = \frac{1}{x}$ [أو $y = x^{-1}$] من المبادئ الأولية .

الحـل : -

$$\because y=\frac{1}{x} \qquad \therefore y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}$$

وبالطرح :

$$\therefore \Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x^2+x(\Delta x)}$$

$, when\ x\to 0$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x^2} \quad ,[x.\Delta x=0]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{x^2}$$

(٣) اوجد معدل التغير اللحظى للدالة : $y=x^2+4x-6$ من المبادئ الأولية .

الحـل : -

المقصود بمعدل التغير اللحظى هو المشتقة أو العامل التفاضلى

$$\because y=x^2+4x-6$$

$$\therefore y+\Delta y=(x+\Delta x)^2+4(x+\Delta x)-6$$

$$=x^2+2x.(\Delta x)+(\Delta x)^2+4x+4.(\Delta x)-6$$

وبالطرح :

$$\therefore \Delta y=2x.(\Delta x)+4.(\Delta x)+(\Delta x)^2$$

ومعدل التغير = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+4+8\Delta x$$

ومعدل التغير اللحظى (المشتقة) =

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + 4 + \Delta x \quad = 2x + 4$$

(٤) اكتب العامل التفاضلى للدوال التالية : –

1) $y = x^7$ 2) $y = x^{\frac{1}{3}}$ 3) $y = x^{-4}$

4) $y = x^{0.6}$ 5) $y = x^{-0.5}$ 6) $y = x$

الحــل : –

1) $\frac{dy}{dx} = 7x^{7-1} \quad = 7x^6$

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} \quad = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} \quad = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

3) $\frac{dy}{dx} = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = \frac{-4}{x^5}$

4) $\frac{dy}{dx} = 0.6x^{0.6-1} = 0.6x^{-0.4} = 0.6\frac{1}{x^{0.4}} = \frac{0.6}{\sqrt[10]{x^4}}$

5) $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2}x^{-0.5-1} = \frac{-1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2x^{3/2}} \quad = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$

6) $\frac{dy}{dx} \quad 1 \times x^{1-1} = 1 \times x^0 = 1 \times 1 = 1.$

(٥) اوجد تفاضل الدوال التالية :–

1) $y = 8x^5$ 2) $y = 4\sqrt[3]{x}$

3) $y = ax^{2b}$ 4) $S = 16t^2$

الحــــل :–

1) $\frac{dy}{dx} = 8 \times 5 \times x^4 = 40x^4$

2) $\frac{dy}{dx} 4\sqrt[3]{x} = \frac{dy}{dx} 4x^{\frac{1}{3}} = 4 \times \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{4}{3x^{2/3}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$

3) $\frac{dy}{dx} = a.2b.x^{2b-1} = 2ab\ x^{2b-1}$

$$4)\frac{ds}{dt}=16\times 2t^{2-1}=32t$$

(٦) اوجد مشتقة الدالة :-

$$y=\frac{2x+1}{x-1}$$

الحــــل :-

$$\therefore y=\frac{2x+1}{x-1}$$

$$\therefore y+\Delta y=\frac{2(x+\Delta x)+1}{(x+\Delta x)-1}$$

$$\therefore \Delta y=\frac{2x+2.(\Delta x)+1}{(x-1+\Delta x)}-\frac{2x+1}{x-1}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x-1)(2x+2.\Delta x+1)-(x-1+\Delta x)(2x+1)}{\Delta x(x-1+\Delta x)(x-1)}$$

$$=\frac{-3\Delta x}{\Delta x.(x-1+\Delta x)(x-1)}=\frac{-3}{(x-1)(x-1+\Delta x)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3}{(x-1)(x-1+\Delta x)}=\frac{-3}{(x-1)(x-1)}=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

(٧) أوجد ميل المماس للمنحنى $y=\frac{1}{x}$ عند النقطة التى إحداثيها السينى $=1$

الحــــل :-

يمكن حساب الميل بإيجاد قيمة المعامل التفاضلى عند النقطة المعنية .

(مثــال ٢)

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-1}{x^2}$$

$, \ at \ \ x=1$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-1=\tan 135^\circ$$

وهذا يعنى أن ظل الزاوية التى يصنعها المماس عند النقطة $x=1$ ، سـالب لأن الزاويـة التى ظلها (1-) هى 135°

(٨) أوجد ميل المنحنى الآتى باستخدام طريقة Δ " method – Δ" أى من المبـادئ الأولية :-

$$y = 3x^2 - 2x + 4 \qquad at \left(\frac{1}{2}\ ,\ 3\right)$$

الحـــل :-

لإيجاد ميل المنحنى عند نقطة معينة نوجد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، ومن طريقة Δ ؛ نعلم أن :-

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) + 4 - \left(3x^2 - 2x + 4\right)}{\Delta x}$$

$$= \frac{3x^2 + 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x + 4 - 3x^2 + 2x - 4}{\Delta x}$$

$$= \frac{6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 6x + 3.\Delta x - 2$$

$$,\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\ 6x + 3.\Delta x - 2 = 6x - 2$$

وعند النقطة $\left(\frac{1}{2}\ ,\ 3\right)$:-

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$$

وهو الميل المطلوب

وزاوية ميل المماس :

$$= \tan^{-1} 3 \cong 71.6^\circ$$

(٩) أوجد ميل المنحنى الآتى باستخدام طريقة Δ :

$$y = x^3 - 3x + 5 \qquad at\ (-2\ ,\ 2)$$

الحـــل :-

$$\therefore\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^3 - (3x + \Delta x) + 5 - (x^3 - 3x + 5)}{\Delta x}$$

$$=\frac{x^3+3x^2.\Delta x+3x.(\Delta x)^2+(\Delta x)^3+5-x^3+3x-5-3x-3\Delta x}{\Delta x}$$

$$=\frac{3x^2.\Delta x+3x.(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-3.\Delta x}{\Delta x}$$

$$=3x^2+3x.\Delta x+(\Delta x)^2-3$$

$$,\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\ 3x^2+3x.\Delta x+(\Delta x)^2-3=3x^2-3$$

وعند النقطة $(2\ ,\ -2)$:-

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3\times(-2)^2-3=12-3=9$$

وهو الميل المطلوب

وزاوية ميل المماس =

$$\tan^{-1}9\cong 83.6^\circ$$

(١٠) أوجد مشتقة الدالة : $f(x)=(2x-1)^{-\frac{1}{2}}$

وذلك باستخدام طريقة Δ

الحـــــل :-

من التعريفات السابقة :-

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\ \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$,\quad \because f(x)=(2x-1)^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$\therefore f(x+\Delta x)=\frac{1}{\sqrt{2(x+\Delta x)-1}}$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{2(x+\Delta x)-1}}-\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right)/\,\Delta x \qquad \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$،\ \frac{1}{\sqrt{(2x+\Delta x)-1}}-\frac{1}{\sqrt{2x-1}}=\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2(x+\Delta x)-1}}{\sqrt{2(x+\Delta x)-1}\ .\ \sqrt{2x-1}}$$

وبالضرب فى المرافق وهو : $\dfrac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2(x+\Delta x)-1}}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2(x+\Delta x)-1}}$ وهو يساوى الواحد :-

$$\therefore \frac{\left[\sqrt{2x-1} - \sqrt{2(x+\Delta x)-1}\right]\left[\sqrt{2x-1} + \sqrt{2(x+\Delta x)-1}\right]}{\left[\sqrt{(2x-1)}.\sqrt{2x+2\Delta x-1}\right]\left[\sqrt{2x-1}+\sqrt{2(x+\Delta x)-1}\right]} =$$

$$= \frac{[(2x-1) - (2x+2\Delta x-1)]}{\left[(2x-1)\sqrt{2x+2\Delta x-1}\right] + \left[(2x+2\Delta x-1)\sqrt{2x-1}\right]}$$

$$, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\Delta x}{\left[(2x-1).\sqrt{2x+2\Delta x-1} + (2x+2\Delta x-1).\sqrt{2x-1}\right]}$$

ولا ننسى أن المقدار أصلاً مقسوم على Δx كما فى (1)

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2}{\left[(2x-1).\sqrt{(2x+2\Delta x-1)}\right] + \left[(2x+2\Delta x-1).\sqrt{2x-1}\right]}$$

وبالتعويض عن $\Delta x = 0$ فى المقدار السابق

$$\therefore f'(x) = \frac{-2}{(2x-1).\sqrt{2x-1} + (2x-1).\sqrt{2x-1}}$$

$$= \frac{-2}{(2x-1)^{3/2} + (2x-1)^{3/2}}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{-2}{2(2x-1)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{(2x-1)^3}}$$

(١١) أوجد معدل تغير الدالة :- $y = f(x) = x^2 - 2$

بين $x = 3$, $x = 4$

الحـــل :-

معدل التغير هو $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$، \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

$, \because x = 3 \quad \therefore \Delta x = 4 - 3 = 1$

$, \quad y = f(x) = f(3) = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$

، *For* $x = 4$

$\therefore y + \Delta y = f(x+\Delta x) = 4^2 - 2 = 16 - 2 = 14$

$\therefore \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f(4) - f(3) = 14 - 7 = 7$

وهو معدل التغير المطلوب : $\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{7}{1} = 7$

(١٢) أوجد معدل تغير y بالنسبة إلى x عند النقطة التى إحداثيها السينى ؛

$x = 3.5$ وذلك للدالة :- $2y = x^2 + 3x - 5$

الحـــــل :-

معدل التغير = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

، $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

$$\therefore 2\Delta y = (x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) - 5 - \left(x^2 + 3x - 5\right)$$

$$= x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3.\Delta x - 5 - x^2 - 3x + 5$$

$$= 2x \,.\, \Delta x + (\Delta x)^2 + 3 \,.\, \Delta x$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore 2\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 3$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = x + \frac{\Delta x}{2} + 1.5$$

$$, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} x + \frac{\Delta x}{2} + 1.5 = x + 1.5$$

$$, For \quad x = 3.5$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3.5 + 1.5 = 5$$

وهذا يعنى أن معدل التغير اللحظى للدالة المذكورة عند النقطة $x = 3.5$ هو 5 أى أن الدالة تتغير بسرعة تعادل خمسة أضعاف تغير المتغير المستقل x عندما $x = 3.5$

وميل المماس للمنحنى عند $x = 3.5$ هو 5

$$, \theta = \tan^{-1} 5 \cong 78.7^\circ$$

(١٣) أوجد مشتقة الدالة : $y = 2x^2 + 5x$ بطريقة Δ

الحـــــل :-

من التعريف :-

$$y` = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\because y = f(x) = 2x^2 + 5x$$

$$\therefore f(x+\Delta x) = 2(x+5)^2 + 5(x+\Delta x)$$

$$, y'(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+5)^2 + 5(x+\Delta x) - 2x^2 - 5x}{\Delta x}$$

وبالاختصار :-

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x.\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 5\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 4x + 2\Delta x + 5$$

وعندما $\Delta x \to 0$ فإن الحد $2\Delta x$ ينعدم وتُصبح

$$f'(x) = 4x + 5$$

(١٤) أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \sqrt{x}$ بطريقة Δ

الحـــــل :-

$$y = f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad f(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+\Delta x}}{\Delta x}$$

وبالضرب فى المرافق :-

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

وعندما $\Delta x \to 0$ فإن :-

$$\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \to \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(١٥) أوجد مشتقة الدالة : $y=f(x)=\sqrt{2x-3}$

باستخدام طريقة Δ

الحـــــل :-

$$\because\ y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\because\ y = f(x) = \sqrt{2x-3}$$

$$\therefore\ y + \Delta y = f(x+\Delta x) = \sqrt{2(x+\Delta x) - 3}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2(x+\Delta x)-3} - \sqrt{2x-3}}{\Delta x}$$

فإذا ما عوضنا عن $\Delta x = 0$ فإن المقام يؤول للصفر ولهـذا فإننـا سـنقوم بـالضرب فـ المرافق أى بالضرب فى كسر قيمته الكلية تساوى الواحد الصحيح وهـذا لـن يغير مـ المسألة .

أى إننا سنضرب المقدار السابق فى (1) والواحد هنا سيكون على شكل الكسر التالى :

$$\frac{\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}}$$

وبذلك فإن النهاية المطلوبة ، هى للمقدار :-

$$\frac{\sqrt{2x+2\Delta x-3} - \sqrt{2x-3}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}}$$

$$= \frac{(2x+2\Delta x-3) - (2x-3)}{\Delta x\left[\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}\right]}$$

$$= \frac{2\Delta x}{\Delta x\left[\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}\right]}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}}$$

والآن يمكننا أن نعوض عن Δx بالصفر

$$\therefore f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-3}} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

ومن هذا نصل إلى نتيجة هامة وهى أن أى مقدار كسرى ، بسطه الواحد الصحيح ، ومقامه جذر من الدرجة الأولى فى x فإن تفاضله $\frac{1}{\text{ضعف الجذر}}$

فمثلاً تفاضل $\frac{1}{\sqrt{7x+6}}$ هو :- $\frac{1}{2\sqrt{7x+6}}$

، وتفاضل $\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{2}-1}}$ هو :- $\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{2}-1}}$

وهكذا ؛

(١٦) إذا كانت $y = f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ فأوجد $f'(x)$ بطريقة Δ

الحـــــل :-

$$\because f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{\Delta x}$$

فإذا ما عوضنا عن $\Delta x = 0$ فإن المقام يُصبح مساوياً للصفر وحيث أن الضرب فى المقدار (1) لا يغير من المقدار ، لذلك فإننا نلجأ إلى الضرب فى مقدارى كسرى يساوى الواحد وهو :-

$$\frac{(x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3} \,.\, x^{2/3} + x^{4/3}}{(x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3} \,.\, x^{2/3} + x^{4/3}}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} :$$

$$\frac{\left[(x+\Delta x)^{2/3} - x^{2/3}\right]\left[(x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3} \,.\, x^{2/3} + x^{4/3}\right]}{\Delta x \left[(x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3} \,.\, x^{2/3} + x^{4/3}\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x \left[(x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3} \,.\, x^{2/3} + x^{4/3}\right]}$$

بفك البسط والقسمة على Δx :

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + \Delta x}{(x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3} \,.\, x^{2/3} + x^{4/3}}$$

والآن بالتعويض عن $\Delta x = 0$ نحصل على :-

$$\frac{2x}{x^{4/3} + x^{2/3} \cdot x^{2/3} + x^{4/3}} = \frac{2x}{3x^{4/3}} = \frac{2x^{3/3}}{3x^{3/3} \cdot x^{1/3}} = \frac{2}{3x^{1/3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

(١٧) أوجد مشتقة الدالة $y = \sin x$ باستخدام المبادئ الأولية . " بطريقة Δ "

الحـــــل :-

$\because\ y = \sin x$

$\therefore\ y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$

$\therefore\ \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$

ومن قواعد حساب المثلثات نجد أن قيمة Δy :-

$$= 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) . \sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\therefore\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) . \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) . \sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\cos x + \frac{\Delta x}{2}\right) \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \cos x \times 1 = \cos x$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{d\ f(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

(١٨) أوجد مشتقة الدالة :- $y = \cos x$ باستخدام طريقة Δ

الحـــــل :-

$\because\ y = \cos x$

$\therefore\ y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$

$$\therefore \Delta y = -2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= -\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

وعندما تؤول Δx إلى الصفر فإن المقدار يساوى :-

$$= -\sin x\ .\ 1 = -\sin x$$

$$\therefore y` = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

Exercise "3"

(١) أوجد المعامل التفاضلى للدوال الآتية بالنسبة إلى x :

x^8 , $7x$, $\frac{x}{5}$, $0.007x$, $\frac{1}{3}x^5$, $12x^4$, $\frac{6}{7}x^{14}$, $(5x)^3$, $3a\ x^3$

(٢) فاضل ما يأتى بالنسبة إلى x :- cx^5 , $\frac{ab}{c}x^7$, x^{3b} , $2x^{4a+1}$, $3\pi\ x^2$

(٣) فاضل ما يأتى بالنسبة إلى x :- $5x+2$, $\frac{2}{3}x-7$, $-5x+b$, $ax+bc$

(٤) اكتب الدوال التى تفاضلها ما يلى :-

x , $2x$, x^2 , $\frac{x^2}{4}$, x^7 , x^{4a} , x^n , $\frac{3x^4}{4}$, $3b\ x^2$

(٥) إذا كانت $U=V+at^2$ فاوجد قيمة $\frac{du}{dt}$ باعتبار أن u , a ثوابت

(٦) إذا كانت $S=\frac{1}{2}at^2$ ، a ثابت فاوجد $\frac{ds}{dt}$ عندما $a=30$

(٧) إذا كانت مساحة الدائرة تُعطى بالعلاقة $A=\pi\ r^2$ حيث $r=$ نصف القطر ، $A=$ مساحة الدائرة فاوجد $\frac{dA}{dr}$.

(٨) إذا كان حجم الكرة يُعطى بالعلاقة $V=\frac{4}{3}\pi\ r^3$ ، حيث V الحجم ، $r=$ نصف القطر فاوجد $\frac{dV}{dr}$ عندما تكون r مساوية : $6cm$.

(٩) فاضل بالنسبة إلى x ، كل من الدوال التالية :-

$3\sqrt{x}$, $\frac{2}{x}$, $\frac{3}{\sqrt{x}}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt[4]{3x^3}$

(١٠) فاضل بالنسبة إلى x :- $x^{0.6}$, $7x^{0.15}$, $\frac{8}{x^{0.4}}$, $3x^{-3}$, x^{-n}

(١١) فاضل بالنسبة إلى x :- $3x^{2.5}$, $4x^{-1.3}$, $8x^{0.7}$, $\frac{5}{\sqrt[6]{x^3}}$

(١٢) إذا كانت $U=\frac{30}{V^2}$ فأوجد قيمة $\frac{dU}{dV}$.

(١٣) أوجد ميل المنحنى $y=3x^3$ عند النقطة التى إحداثيها السينى $=1.5$.

(١٤) أوجد ميل المنحنى $y=\frac{x^2}{3}$ عند النقطة التى إحداثيها السينى : $x=2$ وما هى قيمة x التى تجعل هذا الميل مساوياً للصفر .

(١٥) أوجد ميول المنحنى $y=\frac{2}{x}$ عند النقط التى فيها x : $\frac{1}{2}, 1, 2, 10$.

(١٦) أوجد من المبادئ الأولية " باستخدام طريقة Δ " ، المعامل التفاضلى للدالة : $y=\frac{1}{x^2}$.

(١٧) عند أى نقطة على المنحنى $y=x^2$ يكون ميل المنحنى مساوياً 2 .

(١٨) عند أى نقطة على المنحنى $y=x^3$ يكون مماس المنحنى صانعاً زاوية قدرها $45°$ مع محور السينات .

(١٩) عند أى نقطة على المنحنى $y=\sqrt{x}$ يكون الميل مساوياً 2 .

(٢٠) مطلوب رسم مماس للمنحنى $y=0.5\,x^2$ وبحيث يكون موازياً للمستقيم $2x-4y=3$ ، فعند أى نقطة على المنحنى يجب رسمه .

الباب السادس

قواعد التفاضل

٦-١ :- تفاضل المجموع Differentiation of a sun

درسنا فى الأبواب السابقة تفاضل لدوال من حد واحد فيما عدا الدالة :-

$y = mx + b$ وقد علمنا كيفية إيجادها من المبادئ الأولية " طريقة Δ " ، فى هذا الباب سندرس تفاضل دوال عبارة عن مجموع لبضعة دوال " اثنين أو أكثر " فى نفس المتغير x ، مثلاً

وذلك مثل الدالة :- $y = 3x^3 + 2x^2 - 5x$

وفيما يلى طريقة إيجاد تفاضل مثل هذه الدوال .

لنعتبر كل من U , V دالة فى x ولتكن y تُمثل مجموع الدالتين :-

$$Y = U + V$$

وبذلك فإن كل من u , v , y تعتبر دوال فى x ولنفترض أن هنالك تغير فى المتغير المستقل x مقداره Δx ، وينتج عن هذا التغير ، تغير مناظر فى كل من y , u , v وليكن $\Delta y , \Delta u , \Delta v$ على الترتيب

وبذلك تُصبح y عبارة عن $y + \Delta y$

، تُصبح u عبارة عن $u + \Delta u$

، تُصبح v عبارة عن $v + \Delta v$

$$\because y = u + v \text{ ،}$$

$$\therefore y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v)$$

وبالطرح :-

$$\therefore \Delta y = \Delta u + \Delta v$$

وبالقسمة على Δx :

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

وهذا صحيح لجميع قيم Δx ولجميع الزيادات المناظرة $\Delta y , \Delta u , \Delta v$

كما وأن نهايتهم متساوية . وعندما $\Delta x \to 0$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

وواضح أن نفس التحليل السابق ينطبق على مجموع أى عدد من الدوال وبذلك فإن قاعدة تفاضل الدوال المجموعة فى نفس المتغير تكون كالتالى : -

[[المعامل التفاضلى لمجموع عدد من الدوال يساوى مجموع المعامل التفاضلى لهذه الدوال]] .

أمثلة محلولة

مثال (١) : - أجر التفاضل بالنسبة إلى x للدالة :

$$y = 5x^3 + 4x^2 - 8x + 11$$

الحل : -

طبقاً لقاعدة تفاضل المجموع السابقة ،

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 5 \times 3x^2 + 4 \times 2x - 8$$

$$= 15x^2 + 8x - 8$$

مثال (٢) : - أوجد ميل المماس للمنحنى $y = x^2 - 4x + 15$

عند $x = 3$

وما هو الإحداثى السينى للنقطة التى يكون ميل المماس عندها مساوياً للصفر

الحل : -

$$\because y = x^2 - 4x + 15$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 4$$

وعندما $x = 3$ فإن $\frac{dy}{dx} = 2\times 3 - 4 = 2$

فإذا كان الميل مساوياً للصفر ، أى $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore 2x - 4 = 0 \quad \therefore 2x = 4 \quad , \quad x = 2$

أى أن المماس يكون مساوياً للصفر أى موازياً لمحور السينات عندما $x = 2$

مثال (٣) إذا كانت العلاقة بين المسافة S والزمن t لجسم متحرك ، كالتالى : –

$$S = 40t - 8t^2$$

فاوجد $\frac{ds}{dt}$ ، ثم أوجد قيمة t عندما $\frac{ds}{dt} = 8$

الحـــل : –

$\because S = 40t - 8t^2$

$\therefore \frac{ds}{dt} = 40 - 16t$

وعندما $\frac{ds}{dt} = 8$

$\therefore 8 = 40 - 16t$

$\therefore 16t = 40 - 8 = 32$

$\therefore t = 2$

مثال (٤) أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية : –

$a) y = 2x^3 - 5x^2 + 6x$

$b) y = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 7$

$c) y = 3x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 2$

$d) y = x^{\frac{4}{5}} - 3x^{\frac{-3}{4}} + \frac{2}{x} + 2x$

$e) y = x - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$

$f) y = \left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x}\right)$

الحـــل : –

$$a)\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 10x + 6$$

$$b)\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 6x^2 - 10x$$

$$c)\frac{dy}{dx} = 3\times\frac{3}{2}\sqrt{x} = 5\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{9\sqrt{x}}{2} + \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

$$d)\frac{dy}{dx} = \frac{4}{5}x^{\frac{-1}{5}} + \frac{9}{4}x^{\frac{-7}{4}} - \frac{2}{x^2} + 2$$

$$e)\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}$$

$f)$ يتم أولاً فك القوسين ويُصبح المقدار كالتالى :

$$y = 2x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{-1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}}.x^{-1} - 6x^{\frac{-1}{2}} - 9x^{-1}$$

$$= 2x^{\frac{-1}{6}} + 3x^{\frac{-4}{6}} - 6x^{\frac{-3}{6}} - 9x^{-1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\times\frac{-1}{6}x^{\frac{-7}{6}} + 3\times\frac{-4}{6}x^{\frac{-10}{6}} - 6\times\frac{-3}{6}x^{\frac{-9}{6}} - 9\times -1x^{-2}$$

$$= \frac{-1}{3x^{\frac{7}{6}}} - \frac{2}{x^{10/6}} + \frac{3}{x^{9/6}} + \frac{9}{x^2}$$

مثال (٥) : –

إذا كانت $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$

فاوجد : – (أ) : $f^{'}(1)\ ,\ f^{'}(0)\times f^{'}(-1)$

(ب) : **قيم** x **التى تجعل** $f^{'}(x) =$ صفر

الحـــل : –

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x - 9$$

$$،\ f^{'}(1) = 3(1)^2 + 6(1) - 9 = 0$$

$$،\ f^{'}(0) = 3(0)^2 + 6(0) - 9 = -9$$

$$،\ f^{'}(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) - 9 = -12$$

، $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 \quad = 0$

$\therefore x^2 + 2x - 3 \quad = 0$

$\therefore (x+3)(x-1) \quad = 0$

$\therefore x = 1 \quad , \quad x = -3$

هى قيم x التى تجعل $f\ (x) =$ صفر

مثال (٦) إذا كانت : $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

حيث a,b,c **ثوابت**

وكانت $f(1) = 3$ ، $f'(2) = 2$ ، $f'(-1) = 1$

فأوجد قيم a,b,c

الحــــل : -

$\because y = ax^2 + bx + c$

$\therefore y' = 2ax + b$

، $f(1) = 3 = a(1)^2 + b(1) + c$

$\therefore a + b + c = 3$ .... A

، $f'(2) = 2 = 2a(2) + b$

$\therefore 4a + b = 2$ .... B

، $f'(-1) = 2a(-1) + b = 1$

$\therefore -2a + b = 1$ C

بطرح (c) من (b)

$\therefore 6a = 1 \quad , \quad a = \frac{1}{6}$

بالتعويض فى (c)

$\therefore -2 \times \frac{1}{6} + b = 1$

$\therefore b = \frac{4}{3}$

بالتعويض عن قيم c , b فى A

$$\therefore \frac{1}{6}+\frac{4}{3}+c=3$$

$$\therefore c=1.5$$

مثال (٧) : أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال التالية : –

$a)y=5 \ , \ b)y=-3x \ , \ c)y=x^5 \ , \ d)y=\frac{3}{x}$

الحـــل : –

$a) \ \because y=5 \ \therefore \frac{dy}{dx}=Zero$

$b) \ \because y=-3x \ \therefore \frac{dy}{dx}=-3$

$c) \ \because y=x^5 \ \therefore \frac{dy}{dx}=5x^4$

$d) \ \because y=\frac{3}{x} \ \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-3}{x^2}$

مثال (٨) : أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية : –

$a)y=\frac{-7}{x^2} \ , \ b)y=\frac{8}{x^3} \ , \ c)y=a\sqrt{x} \ , \ d)y=a\sqrt[3]{x}$

الحـــل : –

$a) \ \because y=\frac{-7}{x^2}=-7x^{-2} \quad \therefore \frac{dy}{dx}=-7\times-2x^{-3}=\frac{14}{x^3}$

$b) \ \because y=\frac{8}{x^3}=8x^{-3} \quad \therefore \frac{dy}{dx}=8\times-3x^{-4}=\frac{-24}{x^4}$

$c) \ \because y=a\sqrt{x}=a.x^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \frac{dy}{dx}=a.\frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}=\frac{a}{2\sqrt{x}}$

$d) \ \because y=a\sqrt[3]{x} \quad \therefore y=ax^{\frac{1}{3}}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=a.\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}=\frac{a}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{a}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

مثال (٩) : أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال التالية : –

$a) \ y=\frac{-a}{b}\sqrt[5]{x^2} \quad , \quad b) \ y=2x^{-3/4}$

الحـــل : –

$$a)\quad \because y = \frac{-a}{b}\sqrt[5]{x^2} = \frac{-a}{b}x^{\frac{2}{5}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-a}{b}\times\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{-2a}{5b}x^{\frac{-3}{5}}$$

$$= \frac{-2a}{5b}\times\frac{1}{x^{3/5}} = \frac{-2a}{5b}\times\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$$

$$b)\quad \because y = 2x^{\frac{-3}{4}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\times\frac{-3}{4}\times x^{\frac{-3}{4}-1} = \frac{-3}{2}x^{\frac{-7}{4}} = \frac{-3}{2}\times\frac{1}{x^{7/4}} = \frac{-3}{2}\times\frac{1}{\sqrt[4]{x^7}}$$

مثال (١٠) أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية : –

$$a)\quad y = ax^{\frac{1}{5}} \quad , \quad b)\quad y = \frac{a}{\sqrt{x}}$$

الحـــل : –

$$a)\quad \because y = ax^{\frac{1}{5}} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = a\times\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{a}{5}x^{\frac{-4}{5}} = \frac{a}{5}\times\frac{1}{x^{4/5}} = \frac{a}{5}\times\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$$

$$b)\quad \because y = \frac{a}{\sqrt{x}} = \frac{a}{x^{\frac{1}{2}}} = a.x^{\frac{-1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a\times\frac{-1}{2}x^{\frac{-1}{2}-1} = \frac{-a}{2}x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-a}{2}\times\frac{1}{x^{3/2}} = \frac{-a}{2}\times\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

مثال (١١) أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال التالية :–

$$a)\quad y = 9x^{\frac{4}{3}} \quad , \quad b)\quad y = \frac{-5}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$c)\quad y = \frac{10}{\sqrt[5]{x^3}} \quad , \quad d)\quad y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$$

الحـــل : –

$$a)\quad \because y = 9x^{\frac{4}{3}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 9\times\frac{4}{3}\times x^{\frac{4}{3}-1} = 12x^{\frac{1}{3}} = 12\sqrt[3]{x}$$

$$b)\quad \because y = \frac{-5}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-5}{x^{2/3}} = -5\times x^{\frac{-2}{3}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -5\times\frac{-2}{3}x^{\frac{-2}{3}-1} = \frac{10}{3}x^{\frac{-5}{3}} = \frac{10}{3}\times\frac{1}{x^{5/3}} = \frac{10}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

مثال (١٢) : – أوجد المشتقة الأولى للدالة : –

$$y = (x-3)(2x+1)$$

الحـــل : –

نقوم بفك الأقواس فنحصل على حدود مجموعة جبرياً

$$\therefore \quad y = 2x^2 - 5x - 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4x - 5$$

مثال (١٣) أوجد المشتقة الأولى للدالة : –

$$y = 3x^3 - 2x^2 + 3x + 4$$

الحـــل : –

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 3$$

مثال (١٤) أوجد المشتقة الأولى للدالة : –

$$y = x + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

الحـــل : –

$$y = x + 3x^{\frac{-1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 + 3\times\frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}} = 1 + \frac{-3}{2}\times\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = 1 - \frac{3}{2\sqrt{x^3}}$$

مثال (١٥) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = 3x^2 - \frac{3}{x^2} + 1$$

الحــل : -

$$y = 3x^2 - 3x^{-2} + 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x + 6x^{-3} = 6x + \frac{6}{x^3} = 6\left(x + \frac{1}{x^3}\right)$$

مثال (١٦) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = x\left(x^2 - \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^4} + \frac{5}{x^5}\right)$$

الحــل : -

$$y = x^3 - 3x^{-2} + 4x^{-3} + 5x^{-4}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x^{-3} - 12x^{-4} - 20x^{-5}$$

$$= 3x^2 + \frac{6}{x^3} - \frac{12}{x^4} - \frac{20}{x^5}$$

مثال (١٧) أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = \sqrt[4]{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[6]{x^5}$$

الحــل : -

$$y = x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{5}{6}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} - \frac{4}{3}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{10}{3}x^{\frac{-1}{6}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{10}{3\sqrt[6]{x}}$$

مثال (١٨) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = \left(2x^2 + 3x - 1\right)\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x}\right)$$

الحــل : -

نفك الأقواس بحيث تصبح الدالة عبارة عن حدود بمجموعة جبرياً

$$\therefore y = 2x + 3\frac{-1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

$$= 2x + 3 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2 - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{3}{x^4}$$

مثال (١٩) : – أوجد المشتقة الأولى للدالة : –

$$y = \frac{7}{\sqrt{x}} - \frac{5}{\sqrt{x^3}}$$

الحـــل : –

$$y = 7x^{\frac{-1}{2}} - 5x^{\frac{-3}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -7x^{\frac{-3}{2}} + \frac{15}{2}x^{\frac{-5}{2}}$$

$$= \frac{-7}{x^{3/2}} + \frac{15}{2x^{5/2}} = \frac{-7}{\sqrt{x^3}} + \frac{7.5}{\sqrt{x^5}}$$

مثال (٢٠) : – أوجد المشتقة الأولى للدالة : –

$$y = ax^2 + \frac{b}{x} - c$$

الحـــل : –

$$\frac{dy}{dx} = 2ax - \frac{b}{x^2}$$

Exercise 4

فاضل الدوال التالية فى (x) : -

(١) $y=6x^3+5x^2$

(٢) $y=\frac{3}{x}+2x$

(٣) $y=3x^3+x-2$

(٤) $y=8+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}$

(٥) $y=4x^4+3x^2-2x$

(٦) $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x-\frac{3}{5}$

(٧) $y=x\left(3-2x+2x^2\right)$

(٨) $y=6\sqrt{x}+\sqrt{10}$

(٩) $y=5x^2+\frac{2}{3\sqrt{x}}+3$

(١٠) $y=\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x^3}\right)$

(١١) $y=x^4+x^3+x^2+x$

(١٢) $y=\frac{2x^3}{3}+\frac{1}{2}x^2-5\sqrt[3]{x^2}$

(١٣) $y=\frac{7}{x^3}-\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x}-\frac{1}{2}$

(١٤) $y=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$

(١٥) $y=\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}+2x$

أوجد قيمة $\frac{ds}{dt}$ عندما : -

(١٦) $S=ut+\frac{1}{2}at^2$

(١٧) $S=5t+8t^2$

(١٨) $S = 2t^2 - 3t + 8$

(١٩) أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة : - $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(٢٠) فاضل بالنسبة إلى x : - $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

(٢١) فاضل بالنسبة إلى x : - $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

(٢٢) فاضل بالنسبة إلى x : - $(1 + x)^3$

(٢٣) إذا كانت : -

$$y = x^{3n} - nx^3 + 7n$$

فأوجد قيمة $\frac{dy}{dx}$

(٢٤) أوجد قيمة $\frac{dy}{dx}$ عندما :

$$y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \frac{5}{x}$$

(٢٥) أوجد ميل المماس للمنحنى : $y = 2x^2 - 3x + 1$

عندما $x = 1.5$ ، وعند أى قيمة لـ x يكون الميل مساوياً للصفر

(٢٦) أوجد قيمة x التى يكون ميل المماس للمنحنى : $y = 3(x^2 - 6)$ ، مساوياً للصفر

(٢٧) أوجد ميل المماس للمنحنى : $y = x^3 - 4x^2 - 5x + 6$ عند النقط $x = 1,2,3$

(٢٨) أوجد النقط التى عندها يكون ميل المماس مساوياً الصفر للمنحنى : -

$$y = x + \frac{1}{x}$$

٦ – ٢ تفاضل حاصل الضرب Differentiation of Product

قد يكون من السهل أحياناً ايجاد المعامل التفاضلى لحاصل ضرب بعض الكميات مثل : $(x+2)^2$ أو $2x(5x-3)$. وذلك بأن نفك حاصل الضرب ويصبح فى صورة مجموع جبرى ، ثم نفاضل كما سبق وأن علمنا .

فمثلاً : $(x+2)^2$ تُصبح : x^2+4x+4 . وهى فى صورة مجموع وكذلك $2x(5x-3)$ تُصبح : $10x^2-6x$. وهى فى صورة مجموع أيضاً .

إلا أنه يصعب أحياناً تحويل الكميات المضروبة إلى مجموعة من الحدود مجموعة جبرياً . وذلك مثل المقادير التالية : –

$$x^2\times\sqrt{1-3x}\quad,\qquad x\sin x\quad,\quad \frac{x^3}{2}\times\tan x$$

والمعامل التفاضلى فى مثل هذه الحالات لا يكون مساوياً لحاصل ضرب المعامل التفاضلى لكل حد على حدة .

ولإيجاد قاعدة عامة لجميع حالات الضرب نستعرض معاً ما يلى : –

لنعتبر U,V دوال فى x ، y دالة فى U,V

أى أن $Y=U\times V$ وبذلك فإن y تعتبر كدالة فى x

$$\because y=uv \qquad \text{.......... (1)}$$

$$\therefore y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$$

$$\therefore y+\Delta y=uv+u.(\Delta v)+v.(\Delta u)+(\Delta u).(\Delta v) \qquad \text{.......... (2)}$$

وبطرح (1) من (2)

$$\therefore \Delta y=u.(\Delta v)+v.(\Delta u)+(\Delta u).(\Delta v)$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=u.\frac{\Delta v}{\Delta x}+v.\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u.\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

وعندما $\Delta x\to 0$ ، فإن كلاً من $\Delta u,\Delta v,\Delta y$ تقترب كذلك من الصفر

$$\therefore \underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\left(u.\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)+\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\left(v.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)+\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\left(\Delta u.\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

وفى النهايات ، فإنه عندما تقترب Δu من الصفر فإن الحد الأخير : $\Delta u.\frac{\Delta v}{\Delta x}$

يقترب أيضاً من الصفر .

وباستخدام رموز التفاضل :

$$\therefore \frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

أى أن : -

(تفاضل مقدارين مضروبين فى بعضهما ، يساوى المقدار الأول مضروباً فى تفاضل المقدار الثانى + المقدار الثانى مضروباً فى تفاضل المقدار الأول)

وهذه القاعدة تصلح لأكثر من دالتين " مقدارين " فمثلاً إذا كانت : -

$$Y=U.V.W$$

وكانت كل من U,V,W وبالتبعية Y دوال فى x فإن : -

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{du}{dx}\times VW\right)+\left(\frac{dv}{dx}\times UW\right)+\left(\frac{dw}{dx}\times UV\right)$$

أمثـــــلة محلــولة

مثال (١) :-

أوجد مشتقة الدالة

$$y=(3x^2+1)\ (5x+7)$$

الحــــــل :-

بتطبيق القاعدة :-

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(3x^2+1).(5)+(5x+7).(6x)$$
$$=15x^2+5+30x^2+42x$$
$$=45x^2+42x+5$$

مثال (٢) :-

أوجد مشتقة الدالة :-

$$y=(5x^3+2x-1)(3x^2-4)$$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=\left(5x^3+2x-1\right).(6x)+\left(3x^2-4\right).\left(15x^2+2\right)$$
$$=30x^4+12x^2-6x+45x^4+6x^2-60x^2-8$$
$$=75x^4-42x^2-6x-8$$

مثال (٣) :-

فاضل بالنسبة إلى x : $\left(x^2-3x+3\right)\left(2x^2+5\right)$

الحـــــل :- لتكن

$$y=\left(x^2-3x+3\right)\left(2x^2+5\right)$$
$$\therefore\frac{dy}{dx}=\left[\frac{d}{dx}\left(x^2-3x+3\right)\times\left(2x^2+5\right)\right]+\left[\frac{d}{dx}\left(2x^2+5\right)\times\left(x^2-3x+3\right)\right]$$
$$=\left[(2x-3)\left(2x^2+5\right)\right]+\left[(4x)(2x-3)\right]$$

ويمكن اختصار الناتج إذا رغبنا فى ذلك .

مثال (٤) :-

فاضل بالنسبة إلى x : $y=\left(x^2-2\right)(3x-1)\left(x^3+2x^2+1\right)$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=\left[\frac{d}{dx}\left(x^2-2\right).(3x-1).\left(x^3+2x^2+1\right)\right]$$
$$+\left[\frac{d}{dx}(3x-1).\left(x^2-2\right).\left(x^3+2x^2+1\right)\right]$$
$$+\left[\frac{d}{dx}\left(x^3+2x^2+1\right).\left(x^2-2\right).(3x-1)\right]$$
$$=2x(3x-1)\left(x^3+2x^2+1\right)+3\left(x^2-2\right)\left(x^3+2x^2+1\right)+$$
$$+\left(3x^2+4x\right)(2x)(3)$$

ويمكن اختصار النتيجة إذا رغبنا فى ذلك .

مثال (٥) :-

أوجد مشتقة الدالة : $y=\left(x^2+2\right)^3\left(x^3-4\right)^2$

الحـــــل :-

يمكن بالطبع حل هذه المسألة بفك الأقواس بحيث تُصبح y دالة كثيرة الحدود فى x إلا أن هذه عملية طويلة .

وأفضل طريقة لحل هذه المسألة هو مراعاة أنها عبارة عن حاصل ضرب قوسين وبالتـالى يمكن حلها باستخدام النظرية :-

$$\frac{d}{dx}uv = u.\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

واختصاراً تكتب كالتالى :-

$$duv = udv + vdu$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(x^2+2\right)^3 . \frac{d}{dx}\left(x^3-4\right)^2 + \left(x^3-4\right)^2 . \frac{d}{dx}\left(x^2+2\right)^3$$

$$\text{،}\ \frac{d}{dx}\left(x^3-4\right)^2 = 2\left(x^3-4\right)\times\frac{d}{dx}\left(x^3-4\right)$$

$$= 2\left(x^3-4\right)\times\left(3x^2\right) = 6x^2\left(x^3-4\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\text{،}\ \frac{d}{dx}\left(x^2+2\right)^3 = 3\left(x^2+2\right)^2\times\frac{d}{dx}\left(x^2+2\right)$$

$$= 3\left(x^2+2\right)^2\times 2x = 6x\left(x^2+2\right)^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

وبالتعويض بـ (1) ، (2) فى المعادلة $\frac{dy}{dx}$:-

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(x^2+2\right)^3 . \left(6x^2\right) . \left(x^3-4\right) + \left(x^3-4\right)^2 . (6x) . \left(x^2+2\right)^2$$

$$= 6x\left(x^2+2\right)^2\left(x^3-4\right)\left[x\left(x^2+2\right)+\left(x^3-4\right)\right]$$

$$= 6x\left(x^2+2\right)^2\left(x^3-4\right)\left(2x^3+2x-4\right)$$

مثال (٦) :-

إذا كانت $y = \left(x^3-5\right).\sqrt{2x^2+3}$

فاوجد $\frac{dy}{dx}$

الحــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=\left(x^3-5\right).\frac{d}{dx}\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2x^2+3}\ .\frac{d}{dx}\left(x^3-5\right)$$

$$،\frac{d}{dx}\sqrt{2x^2+3}=\frac{d}{dx}\left(2x^2+3\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\left(2x^2+3\right)^{\frac{-1}{2}}.\frac{d}{dx}\left(2x^2+3\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2x^2+3}}\times 4x=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\left(x^3-5\right).\frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}+\sqrt{2x^2+3}\ .\ 3x^2$$

$$=\sqrt{2x^2+3}\ .\ \frac{8x^4+9x^2-10x}{2x^2+3}$$

مثال (٧) :-

إذا كانت : $f(x)=(x+2)^3(3x-1)^{\frac{5}{3}}$

فأوجد $f`(x)$

الحــــل :-

نستخدم قاعدة حاصل الضرب وذلك بوضع :

$$u=(x+2)^3 \qquad , \qquad v=(3x-1)^{\frac{5}{3}}$$

$$\therefore y=u\ .\ v$$

$$,\frac{dy}{dx}=u\ .\ \frac{dv}{dx}+v\ .\ \frac{du}{dx}$$

$$,\frac{du}{dx}=3(x+2)^2\ .(1)$$

$$,\frac{dv}{dx}=\frac{5}{3}(3x-1)^{\frac{2}{3}}\ .\ (3)$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=(x+2)^3\times 5\sqrt[3]{(3x-1)^2}+\sqrt[3]{(3x-1)^5}\ .\ 3(x+2)^2$$

$$=(x+2)^2(3x-1)^{\frac{2}{3}}\ .\ 5[(x+2)+3(3x-1)]$$

$$=(x+2)^2\ .\ (3x-1)^{\frac{2}{3}}\ .\ (14x+7)$$

مثال (٨) :-

أوجد المشتقة الأولى للدالة :- $y=(x+2)(x^2+1)(x-7)$

الحـــل :-

$\because\ y=u\,.\,v\,.\,w$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}.\,v\,.\,w+\frac{dv}{dx}.\,u\,.\,w+\frac{dw}{dx}.\,u\,.\,v$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(1)(x^2+1)(x-7)+(2x)(x+2)(x-7)+(1)(x+2)(x^2+1)$$

$$=x^3-7x^2+x-7+2x^3-14x^2+4x^2-28x+x^3+x+2x^2+2$$

$$=4x^3-15x^2-26x-5$$

مثال (٩) :-

أوجد مشتقة الدالة :- $x=\frac{y}{a}\,.\,\sqrt{3by-y^2}$

الحـــل :-

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y}{a}\,.\,\frac{d}{dy}(3by-y^2)^{\frac{1}{2}}+(3by-y^2)^{\frac{1}{2}}.\frac{d}{dy}\,.\,\frac{y}{a}$$

$$=\frac{y}{a}.\frac{d}{dy}(3by-y^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{(3by-y^2)^{\frac{1}{2}}}{a}$$

ثم نضـع : $V=(3by-y^2)$

$$\therefore \frac{dv}{dy}=(3b-2y)$$

ثم نضـع : $U=(3by-y^2)^{\frac{1}{2}}$ ومنهـا

$$\therefore U = V^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{du}{dv}=\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{v}}=\frac{1}{2\sqrt{3by-y^2}}$$

$$،\ \frac{dx}{dy}=\frac{y}{a}.\frac{du}{dy}+\frac{u}{a}$$

$$\therefore \frac{du}{dy} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{3by - y^2}} \cdot (3b - 2y)$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{y}{a} \cdot \frac{(3b - 2y)}{2\sqrt{3by - y^2}} + \frac{\sqrt{3by - y^2}}{a}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{3by - 2y^2 + 3by - y^2}{a\left(3by - y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{6by - 3y^2}{a\sqrt{3by - y^2}}$$

وهذه الطريقة طويلة ومعقدة ومن الأفضل وضعها فى الصورة :-

$$x = \frac{y}{a}\left(3by - y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ونعتبر :

$$U = \frac{y}{a} \quad , \quad V = \left(3by - y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ثم نستخدم قاعدة حاصل الضرب :

$$X = U \times V$$

$$\therefore \frac{dX}{dY} = U.\frac{d\,V}{dY} + V.\frac{d\,U}{dY}$$

وسنصل لنفس الجواب .

Exercise "5"

فاضل الدوال التالية بقانون حاصل ضرب الدوال " وليس المجموع " .

$(2x+1)(5x+2)$ .... (١)

$(x^2+2)\left(\frac{x}{2}+1\right)$ .... (٢)

$(2x-3)(x^2+3x)$ .... (٣)

$(x^2+2)(3x^2-1)$ .... (٤)

$(x^2-2x)(3x^2-x)$ .... (٥)

$(x^2+x-1)(x+1)$ .... (٦)

$(x^2-x+1)(x-1)$ .... (٧)

$(x^2+3x-2)(x^2-3)$ .... (٨)

$(x^2-2)(x^2+2)$ .... (٩)

$(x^2-x+1)(x^2+x-1)$ .... (١٠)

$(x-5)(x^2+5x+4)$ .... (١١)

$(2x^2-3)(3x^2+2x-1)$ .... (١٢)

$(x+1)(x-1)(x^2-1)$ .... (١٣)

$(x+1)(2x+1)(3x+3)$ .... (١٤)

$(ax^2+bx+c)(ux+5v)$ .... (١٥)

$\sqrt{x}\ (2x+1)(x^2-2x+3)$ .... (١٦)

$2\sqrt[3]{x^2}\ (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)$ .... (١٧)

$\sqrt[3]{x}\ .\ \sqrt[4]{x^3}\ .\ \sqrt[5]{x^2}$ .... (١٨)

$ab\ x^2 \times c\sqrt{x^3}$ .... (١٩)

٦-٣ :- تفـاضل القسمة Differentiation of a quotient

علمنا فيما سبق كيفية إيجاد المعامل التفاضلى للقسمة البسيطة مثل تفاضل $\frac{1}{x}$ وذلك من المبادئ الأولية ، أى بطريقة Δ

إلا أن هذه الطريقة لا تُفيد فى الحالات الأصعب والمعقدة عن هذا المثال البسيط $\left(\frac{1}{x}\right)$

وسنقوم باستنباط قاعدة عامة لتفاضل قسمة دالتين كما يلى :-

نعتبر :
$$y = u \div v$$

$$\therefore y+\Delta y=(u+\Delta u)\div(v+\Delta v)$$

وبالطرح :-
$$\therefore \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}$$

$$=\frac{v(u+\Delta u)-u(v+\Delta v)}{v(v+\Delta v)}$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\,.\,\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\,.\,\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\,(v+\Delta v)}$$

فإذا ما آلت Δx إلى الصفر $(\Delta x \rightarrow 0)$ فإنه وبالتبعية ، تؤول كل من Δu , Δv , Δy للصفر كذلك .

$$\therefore \underset{\Delta x\rightarrow 0}{Lim}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\frac{\underset{\Delta x\rightarrow 0}{Lim}\left(v\,.\,\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)-\underset{\Delta x\rightarrow 0}{Lim}\left(u\,.\,\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{\underset{\Delta x\rightarrow 0}{Lim}\;v(v+\Delta v)}$$

وذلك من قواعد النهايات

وبذلك تؤول نهايات البسط إلى :-

$$v\,\frac{du}{dx}-u\,\frac{dv}{dx}$$

وتكون نهاية المقام v^2 حيث أن : $\Delta v \rightarrow 0$ أيضاً .

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{v\,\frac{du}{dx}-u\,\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

أى أن تفاضل قسمة دالتين :-

$$\left[\frac{\text{المقام} \times \text{تفاضل البسط} - \text{البسط} \times \text{تفاضل المقام}}{\text{مربع المقام}}\right]$$

أمثلـــــة محلولة :-

مثال (١) :-

فاضل بالنسبة إلى x : $\left(\frac{2x}{2x-1}\right)$

وذلك باستخدام قاعدة تفاضل قسمة دالتين السابقة :-

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v\,.\,\frac{du}{dx}-u\,.\,\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

حيث $u=2x$, $v=(2x-1)$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{[(2x-1)\,.\,(2)-(2x)\,.\,(2)]}{(2x-1)^2}$$

$$=\frac{4x-2-4x}{(2x-1)^2}=\frac{-2}{(2x-1)^2}$$

مثال (٢) :-

فاضل بالنسبة إلى x : $y=\frac{(x^3+1)}{(x^3-1)}$

باستخدام القاعدة السابقة

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^3-1)\times(3x^2)-(x^3+1)\times(3x^2)}{(x^3-1)^2}$$

$$=\frac{3x^5-3x^2-3x^5+3x^2}{(x^3-1)^2}=\frac{-6x^5}{(x^3-1)^2}$$

مثال (٣) :-

أوجد المشتقة الأولى للدالة : $y=\frac{x^2+2}{x^2-2} \quad , \quad x^2 \neq 2$

الحـــــل :-

$$\because y=\frac{u}{v} \quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{v \cdot \frac{du}{dx}-u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{(x^2-2)(2x)-(x^2+2)(2x)}{(x^2-2)^2}$$

$$=\frac{2x^3-4x-2x^3-4x}{(x^2-2)^2}=\frac{-8x}{(x^2-2)^2}$$

مثال (٤) :-

أوجد المعامل التفاضلي الأول بالنسبة إلى x للدالة : $y=\frac{x}{x+1}$

الحـــــل :-

$$\because y=\frac{x}{x+1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{[(1+x)\times 1]-[(x)\times 1]}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

مثال (٥) :-

أوجد المشتقة الأولى للدالة : $y=\frac{x^2}{\sqrt{x}}$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=\frac{[\sqrt{x} \cdot (2x)]-\left[(x^2)\cdot\left(\frac{-1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\right]}{x}$$

$$=2\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}=2.5\sqrt{x}$$

مثال (٦) :-

أوجد المشتقة الأولى للدالة : $y=\frac{4x^3-7x^2-2}{3x+5}$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=\frac{[(3x+5)(12x^2-14x)]-[(4x^3-7x^2-2)(3)]}{(3x+5)^2}$$

$$=\frac{36x^3-42x^2+60x^2-70x-12x^3+21x^2+6}{(3x+5)^2}$$

$$=\frac{24x^3+39x^2-70x+6}{(3x+5)^2}$$

مثال (٧) :-

أوجد المشتقة الأولى للدالة : $y=\frac{1}{x^5}$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^5\times 0)-(1)\times(5x^4)}{(x^5)^2}$$

$$=\frac{0-5x^4}{x^{10}}=\frac{-5}{x^6}$$

مثال (٨) :-

أوجد تفاضل الدالة : $f(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$

الحـــــل :-

$$f(t)=\frac{t}{(t^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

وباستخدام قاعدة القسمة :-

$$\therefore f'(t)=\frac{(t^2-1)^{\frac{1}{2}}.(1)-(t)\times\left[\frac{1}{2}(t^2-1)^{\frac{-1}{2}}\times 2t\right]}{(t^2-1)}$$

ويمكن اختصار هذا الكسر بعدة طرق إلا أن أسهل طريقة هى بضرب كل من البسط والمقام فى $(t^2-1)^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore f`(t)=\frac{(t^2-1)-t^2\,(t^2-1)^0}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-1}{(t^2-1)^{3/2}}$$

حيث : $(t^2-1)^0=0$

مثال (٩) :-

أوجد مشتقة الدالة : $y=\dfrac{x\,(x-1)}{x^2+3x-2}$

الحـــــل :-

$$y=\frac{x^2-x}{x^2+3x-2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+3x-2)(2x-1)-(x^2-x)(2x+3)}{(x^2+3x-2)^2}$$

$$=\frac{2x^3+6x^2-4x-x^2-3x+2-2x^3-3x^2+2x^2+3x}{(x^2+3x-2)^2}$$

$$=\frac{4x^2-4x+2}{(x^2+3x-2)^2}$$

مثال (١٠) :- أوجد مشتقة الدالة :-

$$y=\frac{(x^2+2)\sqrt{x^2-2}}{2x+3}$$

الحـــــل :- باستخدام قاعدة القسمة :-

$$y`=\frac{(2x+3)\left[(x^2+2)\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-2}}\right)+\left(\sqrt{x^2-2}\right)(2x)\right]}{(2x+3)^2}-\frac{(x^2+2)(\sqrt{x^2-2}).(2)}{(2x+3)^2}=$$

$$=\frac{(2x+3)[x^3+2x+2x^3-4x]}{(2x+3)^2.\sqrt{x^2-2}}-\frac{(x^2+2)(x^2-2)}{(2x+3)^2.\sqrt{x^2-2}}=$$

$$=\frac{(2x+3)(3x^3-2x)}{(2x+3)^2\sqrt{x^2-2}}-\frac{(x^2+2)(x^2-2)}{(2x+3)^2.\sqrt{x^2-2}}=$$

$$=\frac{6x^4-4x^2+9x^3-6x-x^4+2x^2-2x^2+4}{(2x+3)^2.\sqrt{x^2-2}}=$$

$$=\frac{5x^4+9x^3-4x^2-6x+4}{(2x+3)^2\sqrt{x^2-2}}$$

مثال (١١) أوجد تفاضل الدالة : – $y=\left(\frac{3x+2}{2x-1}\right)^4$

الحـــــل :-

$$y' =4\left(\frac{3x+2}{2x-1}\right)^3\left[\frac{(2x-1).(3)-(3x+2)(2)}{(2x-1)^2}\right]$$

$$=4\left(\frac{3x+2}{2x-1}\right)^2\frac{6x-3-6x-4}{(2x-1)^3}$$

$$=\frac{4(3x+2)^3}{(2x-1)^5}\times(-7)\quad,\quad=\frac{-28(3x+2)^3}{(2x-1)^5}$$

مثال (١٢) : – أوجد تفاضل الدالة : –

$$y=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

الحـــــل :-

نضع الدالة فى أبسط صورة لها بالضرب فى المرافق : –

$$\therefore y=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}=\frac{(x+2)-2\sqrt{x}\sqrt{x+2}+x}{(x+2)-x}$$

$$=\frac{2x+2-2\sqrt{x^2+2x}}{2}=x+1-\sqrt{x^2+2x}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=1+0-\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}}\times(2x+2)=1-\frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x}}$$

مثال (١٣) : – أوجد تفاضل الدالة : – $y=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

الحـــــل :-

$$y=\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{-1}{2}}\times\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$$

$$\text{،}\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)=\frac{(x^2-1)(2x)-(x^2+1)(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}}\times\frac{-4x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\times(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال : - (١٤) : - أوجد تفاضل الدالة : -

$$y=\sqrt{2-\frac{2}{x^2+2}}$$

الحـــــل :-

نضع $V=x^2+2$

، نضع $U=2-\frac{2}{x^2+2}$

$$\therefore V=x^2+2$$

$$,\ U=2-\frac{2}{V}$$

$$\therefore Y=\sqrt{u}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{u}}\times\frac{+2}{v^2}\times 2x$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2-\frac{2}{x^2+2}}}\times\frac{2}{\left(x^2+2\right)^2}\times 2x=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{2x^2+4-2}{x^2+2}}}\times\frac{2x}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2x^2+2}}\times\frac{2x}{\left(x^2+2\right)^2}=$$

$$=\frac{2x}{\left(2x^2+2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+2\right)^{3/2}}$$

Exercise "6"

فاضل الدوال التالية فى x : -

(١) $\frac{2}{(3x-1)}$

(٢) $\frac{1}{\left(1-2x^2\right)}$

(٣) $\frac{x}{(x-4)}$

(٤) $\frac{(x-1)}{(x+2)}$

(٥) $\frac{(3x-1)}{(2x+3)}$

(٦) $\frac{(x+b)}{(x-b)}$

(٧) $\frac{(x-b)}{(x+b)}$

(٨) $\frac{x^2}{(x-3)}$

(٩) $\frac{x^2}{\left(x^2-3\right)}$

(١٠) $\frac{\sqrt{x}}{(x-1)}$

(١١) $\frac{(x-1)}{\sqrt{x}}$

(١٢) $\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)}$

(١٣) $\frac{\left(x^{3}-1\right)}{\left(x^{3}+1\right)}$

(١٤) $\frac{\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)}$

(١٥) $\frac{\left(2x^2-x+1\right)}{\left(3x^2+x-1\right)}$

(١٦) $\frac{\left(1+x+x^2\right)}{x}$

(١٧) $\frac{3x^2}{\left(b^2-x^2\right)}$

(١٨) $\frac{(3x-2)}{(2-3x)}$

(١٩) $\frac{x(x-1)}{(x+2)}$

(٢٠) $\frac{x^{\frac{1}{2}}+2}{x^{3/2}}$

٦ – ٤ : – تفاضل دالة الدالة : – Function of a Function

لكى نتفهم معنى دالة الدالة ، سنعتبر الدالـة المثلثيـة $\sin^2 x$ أى $(\sin x)^2$ وهـذه الدالـة وهى مربع الدالة $\sin x$ أى دالة فى $\sin x$ بالضبط تماماً مثل x^2 دالـة فـى x ، الدالـة v^2 دالة فى v إلا أن $\sin x$ هى نفسها دالة فى x .

وبذلك فإن $\sin^2 x$ دالة فى $\sin x$ ، $\sin x$ نفسها دالة فى x ومنها $\sin^2 x$ دالة فـى دالة x .

وبالمثل فإن $\sqrt{x^2+3x}$ دالـة فـى x مثلمـا $\sqrt{x}$ دالـة فـى x كمـا وأن x^2+3x هـى نفسها دالة فى x .

وقد رأينا أن $\sin^2 x$ دالة فى دالة x إلا أن الأمر يختلف فى حالة $\sin^2 \sqrt{x}$.

حيث أن $\sin^2 \sqrt{x}$ دالة فى $\sin \sqrt{x}$ وهى بدورها دالة فى $\sqrt{x}$ ، $\sqrt{x}$ دالة فى x .

أى أن $\sin^2 \sqrt{x}$: (دالة فى دالة دالة x) .

كما وأن $\sin^2 \sqrt{3x}$ دالة فى $\sin \sqrt{3x}$ وهى دالة فى $\sqrt{3x}$ ، $\sqrt{3x}$ دالة فـى $3x$ ، $3x$ دالة فى x .

أى أن $\sin^2 \sqrt{3x}$ (دالة فى دالة دالة دالة x) .

وسوف نكتفى بضرب هذه الأمثلة عن الـدوال المثلثيـة حيـث سنوردها فيمـا يلـى مـن مواضيع .

إلا أنه للوصول إلى قاعدة عامة لتفاضل دالة الدالة ، فسوف نعتبر الدالة $(x^2-3)^5$

ولنعتبر
$$u=(x^2-3)$$
$$\therefore y=u^5$$
$$,\frac{dy}{du}=5u^4$$

إلا أن المطلوب هو $\frac{dy}{dx}$ ولذلك فإننا نلجأ للطريقة التالية : –

سنعتبر أن x تزداد بمقدار ضئيل للغايه ويساوى Δx

، سنعتبر أن u تزداد بمقدار مناظر ضئيل للغايه ويساوى Δu

، سنعتبر أن y تزداد بمقدار مناظر ضئيل للغايه ويساوى Δy

وبذلك فإن : -

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

فإذا أصبحت $\Delta x \to 0$ فإن كلاً من Δy , Δu ستؤول للصفر كذلك

وبذلك فإن كل من المقادير التالية ستقترب من نهاية محددة وهى : -

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},\frac{\Delta y}{\Delta u},\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

وفى مثالنا السابق $y=u^5$

$$\therefore \frac{dy}{du}=5u^4 \quad , \quad \because u=\left(x^2-3\right) \quad \therefore \frac{du}{dx}=2x$$

وحيث أن :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=5u^4\times 2x = 10x\left(x^2-3\right)^4$$

أمثلة محلولة : -

مثال (١) : - فاضل المقدار : $y=\sqrt{2-x^2}$

الحـــــل :-

$$y=\left(2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ونعتبر $u=\left(2-x^2\right)$

$$\therefore \frac{du}{dx}=-2x$$

وحيث أن $u=\left(2-x^2\right)$:

$$\therefore y = u^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{2-x^2}}$$

$$\because \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2-x^2}} \times -2x = \frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}$$

مثال (٢) : – أوجد مشتقة الدالة :

$$y = \left(2x^3 - 3x^2 + 1\right)^6$$

الحـــــل :-

نضع $u = \left(2x^3 - 3x^2 + 1\right)$

$$\therefore y = u^6 \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\because u = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 6x^2 - 6x$$

$$\because y = u^5 \qquad \therefore \frac{dy}{du} = 5u^4 = 5\left(2x^3 - 3x^2 + 1\right)^4$$

$$\because \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad = 5\left(2x^3 - 3x^2 + 1\right)^4 \left(6x^2 - 6x\right)$$

$$= 30x\left(2x^3 - 3x^2 + 1\right)^4 (x - 1)$$

مثال (٣) أوجد مشتقة الدالة : –

$$y = \left(x^2 + 2\right)^3$$

الحـــــل :-

يمكن حل المسألة بطريقتين ، الطريقة الأولى بفك القوس ذو القوة 3

$$\therefore y = x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x^5 + 24x^3 + 24x$$

والطريقة الثانية هى طريقة دالة الدالة :

نضع $u=(x^2+2)$.

$$\therefore y = u^3 \quad ، \quad \therefore \frac{dy}{du}=3u^2$$

$$,\because u = (x^2+2) \; \therefore \frac{du}{dx}=2x$$

$$،\because \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(3u^2)\times(2x) \quad =6x(u^2)=6x(x^2+2)^2=6x(x^4+4x^2+4)$$

$$=6x^5+24x^3+24x$$

وهى بالطبع نفس الإجابه السابق الحصول عليها بالطريقة الأولى

مثال (٤) : – أوجد $\leftarrow \frac{dx}{dy}$ **للدالة : –**

$$y=\sqrt{\left(\frac{3}{x}-2\right)}$$

الحـــــل :–

نضع $u=\frac{3}{x}-2$ ومنها : $\frac{du}{dx}=\frac{-3}{x^2}$

$$\therefore y = u^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \frac{dy}{du}=\frac{1}{2}u^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{3-2x}{x}}}$$

$$،\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\frac{3-2x}{x}}}\times\frac{-3}{x^2}=\frac{-3}{2x^2}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3-2x}}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=\frac{-2x^2\sqrt{3-2x}}{3\sqrt{x}}$$

وهى عبارة عن مقلوب $\frac{dy}{dx}$.

ويمكن الحل بالطريقة التالية : –

$$\because y=\sqrt{\frac{3}{x}-2} \qquad \therefore y^2=\frac{3}{x}-2$$

$$\therefore \frac{3}{x}=y^2+2 \qquad \therefore x=\frac{3}{y^2+2}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=\frac{(y^2+2)(0)-3(2y)}{(y^2+2)^2}=\frac{-6y}{(y^2+2)^2}=\frac{-6\left(\frac{3}{x}-2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(\frac{3}{x}-2\right)+2\right]^2}=\frac{-6\left(\frac{3}{x}-2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{3}{x}\right)^2}$$

$$=\frac{-6x^2}{9}\left(\frac{3-2x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{-2x^2}{3}\times\frac{\sqrt{3-2x}}{\sqrt{x}}$$

مثال (٥) : – إذا كانت $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ **فأوجد** y_2 ، y_3

الحـــــل :–

وهى تعنى التفاضل للتفاضل أو التفاضل الثانى $y_2=y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$

وهى تعنى التفاضل الثالث . ، $y_3=y'''=\dfrac{d^3y}{dx^3}$

وباستخدام قاعدة القسمة : –

$$y_1=\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+1)(1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$، y_2=\frac{(x^2+1)^2(-2x)-(1-x^2)\times 2(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}=\frac{(2x^3-6x)}{(1+x^2)^3}$$

$$، y_3=\frac{(1+x^2)^3(6x^2-6)-(2x^3-6x)\times 3(1+x^2)^2(2x)}{(1+x^2)^6}=\frac{-6x^4+36x^2-6}{(x^2+1)^4}$$

مثال (٦) : – أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ **للدالة : –** $y=(3x^2+5x)^3$

الحـــل :-

نضع $u=\left(3x^2+5x\right)$

$$\therefore \frac{du}{dx}=6x+5$$

$$، y=u^3 \qquad \therefore \frac{dy}{du}=3u^2=3\left(3x^2+5x\right)^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=3\left(3x^2+5x\right)^2\,(6x+5)$$

ويمكن التفاضل مباشرة كالتالى : -

$$\because y=\left(3x^2+5x\right)^3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=3\left(3x^2+5x\right)^{3-1}-\frac{d}{dx}\left(3x^2+5x\right)=3\left(3x^2+5x\right)^2\times(6x+5)$$

مثال (٧) : - أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة : -

$$y=\left(4x^2+5x-1\right)^4+\left(3x^3+2x-3\right)^6$$

الحـــل :-

بطريقة دالة الدالة : نضع $y=u^4+v^6$

حيث $u=\left(4x^2+5x-1\right)$،

$$\therefore \frac{du}{dx}=(8x+5)$$

$v=\left(3x^3+2x-3\right)$،

$$\therefore \frac{dv}{dx}=\left(9x^2+2\right)$$

$$، \frac{dy}{du}=4u^3 \quad , \quad \frac{dy}{dv}=6v^5$$

$$، \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=4u^3\,.\,(8x+5)+6v^5\,.\,\left(9x^2+2\right)$$

$$=4\left(4x^2+5x-1\right)^3\ (8x+5)+6\left(3x^3+2x-3\right)^5\left(9x^2+2\right)$$

مثال (٨) : - أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=(x+1)^3$

الحـــــل :-

بالطريقة المباشرة ، نفك القوس :

$$\therefore y=x^3+3x^2+3x+1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=3x^2+6x+3$$

وبطريقة دالة الدالة : -

نضع $y=u^3$ حيث $u=x+1$

$$\therefore \frac{dy}{du}=3u^2 \quad , \quad \frac{du}{dx}=1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=3u^2\ .\ 1=3(x+1)^2$$

مثال (٩) : - أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة : $y=\frac{1}{\sqrt{3x^5-2x^3}}$

الحـــــل :-

نضع $u=3x^5-2x^3$

$$\therefore y=\frac{1}{\sqrt{u}} \quad , \quad \frac{dy}{du}=\frac{-1}{2\ u^{3/2}}=\frac{-1}{2\sqrt{\left(3x^5-2x^3\right)^3}}$$

$$,\ \frac{dy}{dx}=15x^4-6x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{-1}{2\sqrt{\left(3x^5-2x^3\right)^3}}\times\left(15x^4-6x^2\right)$$

مثال (١٠) أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y=\left(x^2-2x+3\right)^3$$

الحـــــل :-

نضع $u=\left(x^2-2x+3\right)$

$$\therefore \frac{du}{dx} = (2x-2) = 2(x-1)$$

$$\text{،} y = u^3 \therefore \frac{dy}{du} = 3u^2 \qquad = 3\left(x^2 - 2x + 3\right)^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 3\left(x^2 - 2x + 3\right)^2 \cdot 2(x-1)$$

$$= 6(x-1)\left(x^2 - 2x + 3\right)^2$$

وبمزيد من التدريب فإن الطالب يمكنه إجراء عملية التفاضل بسهولة وبدون الحاجة إلى فرض قيمة U

والمثال السابق يعتبر نموذج للطالب لكى يبدأ فى إجراء التفاضل بدون اللجوء لفرض قيمة لـ U

إلا أننا يمكن مما سبق أن نستنتج التالى : -

[تفاضل أى مقدار جبرى مرفوع لأس = الأس مضروباً فى المقدار الجبرى مرفوعاً (للأس -١) ومضروباً فى تفاضل المقدار الجبرى] .

وبذلك فإن المثال السابق يمكن حله مباشرة كالتالى :

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(x^2 - 2x + 3\right)^2 \times (2x-2)$$

$$= 6(x-1)\left(x^2 - 2x + 3\right)^2$$

مثال (١١) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = \left(3x^2 - 2x + 5\right)^{3/2}$$

الحـــــل :- يمكن الحل بدون فرض قيمة U ويكون الحل كالتالى : -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\left(3x^2 - 2x + 5\right)^{\frac{3}{2}} \times d.c.of\left(3x^2 - 2x + 5\right)$$

، $d.c.$ هى اختصار لكلمة المعامل التفاضلى : - differential coefficient

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\left(3x^2 - 2x + 5\right)^{\frac{1}{2}} \times (6x-2)$$

$$=3(3x-1)\left(3x^2-2x+5\right)^{\frac{1}{2}}$$

مثال (١٢) : – أوجد المشتقة الأولى للدالة : –

$$y=\left(x^2+2\right)\times\sqrt[3]{\left(x^2-3\right)}$$

الحـــــل :– واضح أن y عبارة عن حاصل ضرب مقدارين أو دالتين لذلـك سـنلجأ للقاعدة

$$\therefore \frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\left(x^2+2\right)\times\left(d.c.of\sqrt[3]{\left(x^2-3\right)}\right)+$$

$$+\left(\sqrt[3]{\left(x^2-3\right)}\right)\times\left[d\ .\ c\ .of\left(x^2+2\right)\right] \qquad \dots\dots\dots\dots (1)$$

ونعلم مما سبق أن $\sqrt[3]{x^2-3}$ هو دالة فى $\left(x^2-3\right)$

، $\left(x^2-3\right)$ دالة فى x أى أن $\sqrt[3]{x^2-3}$ هو دالة الدالة .

ومن الأفضل هنا إجراء تفاضلها منفصلاً ثم التعويض عنها بعد ذلك .

$$\because \frac{d}{dx}\sqrt{\left(x^2-3\right)}=\frac{d}{dx}\left(x^2-3\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\left(x^2-3\right)^{\frac{-2}{3}}\times(2x)=\frac{2x}{3\left(x^2-3\right)^{\frac{2}{3}}}$$

وبالتعويض فى (1) عن هذه القيمة : –

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\left(x^2+2\right)\times\frac{2x}{3\left(x^2-3\right)^{\frac{3}{2}}}+\left(x^2-3\right)^{\frac{1}{3}}\times 2x$$

$$=\frac{2x\left(x^2+2\right)}{3\sqrt[3]{\left(x^2-3\right)^2}}+2x\sqrt[3]{\left(x^2-3\right)}$$

ويمكن اختصار هذه النتيجة لتصبح :–

$$\frac{2x\left(x^2+2\right)\left(x^2-3\right)^{\frac{1}{3}}}{3\left(x^2-3\right)}+\frac{2x\left(x^2-3\right)^{\frac{4}{3}}}{\left(x^2-3\right)}\times\frac{3}{3}$$

$$= \frac{2x(x^2-3)^{\frac{1}{3}}\left[x^2+2+3(x^2-3)\right]}{3(x^2-3)} = \frac{2x\sqrt{(x^2-3)}(4x^2-7)}{3(x^2-3)}$$

مثال (١٣) :-

أوجد المشتقة الأولى لهذه الدالة : $y = \frac{\sqrt{1+3x}}{4x}$

الحـــــل :-

هذا المقدار على صورة دالة كسرية $\left(\frac{u}{v}\right)$ حيث :-

$u = 1+3x \qquad , \qquad v = 4x$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\ .\ \frac{du}{dx} - u\ .\ \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4x[d\ .\ c\ of\,(1+3x)] - [(1+3x)\times d\ .\ c\ oF(4x)]}{(4x)^2}$$

وقد عرفنا أن $\sqrt{1+3x}$ هو دالة فى الدالة

$$\therefore \frac{d}{dx}(1+3x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1+3x)^{-\frac{1}{2}} \times 3 = \frac{3}{2\sqrt{1+3x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\left[4x\times\frac{3}{2\sqrt{1+3x}}\right] - \left[\sqrt{1+3x}\times 4\right]}{16x^2} = \frac{\frac{6x}{\sqrt{1+3x}} - 4\sqrt{1+3x}}{16x^2}$$

$$= \frac{6x-4(1+3x)}{16x^2\ \sqrt{1+3x}} = \frac{-6x-4}{16x^2\ \sqrt{1+3x}} = -\frac{2+3x}{8x^2\ \sqrt{1+3x}}$$

٦-٥ :- تفاضل الدالة الضمنية :-

Differentiation of implicit functions

علمنا من تعريف الدوال أن الدالة الضمنية هى الدالة التى تتضمن حدودها كل من x , y ولا يمكن فصل أى منهما عن الآخر

أى أنه لا يمكن وضع الحدود المشتملة على y فى طرف والحدود المحتوية على x فى الطرف الآخر .

ومثال ذلك ، الدوال التالية :-

$$x^3 - 3x^2y + 5y^3 - 7 = 0$$

$$x \; Log \; y + y^2 = 4xy \text{،}$$

وفى هذه الحالة فإنه يلزم أن نفاضل حداً بعد حد فى جميع حدود المعادلة على أن لا ننسى أنه عند التفاضل بالنسبة إلى y ، أنها ذاتها (أى y) دالة الدالة فى x

مثال (١) :-

أوجد $\frac{dy}{dx}$ من المعادلة التالية : $x^2 - y^2 + 3x = 5y$

الحـــــل :-

بالتفاضل :-

$$\therefore 2x - 2y\frac{dy}{dx} + 3 = 5\frac{dy}{dx}$$

وبتجميع الحدود المشتملة على $\frac{dy}{dx}$

$$\therefore 2y\frac{dy}{dx} + 5\frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}(2y + 5) = 2x + 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x+3}{2y+5}$$

وواضح أن $\frac{dy}{dx}$ بدلالة كل من x , y وبمعرفة قيم x , y فإن القيمة العددية للمقدار $\frac{dy}{dx}$ ، يمكن حسابها :-

والمثال التالى يوضح ذلك :-

مثال (٢) :-

أوجد ميل المماس للمنحنى : $x^2+3xy+y^2=6$ عند النقطة $(3\,,-3)$

الحـــــل :-

نقوم بإجراء التفاضل كما بالمثال السابق ويجب أن لا نغفل عن أن xy عبارة عن حاصل ضرب

وبالتفاضل :

$$\therefore 2x+\left(3y+3x\frac{dy}{dx}\right)+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\ (3x+2y)=-(2x+3y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-(2x+3y)}{(3x+2y)}$$

وعند النقطة $(3\,,-3)$ أى عندما $x=3 \quad , \quad y=-3$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-(2\times 3+3\times -3)}{(3\times 3+2\times -3)}=\frac{-(-3)}{(3)}=1$$

$\therefore$ ميل المماس للمنحنى =١ وهو يصنع زاوية 45° مع الإتجاه الموجب لمحور السينات $(X-axis)$

Exercise "7"

احسب التفاضلات التالية :-

$(3x+2)^2$, $(1-3x)^4$, $(2x+5)^{\frac{1}{2}}$ .... (١)

$\frac{1}{(1-3x)}$, $(2-3x)^2$, $\sqrt{1-2x}$ .... (٢)

$\left(x^2-3\right)^5$, $\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{2x^2-5}$ .... (٣)

$\frac{1}{\left(1-3x^2\right)}$, $\sqrt{1-3x^2}$, $x\sqrt{1-2x^2}$ .... (٤)

$\frac{1}{(4-x)}$, $\frac{1}{\sqrt{(4-x)}}$, $\frac{1}{(4-x)^2}$ .... (٥)

$\frac{1}{\left(x^2-1\right)}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .... (٦)

$\frac{1}{\sqrt{\left(1-x^2\right)}}$, $\sqrt{\frac{x}{(1-x)}}$, $\sqrt{\frac{(1-x)}{(1+x)}}$ .... (٧)

$x\times\sqrt{\frac{(1-x)}{(1+x)}}$, $\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)}$ .... (٨)

$\sqrt{c^2+x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{c^2+x^2}}$ .... (٩)

$\sqrt{1-x+2x^2}$, $\left(1-3x^2\right)^n$ .... (١٠)

$\frac{x^2}{\sqrt{c^2-x^2}}$, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$ .... (١١)

$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\frac{\sqrt{1+4x}}{x}$ .... (١٢)

$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)}}{2x}$ .... (١٣)

$x^2\times\sqrt{2-x}$, $\frac{1}{\sqrt{3x^2-5x+2}}$ .... (١٤)

(١٥) .... $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}$, $x\sqrt{(3x+2)}$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ من المعادلات الضمنية التالية :-

(١٦) .... $2x^2+5xy+7y^2=7$

(١٧) .... $\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2-y^2\right)=0$

(١٨) .... $x^3+y^3=3xy$

(١٩) .... $x^n+y^n=a^n$

(٢٠) أوجد الميل عند النقطة $(1\ ,1)$ الذى يصنعه مماس المنحنى

$x^2+y^2-3x+4y-3=0$

٦-٦ :- التفاضل المتتالى : Successive differentiation

اتضح لنا مما سبق أن العامل التفاضلى لدالة ما فى x عبارة عن دالة فى x كذلك ما لم تكن الدالة الأصلية دالة خطية من الدرجة الأولى فمثلا لو أن :

$$y=5x^4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=20x^3$$

وواضح أن $20x^3$ هى دالة فى x كذلك والأخيرة يمكن تفاضلها بالنسبة إلى x

$$\frac{d}{dx}\left(20x^3\right)=60x^2$$ ،

ويُطلق على $60x^2$ لهذه الدالة $\left(y=5x^4\right)$ بالمعامل التفاضلى الثـانى أو المشـتقة الثانيـة للدالة الأصلية، ويعبر عنها كالتالى : -

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$$

ويستخدم الرمز $\frac{d^2y}{dx^2}$ للتعبير عن المعامل التفاضلى الثانى ويجب مراعاة أن (2) فـى الرمز $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ، فى كل من البسط والمقام ليستا أُساً ولكنها تعنى أن الدالة الأصليـة y قد تم تفاضلها مرتين وفى كل مرة منهما ، بالنسبة إلى x

وبذلك فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ تقيس المعدل الذى تتغير به $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة إلى x ، تماماً مثلمـا تُعبر $\frac{dy}{dx}$ عن معدل تغير y بالنسبة إلى x

والمعامل التفاضلى الثانى ، هو دالة فى x ، إذا لم تكن $\frac{dy}{dx}$ دالة خطية أو ثابت

كما أنه يمكننا أن نفاضل $\frac{d^2y}{dx^2}$ بالنسبة إلى x ويُعرف الناتج بالمعامل التفـاضلى الثـالث لـ y بالنسبة إلى x ويرمز لها بالرمز $\frac{d^3y}{dx^3}$. وبذلك فإنه يمكننا الإستمرار فى عمليات تفاضل متتالية إلى أن يُصبح أحد معاملات التفاضل ، رقماً ثابتاً

وبذلك فإنه فى مثالنا السابق :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=60x^2 \quad , \quad \frac{d^3y}{dx^3}=120x \; , \quad \frac{d^4y}{dx^4}=120$$

أى أنه لا يمكننا إيجاد أكثر من المعامل التفاضلى الرابع للمثال المذكور .

فإذا اعتبرنا أن $y=x^n$

فإنه بالتفاضل المتتالى بالنسبة إلى x نحصل على :-

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$$

$$،\frac{d^2y}{dx^2}=n(n-1)x^{n-2}$$

$$،\frac{d^3y}{dx^3}=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

فإذا كانت n عدد صحيح موجب فإن هذه العمليـة يُمكـن أن تسـتمر حتـى نصـل إلى $(n-n)$ ، مساوية لقوة x

ويصبح المعامل التفاضلى $n(n-1)(n-2)....3.2.1$

أى يُصبح عبارة عن مضروب n " Factorial n " أو $\underline{n|}$ " ويكون التفاضل التـالى هـو الصفر .

أما إذا كانت n عدداً ليس صحيحاً موجباً فإن العملية يمكنها أن تستمر بدون نهاية .

ويتضح ذلك من المثال التالى : -

$$y=x^3-5x^2+2x-4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=3x^2-10x+2$$

$$, \frac{d^2y}{dx^2}=6x-10$$

$$, \frac{d^3y}{dx^3}=6$$

$$, \frac{d^4y}{dx^4}=0$$

٦ – ٧ : – الرموز البديلة للمعاملات التفاضلية

Alternative notation For differential Coefficients

يُطلق كذلك على المعاملات التفاضلية المتتالية بالمشتقات أو بالدوال المشتقة للدالة الأصلية

ويمكن التعبير بالرموز التالية : –

(١) عند استخدام رمز الدالة : $f(x)$ or $\Phi(x)$ ، فإذا كانت $f(x)$ أو $\Phi(x)$ ترمز لدالة فى x

ترمز للمعامل التفاضلى الأول $\therefore f`(x)$ $or$ $\Phi`(x)$

ترمز للمعامل التفاضلى الثانى ، $f``(x)$ $or$ $\Phi``(x)$

ترمز للمعامل التفاضلى الثالث ، $f```(x)$ or $\Phi```(x)$

ترمز للمعامل التفاضلى الرابع ، $f^{IV}(x)$ or $\Phi^{IV}(x)$

..... وهكذا .

(٢) عند إستخدام y كرمز للدالة فى x

المعامل التفاضلى الأول = $\therefore y_1 =$

المعامل التفاضلى الثانى = ، $y_2 =$

المعامل التفاضلى الثالث = ، $y_3 =$

..... وهكذا .

أو قد نستخدم الرموز $y`, y``, y```, y^{IV}$ ، أحياناً .

٦ –٨ : – منحنيات الاشتقاق **Derived curves**

اتضح لنا مما سبق أن التفاضل المتتالى لدالة فى x ينتج عنه مجموعة من المشتقات ، كل منها دالة فى x

ويمكننا تمثيل هذه المشتقات بمنحنياتها حيث تنشأ منها علاقات محددة .

ولنعتبر الدالة : – $y = x^2 - 4x + 3$

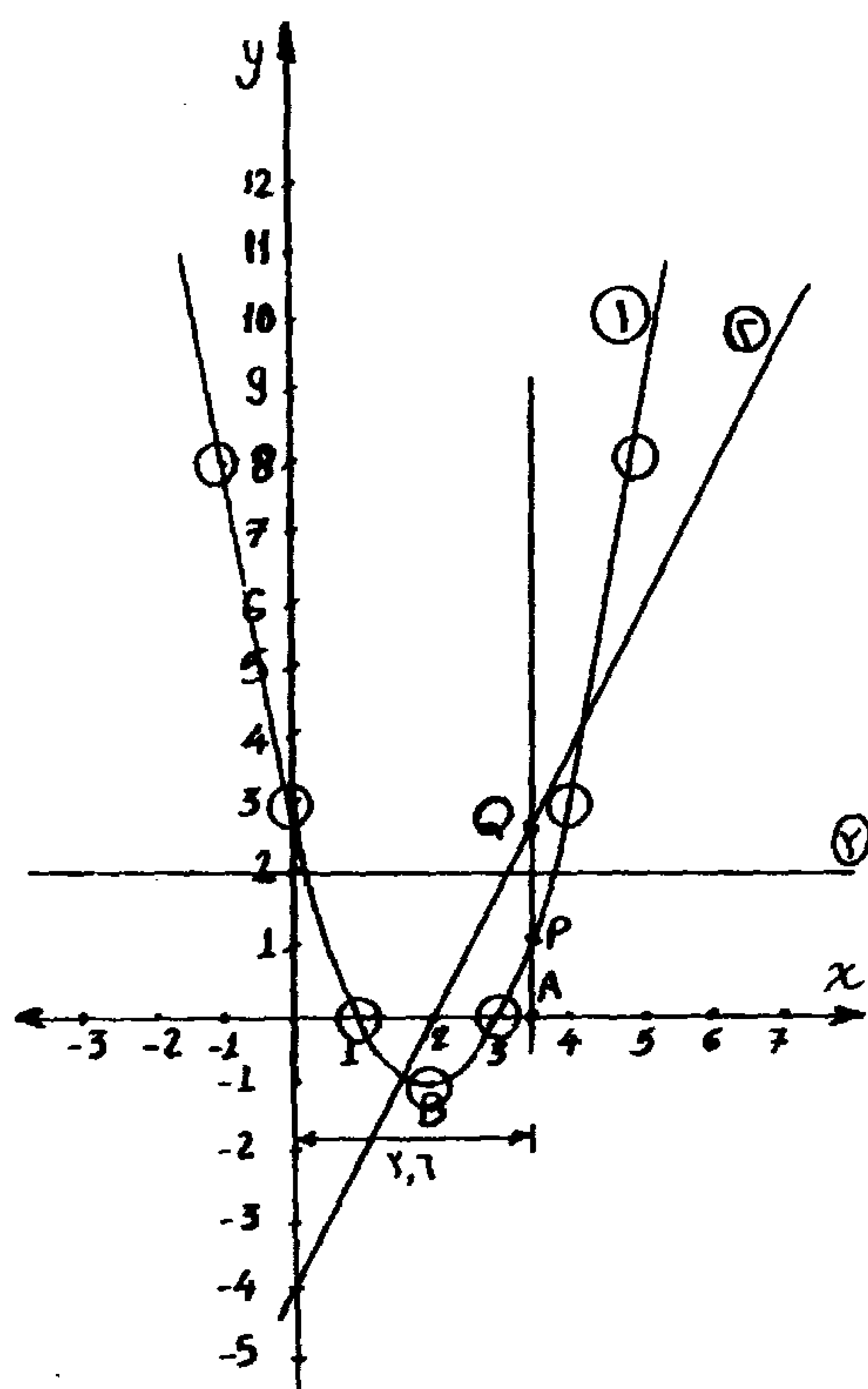
$$\therefore y_1 = 2x - 4 \quad , \quad y_2 = 2$$

ويوضح الشكل (٦-١) المنحنيات التالية : -

1) $y = x^2 - 4x + 3$

2) $y_1 = 2x - 4$

3) $y_2 = 2$



شكل (٦ - ١)

ويمكن ملاحظة العلاقات التالية بين المنحنى الأصلى ومشتقتيه : -

(١) تعطى y_1 وهى دالة المشتقة الأولى ، معدل زيادة y بالنسبة إلى x ، وقيمتها عند أى قيمة نختارها لـ x ، تساوى الميل عند النقطة المناظرة على المنحنى

فإذا أخذنا أى نقطة ولتكن A على المحور OX بحيث أن $x = 3.6$ ثم نرسم الخط الرأسى المار بـ A فيقطع المنحنى فى P ويقطع الخط المستقيم $[y_1 = 2x - 4]$ فى Q وبذلك فإن قيمة الإحداثى الرأسى QA تكون مساوية لميل المنحنى عند P ، وواضح من الرسم أنها حوالى 3.2 وحدة .

وبالحساب والتعويض عن قيمة $x = 3.6$ فى المعادلة $[y_1 = 2x - 4]$

فإن المعامل التفاضلى الأول يساوى : -

$(2 \times 3.6 - 4) = 7.2$

(٢) والرسم الذى يمثله y_2 أو التفاضل الثانى $y_2 = 2$ عبارة عن خط مستقيم موازياً لـ OX حيث تكون قيمة الإحداثى الصادى لأى نقطة عليه ثابته وهو يوضح أن ميل $y_1 = 2x - 4$ ، رقم ثابت يساوى 2

(٣) وعند أسفل نقطة على المنحنى وهى نقطة B [المنحنى : $y = (x^2 - 4x + 3)$] فإن الإحداثى الصادى (الرأسى) عند النقطة المرادفة لـ B على المنحنى الممثل للتفاضل الأول $y_1 = 2x - 4$ تكون مساوية للصفر حيث أن $y_1 = 2x - 4$ يقطع محور OX عند هذه النقطة .

وبذلك فإن ميل الدالة الأصلية يساوى الصفر عندما $x = 2$ والمماس المرسوم للمنحنى عند B يكون موازياً لمحور السينات OX

(٤) لقيم x الأقل من 2 فإن الدالة $x^2 - 4x + 3$ تتناقص بينما قيم الدوال المشتقة تكون سالبة

ولقيم x الأكبر من 2 فإن الدالة $x^2 - 4x + 3$ تتزايد وتكون الدالة $2x - 4$ موجبة .

مسائل متنوعة محلولة : –

(١) أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت :

$$y = \frac{(x^2 + 2x)^5}{(x^4 + 3x - 1)^2}$$

الحـــــــل :–

يمكن حل هذه المسألة كحاصل قسمة أو كحاصل ضرب كالتالى : –

$$y = (x^2 + 2x)^5 \times (x^4 + 3x - 1)^{-2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^2 + 2x)^5 \times -2(x^4 + 3x - 1)^{-3} + (x^4 + 3x - 1)^{-2} \times 5 \times (x^2 + 2x)^4 \times (2x + 2)$$

ويمكن إختصار هذه الإجابة إلى أبسط صورة .

(٢) أوجد مشتقة الدالة : –

$$y = (x^3 - 6)^5$$

بالنسبة إلى x

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=5(x^3-6)^4\times\frac{d}{dx}(x^3-6)=5(x^3-6)^4\times 3x^2=15x^2(x^3-6)^4$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة إذا ما فككنا القوس المرفوع للأس 5 وأوجدنا المشتقة المطلوبة كحاصل جمع جبرى للحدود .

(٣) أوجد مشتقة الدالة : -

$$y=(3x^2+2x)^{12}$$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=12(3x^2+2x)^{11}\ .\ \frac{d}{dx}(3x^2+2x)=12(3x^2+2x)^{11}\times(6x+2).$$

(٤) أوجد مشتقة الدالة : -

$$u=\sqrt[4]{\frac{1}{y^5}}\ =\ y^{\frac{-5}{4}}$$

الحـــــل :-

نضع الدالة فى الصورة الأسية بدلاً من الصورة الجذرية

$$\therefore u=y^{\frac{-5}{4}}$$

$$\therefore\frac{du}{dy}=\frac{-5}{4}y^{\frac{-5}{4}-1}=\frac{-5}{4}y^{\frac{-9}{4}}=\frac{-5}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{y^9}}$$

(٥) أوجد $f`(x)$ للدالة : $f(x)=3\sqrt[6]{x^5}$

الحـــــل :-

$$f(x)=3x^{\frac{5}{6}}$$

$$\therefore f`(x)=3\times\frac{5}{6}\times x^{\frac{5}{6}-1}=\frac{5}{2}x^{\frac{-1}{6}}=\frac{5}{2}\sqrt[6]{\frac{1}{y}}$$

(٦) أوجد مشتقة الدالة : -

$$y=\frac{ax^n-5}{b}$$

الحـــــــل :-

$$y=\frac{a}{b}x^{n}-\frac{5}{b}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{an}{b}x^{n-1}-0=\frac{an}{b}x^{n-1}.$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة بكتابة :

$$y=\frac{1}{b}\left(ax^{n}-5\right)$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}-nax^{n-1}=\frac{an}{b}x^{n-1}$$

(٧) أوجد مشتقة الدالة : -

$$y=\sqrt[a]{\frac{1}{x^{b}}}$$

الحـــــــل :- يمكن كتابة y هكذا :

$$y\;=x^{\frac{-b}{a}}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{-b}{a}x^{\frac{-b}{a}-1}=\frac{-b}{a}x^{-\left(\frac{b+a}{a}\right)}$$

(٨) أوجد مشتقة الدالة : -

$$y=\sqrt{3x^{3}-5x+2}$$

الحـــــــل :- يمكن كتابة الدالة y هكذا : -

$$y\;=\left(3x^{3}-5x+2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(3x^{3}-5x+2\right)^{-\frac{1}{2}}.\frac{d}{dx}\left(3x^{3}-5x+2\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3x^{3}-5x+2}}\times\left(9x^{2}-5\right)=\frac{9x^{2}-5}{2\sqrt{3x^{3}-5x+2}}$$

(٩) أوجد مشتقة الدالة : $y=\sqrt{2x^{3}+3x}$

الحـــــــل :-

نضع $u=2x^{3}+3x$

$\therefore y = u^{\frac{1}{2}}$

$, \because u = 2x^3 + 3x \qquad \therefore \frac{du}{dx} = 6x^2 + 3$

$، \because y = u^{\frac{1}{2}} \qquad \therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2x^3+3x}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2x^3+3x}} \times (6x^2+3)$

ويمكن الحصول على الإجابه بسهولة وذلك بتربيع كل من الطرفين ثم نوجد مشتقة كل طرف بالنسبة إلى x :

$\because y = \sqrt{2x^3+3x}$

$\therefore y^2 = 2x^3 + 3x$

$\therefore 2y\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 3$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(6x^2+3)}{2y} = \frac{(6x^2+3)}{2\sqrt{2x^3+3x}}$

(١٠) أوجد مشتقة الدالة : - $S = \sqrt[3]{(6-t)}$

الحـــــل :- نُحول الجذر إلى أُس كسرى

$\therefore S = (6-t)^{\frac{1}{3}}$

$، \frac{ds}{dt} = \frac{1}{3}(6-t)^{\frac{-2}{3}} . \frac{d}{dt}(6-t)$

$= \frac{1}{3}(6-t)^{\frac{-2}{3}} . (-1) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(6-t)^2}}$

(١١) إذا كانت $f(t) = \sqrt[3]{2t^3+4t-3}$

فأوجد $f^{`}(t)$

الحـــــل :-

$f^{`}(t) = \frac{df}{dt}$

، نقوم بتحويل الجذر إلى أُس كسرى

$$\therefore f(t) = \left(2t^3 + 4t - 3\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore f`(t) = \frac{1}{3}\left(2t^3 + 4t - 3\right)^{\frac{-2}{3}} \cdot \frac{d}{dt}\left(2t^3 + 4t - 3\right)$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(2t^3 + 4t - 3\right)^2}} \times \left(6t^2 + 4\right)$$

(١٢) أوجد المشتقة الأولى للدالة :

$$y = \frac{1}{2x^3 - 3x^2 + 5x + 6}$$

الحـــــل :-

$$y = \left(2x^3 - 3x^2 + 5x + 6\right)^{-1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -1\left(2x^3 - 3x^2 + 5x + 6\right)^{-2}\left(6x^2 - 6x + 5\right)$$

$$= \frac{-6x^2 + 6x - 5}{\left(2x^3 - 3x^2 + 5x + 6\right)^2}$$

(١٣) إذا كانت : $y = x^3 - 3\sqrt{2x^2 + 5}$

فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3\right) - 3\frac{d}{dx}\sqrt{2x^2 + 5}$$

$$= 3x^2 - 3 \times \frac{2x\sqrt{2x^2 + 5}}{2x^2 + 5} = 3x^2 - \frac{6x\sqrt{2x^2 + 5}}{2x^2 + 5}$$

حيث : -

$$\frac{d}{dx}\sqrt{2x^2 + 5} = \frac{d}{dx}\left(2x^2 + 5\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2x^2 + 5}} \times 4x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 5}}$$

(١٤) أوجد مشتقة الدالة : -

$$y = 2 + \frac{3}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} - \frac{2}{x\sqrt{x}}$$

الحـــــل :- يمكن كتابة الدالة فى الصورة الأسية كالتالى :-

$$y=2+3x^{\frac{-1}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{-3}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-3}{2}x^{\frac{-3}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{-1}{2}}+3x^{\frac{-5}{2}}=\frac{-3}{2\sqrt{x^3}}+\frac{3}{2\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{x^5}}$$

(١٥) أوجد المشتقة السابعة للدالة : $y=x^7$

الحـــــل :-

المشتقة الأولى : $7x^6$

المشتقة الثانية : $7\times 6x^5$

المشتقة الثالثة : $7\times 6\times 5\ x^4$

المشتقة الرابعة : $7\times 6\times 5\times 4\ x^3$

المشتقة الخامسة : $840\times 3\ x^2$

المشتقة السادسة : $2520\times 2\ x$

المشتقة السابعة : 5040

وواضح أن المشتقة الثامنة = صفر ولذلك فإن الدالة $y=x^7$ ، لها ثمانية مشتقات .

(١٦) أوجد مشتقة الدالة : $y=(x^2-5x)(3x+2)$

الحـــــل :-

نستخدم النظرية : - $d(u.v)=u.dv+v.du.$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(x^2-5x)(3)+(3x+2)(2x-5)$$

$$=3x^2-15x+6x^2-15x+4x-10$$

$$=9x^2-26x-10$$

(١٧) أوجد تفاضل الدالة : - $y=\frac{x^3}{\sqrt[3]{2x^2-1}}$

الحـــــل :-

نحول الصورة الجذرية إلى صورة أُسية وهى تسمح لنا بتطبيق النظرية كالتالى : -

$$\therefore y=x^3(2x^2-1)^{\frac{-1}{3}}$$

وهى عبارة عن حاصل ضرب مقدارين

$$u = x^3 \ , \ V = \left(2x^2 - 1\right)^{\frac{-1}{3}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$= x^3 . \frac{-1}{3}\left(2x^2 - 1\right)^{\frac{-4}{3}} .4x + \left(2x^2 - 1\right)^{\frac{-1}{3}} .3x^2$$

$$= x^2\left(2x^2 - 1\right)^{\frac{-4}{3}}\left[\frac{-4x^2 + 9\left(2x^2 - 1\right)}{3}\right]$$

$$= \frac{x^2}{3}\left(2x^2 - 1\right)^{\frac{-4}{3}}\left[14x^2 - 9\right]$$

$$= \frac{x^2\left[14x^2 - 9\right]}{3\sqrt[3]{\left(2x^2 - 1\right)}}$$

(١٨) أوجد تفاضل الدالة :

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

الحـــــل :-

يمكن حل هذه المسألة بكتابتها فى الصورة :

$$x = \left(1 + y^2\right)^{\frac{-1}{2}}$$

ثم نضع $u = 1 + y^2$

$$\therefore \ x = u^{\frac{-1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dx}{du} = \frac{-1}{2}u^{\frac{-3}{2}}$$

$$\because u = 1 + y^2 \qquad \therefore \frac{du}{dy} = 2y$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{dx}{du}\cdot\frac{du}{dy}=\frac{-1}{2}u^{\frac{-3}{2}}\cdot 2y$$ ،

$$=\frac{-1}{2}\left(1+y^2\right)^{\frac{-3}{2}}\cdot 2y$$

$$=\frac{-y}{\sqrt{\left(1+y^2\right)^3}}$$

ويمكن حل هذه المسألة بتربيع الطرفين حيث نحصل على دالة ضمنية فى كل من x, y

$$\because x=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\therefore x^2=\frac{1}{1+y^2}$$

$$\therefore x^2+x^2y^2=1$$

ثم نجرى التفاضل كالمعتاد بالنسبة إلى x ولا ننسى أن y دالة فى x وأن $x \cdot y$ مقدارين مضروبين فى بعضهما وكذلك $x^2 \cdot y^2$:

$$\therefore 2x+\left[x^2\left(2y\frac{dy}{dx}\right)+y^2\cdot(2x)\right]=0$$

$$\therefore 2x+2x^2y\frac{dy}{dx}+2xy^2=0$$

$$\therefore 2x^2y\frac{dy}{dx}=-2x-2xy^2=-2x\left(1+y^2\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-2x\left(1+y^2\right)}{2x^2y}=\frac{-\left(1+y^2\right)}{xy}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=\frac{-xy}{\left(1+y^2\right)}=\frac{-1}{\left(1+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}\times\frac{y}{\left(1+y^2\right)}$$

$$=\frac{-y}{\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-y}{\sqrt{\left(1+y^2\right)^3}}$$

(١٩) أوجد تفاضل الدالة : –

$$y=\frac{9x^2}{3x-2}-(x-3)(3x-1)$$

الحـــــل :- فى هذه المسألة ، نستخدم قاعدة القسمة للحد الأول وحـاصل الضـرب للحد الثانى ، هكذا : -

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3x-2)(18x)-9x^2(3)}{(3x-2)^2}-[(x-3)(3)+(3x-1)(1)]$$

$$=\frac{54x^2-36x-27x^2}{(3x-2)^2}-(3x-9+3x-1)$$

$$=\frac{27x^2-36x}{(3x-2)^2}-(6x-10)$$

وبتوحيد المقامات : -

$$=\frac{27x^2-36x-(6x-10)(3x-2)^2}{(3x-2)^2}$$

ويمكن إختصار هذه النتيجة .

(٢٠) أوجد $\frac{dy}{dx}$ **للدالة :** $y=\left[\sqrt{x-2}+\frac{2}{\sqrt{x-2}}\right]^5$

الحــــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=5\left[\sqrt{(x-2)}+\frac{2}{\sqrt{(x-2)}}\right]^4\times d.c.of\left[\sqrt{x-2}+\frac{2}{\sqrt{x-2}}\right]$$

$$،d.c.of\left[\sqrt{x-2}+\frac{2}{\sqrt{x-2}}\right]=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\times 1-\frac{1}{\sqrt{(x-2)^3}}\Bigg]$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=5\left[\frac{\sqrt{x-2}.\sqrt{x-2}+2}{\sqrt{x-2}}\right]^4\left[\frac{(x-2)-2}{2(x-2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=5\left[\frac{x-2+2}{\sqrt{x-2}}\right]^4\left[\frac{x-4}{2(x-2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\frac{5\,x^4}{2\,(x-2)^2}\,\frac{(x-4)}{(x-2)^{\frac{3}{2}}}\quad=\frac{5x^4(x-4)}{2(x-2)^{\frac{7}{2}}}$$

(٢١) أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

الحـــــل :- نضع الدالة فى الصورة الأسية كالتالى : -

$$y=\left\{x+\left[x+(x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

وهنا يلزم إجراء عملية تفاضل متسلسل (بالتتابع) chain rule

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left\{x+\left[x+(x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}\left\{x+\left[x+(x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{x+\left[x+(x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{-1}{2}}\times\left\{1+\frac{1}{2}\left[x+(x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{-1}{2}}\times\frac{d}{dx}\left[x+(x)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{x+\left[x+(x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{-1}{2}}\times\left\{1+\frac{1}{2}\left[x+(x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{-1}{2}}\times\left[1+\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\right]\right\}$$

$$=\left[\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{(x)}}}}\right]\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\times\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$

(٢٢) إذا كانت $y=\left(x^2+2x+1\right)^3$

وكانت : - $x=3t^2+2t-1$

فأوجد $\frac{dy}{dt}$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\because \frac{dy}{dx}=3\left(x^2+2x+1\right)^2.(2x+2)=6(x+1)\left(x^2+2x+1\right)^2$$

، $\frac{dx}{dt}=6t+2=2(3t+1)$

$$\therefore \frac{dy}{dt}=6(x+1)\left(x^2+2x+1\right)^2\times 2(3t+1)$$

$$=12(x+1)\left(x^2+2x+1\right)^2(3t+1)$$

(٢٣) أوجد المشتقة النونية للدالة : —

$$y=\frac{1}{2x+3}$$

الحـــــل :—

$$y=(2x+3)^{-1}$$

والمشتقة الأولى : — $y' =-1(2x+3)^{-2}\times 2=-2(2x+3)^{-2}$

والمشتقة الثانية : — $y'' =4(2x+3)^{-3}\times 2=8(2x+3)^{-3}$

والمشتقة الثالثة : — $y''' =-24(2x+3)^{-4}\times 2=-48(2x+3)^{-4}$

والمشتقة الرابعة : — $y^{IV}=192(2x+3)^{-5}\times 2=384(2x+3)^{-5}$

ولإيجاد المشتقة النونية يُلاحظ مايلى :—

(١) أن المشتقات تبادلية الإشارة أى أنها مرة موجبة والأخرى سالبة وأن ترتيب المشتقات (الأولى ، والثالثة ، والخامسة ، ....) عندما يكون فردياً فإن قيمة المشتقة تكون سالبة . وعندما يكون ترتيبها زوجياً فإن قيمة المشتقة موجبة

وبذلك فإنه يمكن التعبير عن الخاصية السابقة للمشتقة النونية بأنها $(-1)^n$ فمثلاً عندما $n=3$ وهى فردية فإن الإشارة تُصبح سالبة : $(-1)^3=-1$

(٢) معامل المشتقة كالتالى (بإهمال الإشارات) :

$$2\ ,\ 8\ ,\ 48\ ,\ 384\ ,\ ....$$

المشتقة الأولى [عندما $n=1$] : $2=2^1\ .\ 1\,!=2^n\times n\,!$

المشتقة الثانية [عندما $n=2$] : $8=2^2\ .\ 2\,!=2^n\times n\,!$

المشتقة الثالثة [عندما $n=3$] : $48=2^3\ .\ 3\,!=2^n\times n\,!$

المشتقة الرابعة [عندما $n=4$] : $384=2^4\ .\ 4\,!=2^n\times n\,!$

(٣) عند أخذ قوة أو أس المقدار $(2x+3)$ فى الإعتبار :-

المشتقة الأولى ، $n=1$: $(2x+3)^{-2}=\frac{1}{(2x+3)^2}=\frac{1}{(2x+3)^{n+1}}$

المشتقة الثانية ، $n=2$: $(2x+3)^{-3}=\frac{1}{(2x+3)^3}=\frac{1}{(2x+3)^{n+1}}$

المشتقة الثالثة ، $n=3$: $(2x+3)^{-4}=\frac{1}{(2x+3)^4}=\frac{1}{(2x+3)^{n+1}}$

المشتقة الرابعة ، $n=4$: $(2x+3)^{-5}=\frac{1}{(2x+3)^5}=\frac{1}{(2x+3)^{n+1}}$

ومما سبق سنجد أن المشتقة النونية للمقدار $\frac{1}{2x+3}$ هى :-

$$f^n(x)=(-1)^n \cdot \frac{2^n \cdot n!}{(2x+3)^{n+1}}$$

مثـــال :-

المشتقة الثالثة للمقدار ذاته تساوى :

$$f^3(x)=(-1)^3 \cdot \frac{2^3 \cdot 3!}{(2x+3)^{3+1}}=\frac{-1\times 8\times(3\times 2\times 1)}{(2x+3)^4}$$

$$=\frac{-48}{(2x+3)^4}$$

Exercise "8"

اكتب المشتقة الأولى والثانية والثالثة للدوال الآتية فى x :

(١) .... $x^2\ (2x-3)$

(٢) .... x^{2a}

(٣) .... $3x^4-4x^3+2x^2-7x+2$

(٤) .... $2x^5-3x^3+4x-1$

(٥) .... $\frac{1}{x}$

(٦) .... $\sqrt{x}$

(٧) .... $\sqrt{2x+1}$

(٨) .... $\frac{1}{x^2}$

(٩) أوجد المعامل التفاضلى من الرتبة "n" للمقدار $\frac{1}{a^2-x^2}$

ملحوظة : $\frac{1}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right]$

(١٠) إذا كانت :- $f(x)=6x^2-5x+3$

فأوجد $f`(0)$ وما هى قيمة $x$ التى تجعل $f`(0)=0$ ومـا هـى النقطـة المنـاظرة علـى المنحنى $f(x)$.

(١١) أوجد قيمة x التى يكون عندها ميل المنحنى :

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x+1$$

مساوياً للصفر وما هى قيمة x التى يكون عندها ميل $f`(x)$ مساوياً للصفـر ومـا هـى قيمة $f`(x)$ المناظرة .

(١٢) إذا كانت : $f(x)=x^3-5x^2+7$

فأوجد $f`(1)$ ، $f``(2)$ وعند أى قيمة لـ x تتلاشى قيمة $f`(x)$.

الباب السابع

النهايات العظمى والصغرى للدوال فى متغير واحد ، نقط الإنقلاب

Maxima and minima values of univariate functions , points of inflexion

٧-١ : عام :-

درسنا فيما سبق كيفية إيجاد المشتقة الأولى والثانية وكذلك المشتقات العليا لأى دالة ، وسنرى فى هذا الباب أهمية المشتقة الأولى وكيفية الاستفادة منها فى فهم أكثر للدوال ذات المتغير الواحد المستقل أى التى على الصورة :- $y=f(x)$ حيث تُؤثر قيم x المختلفة فى قيمة الدالة ككل (y) .

وسنرى أن أى دالة من هذا النوع تكون إما :-

أ) متزايدة increasing ب) متناقصة decreasing جـ) ثابتة لحد stationary

وذلك خلال فترة أو مدى محدد لقيم المتغير المستقل x .

أو قد تكون الدالة بحيث يجتمع فيها كل ما سبق أى متزايدة فى جزء ومتناقصة فى آخر وثابت فى جزء ثالث وفى خلال المدى المحدود x .

كما يهدف هذا الباب إلى كيفية تحديد القيم (الحرجة) - critical values لـ x والتى تكون عندها الدالة y قيمة عظمى أو صغرى أو ثابتة وذلك حيث أنه فى جميع فروع العلم المختلفة وتطبيقاتها العملية ، تُترجم المشاكل العملية إلى معادلات رياضية ونحتاج عادة إلى تحديد أقصى قيمة أو أقل قيمة لمتغير ما فى عمليات الإنتاج أو التصنيع أو التسويق .

فإذا كانت لدينا العلاقة (العملية) على شكل دالة $y=f(x)$ فى متغير واحد x ، حيث y تمثل حجم الإنتاج الأمثل الذى يحقق أقل تكلفة إنتاج ، x تمثل تكلفة ، فإن الأمر يتطلب معرفة أقصى حجم إنتاج (نهاية عظمى - قيمة عظمى) ممكن بأقل تكلفة إنتاج (نهاية صغرى - قيمة صغرى) .

أو تحديد أقصى سعر للمنتج أو أقصى كمية مبيعات عند أقل تكلفة أجـور أو أقـل زمـن تشغيل وهكذا ، والأمثلة فى هذا الصدد ، لا حصر لها .

والآن سنبدأ فى دراسة متعمقة وبشئ مـن التفصيـل للدالـة $y=f(x)$ ومشتقاتها الأولى والثانيــة .

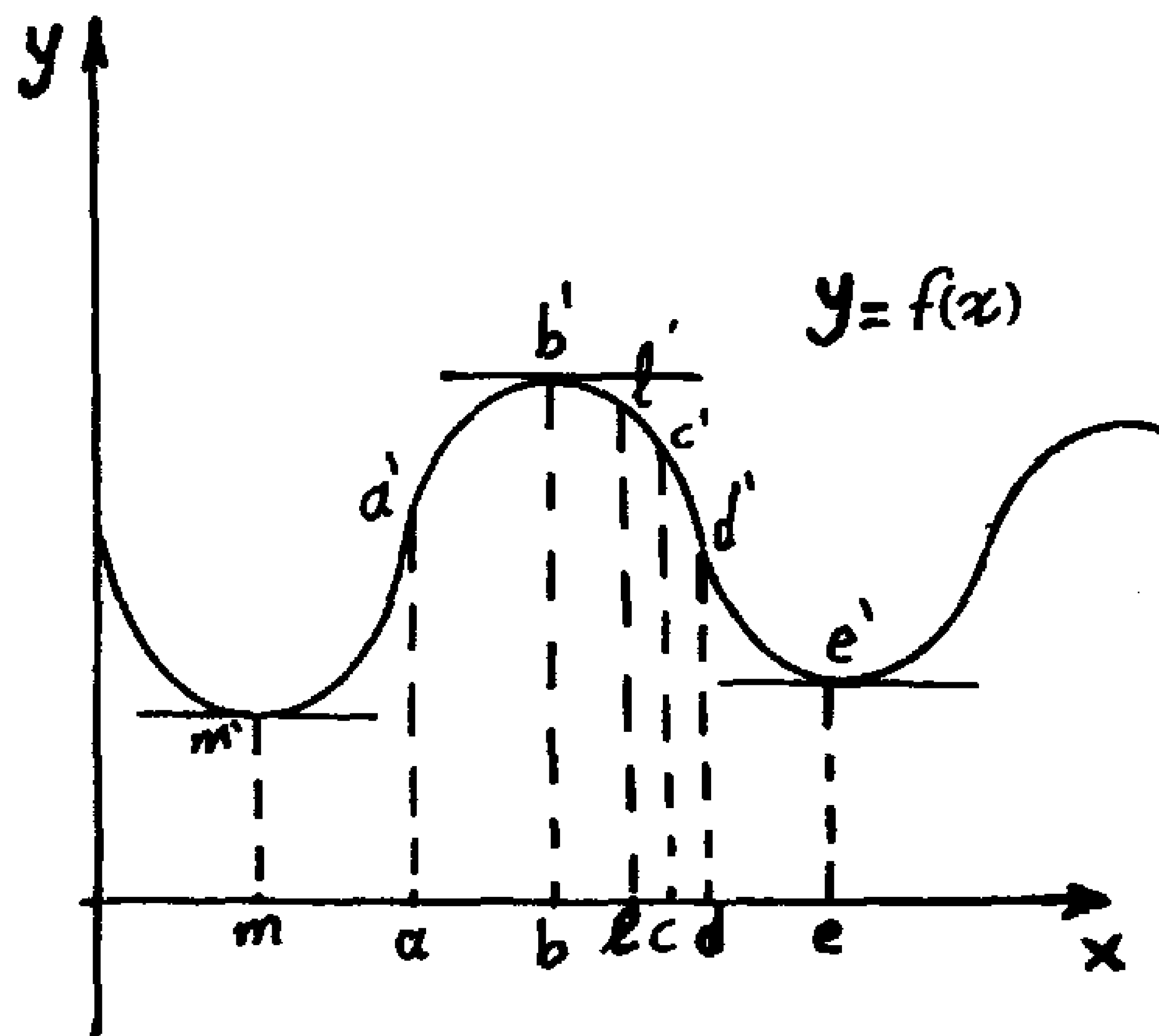
٧-٢ :- تزايد وتناقص الدالة

(١) إذا أخذنا قيمة لـ x أكبر بقليل من a وكانت $f(x)$ أكبر من $f(a)$ وفـى نفـس الوقت إذا أخذنا قيمة لـ x أقل بقليل من a وكانت $f(x)$ أقل من $f(a)$ فإنـه يقـال أن الدالة $f(x)$ ، فى هذه الحالة ، دالة متزايدة عند $x=a$

(٢) أما إذا أخذنا قيمة لـ x أكبر بقليل من a وكـانت $f(x)$ أقـل مـن $f(a)$ وفـى نفس الوقت إذا أخذنا قيمة لـ x أقل بقليل من a وكانت $f(x)$ أكبر من $f(a)$ فإنه يقال أن الدالة $f(x)$ ، فى هذه الحالة ، دالة متناقصة عند $x=a$

مثـــــال :-

الدالة المبينة فى شكل (٧-١) متزايدة عند $x=a$ وذلك واضح مـن أن المنحنـى علـى يمين النقطة `a يقع فوقها بينما المنحنى على يسار `a يقع تحتها



شكل (٧-١)

وهذا واضح فى نقط المنحنى التى إحداثيها الصادى $aa^\backprime$ أو قريباً منه أى فى نطاق جزء المنحنى الذى إحداثيه الصادى يعادل تقريباً إرتفاع $k^\backprime l^\backprime$

أما إذا أخذنا نقط أخرى خارج جزء المنحنى $k^\backprime l^\backprime$ مثل نقطة $c^\backprime$ فإن الأمر يختلف حيث أن $c^\backprime$ تقع على يمين النقطة $a^\backprime$ ولكن تحتها ، فى حين تقع النقطة $h^\backprime$ على يسار $a^\backprime$ ولكن فوقها .

وبدراسة الدالة المبينة ، سنجد أنها تتناقص عند $x = d$ حيث أنه بجوار النقطة $d^\backprime$ تكون نقط المنحنى التى على يمينها تحتها مثل $(e^\backprime)$ بينما النقط التى على يسارها مثل $c^\backprime$ تكون فوقها كما وأن الدالة متناقصة كذلك عند $x = c$

فى حين أن الدالة عند النقط $(x = m , x = b , x = e)$ ، تكون لا متزايدة ولا متناقصة (ساكنة **stationary**)

حيث تكون للدالة عند $(x = m , x = e)$ نهاية صغرى بينما عند $(x = b)$ تكون نهاية عظمى

(٣) ويُطلق على الدالة بأنها متزايدة فى الفترة (a , b) ، إذا كانت تتزايد عند كل نقطة من النقط الداخلية للفترة فيما بين a , b ويمكن للدالة تحت هذا التعريف أن لا تتزايد عند حدى الفترة أو عند أحد حديها .

(٤) ويُطلق على الدالة بأنها متناقصة فى الفترة (a , b) ، إذا كانت تتناقص عند كل نقطة من النقط الداخلية للفترة فيما بين a , b ويمكن للدالة تحت هذا التعريف أن لا تتناقص عند مدى الفترة أو عند أحد حديها .

(٥) تتناقص الدالة الموضحة بالشكل فى الفترة (l , d) حيث أنها تتناقص عند كل نقطة داخل الفترة ، وكذلك عند حديها (l , d)

(٦) تتناقص الدالة الموضحة بالشكل فى الفترة (b , e) حيث أنها تتناقص عند كل نقطة داخل الفترة إلا أنها لا تتناقص عند حدى الفترة (b , e)

(٧) تتزايد الدالة فى الفترة (m , b)

(٨) غير أن الدالة لا تتزايد ولا تتناقص فى الفترة (a , d) لأنها فى الفترة (a , b) وهى جزء من الفترة الكلية (a , d) تكون متزايدة ، بينما فى الفترة (b , d) تكون متناقصة .

(٩) إذا كانت الدالة تتزايد فى الفترة (a , b) فإنه كلما ازدادت قيمة المتغير المستقل (x) ، كلما ازدادت قيم الدالة المناظرة له (y) وبالعكس فإنه إذا ازدادت قيم الدالة (y) كلما ازدادت قيم المتغير المستقل (x) فى الفترة (a , b) فإن الدالة تكون متزايدة فىالفترة (a , b) .

(١٠) وإذا كانت الدالة تتناقص فى الفترة (a , b) فإنه كلما ازدادت قيمة المتغير المستقل (x) ؛ قلت قيمة الدالة المناظرة له (y) ؛ وبالعكس .

وهندسيـاً :-

يرتفع منحنى الدالة فى الفترة أو الفترات التى تتزايد فيها الدالة كلما تحركنا إلى اليمين ، وينخفض فى تلك الفترة أو الفترات التى تتناقص فيها الدالة .

٧-٣ :- إشارات المشتقة الأولى ودلائل تزايد وتناقص وثبوت الدالة عند نقطة

Sign of the differential coefficient

إذا كانت (y) دالة متصلة فى (x) وزادت (x) بمقدار ضئيل للغاية مقداره (Δx) فإن الدالة (y) إما أن تتزايد أو تتناقص بمقدار (Δy) .

أ) **فإذا ازدادت** (y) : فإن (Δy) تكون موجبة ، (Δx) موجبة دائماً (فرضاً) وبذلك فإن معدل التغير والذى يمكن التعبير عنه بنهاية المقدار $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ أو $\frac{dy}{dx}$ وتكون موجبة.

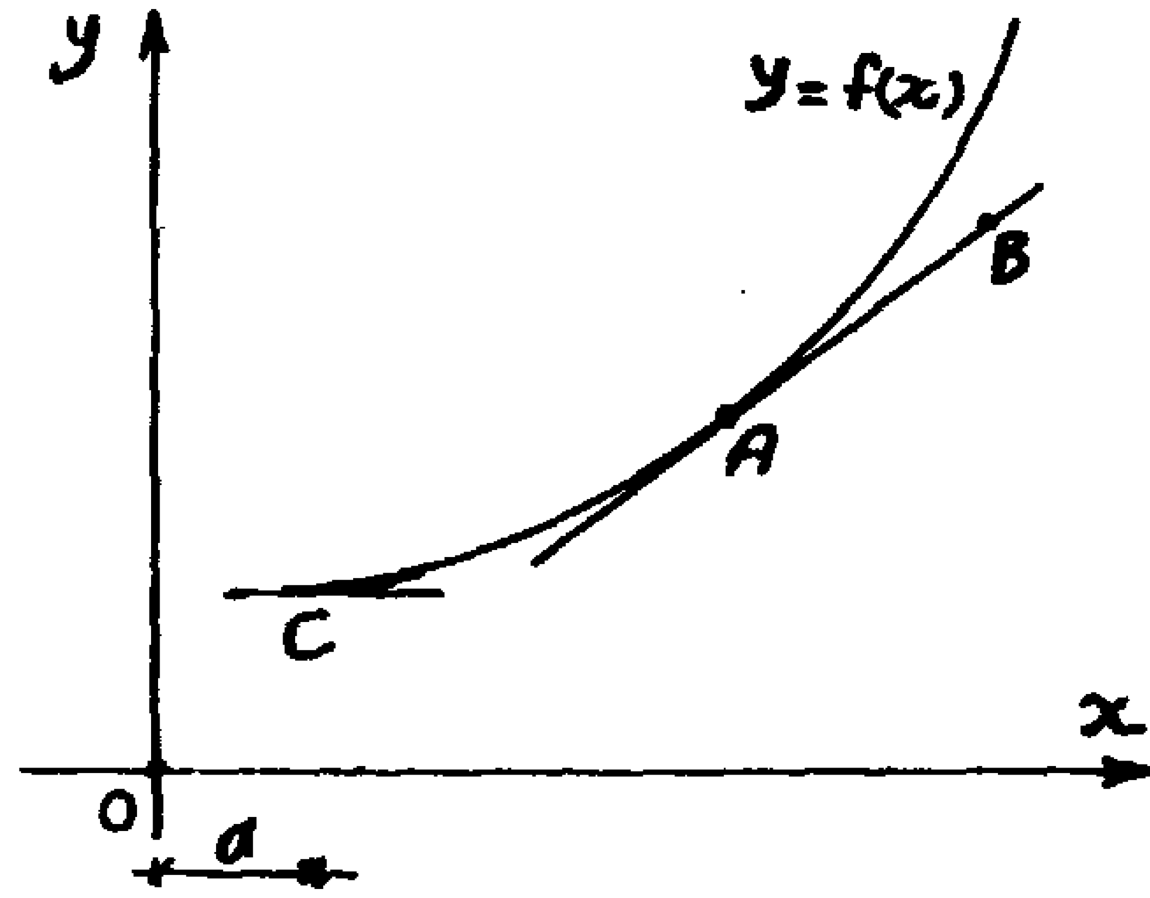
ب) **وإذا تناقصت** (y) : فإن (Δy) تكون سالبة وبذلك فإن $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ تكون سالبة .

أى أن :-

١- لو ازدادت (y) بزيادة (x) فإن $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ تكون موجبة .

٢- لو نقصت (y) بزيادة (x) فإن $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ تكون سالبة .

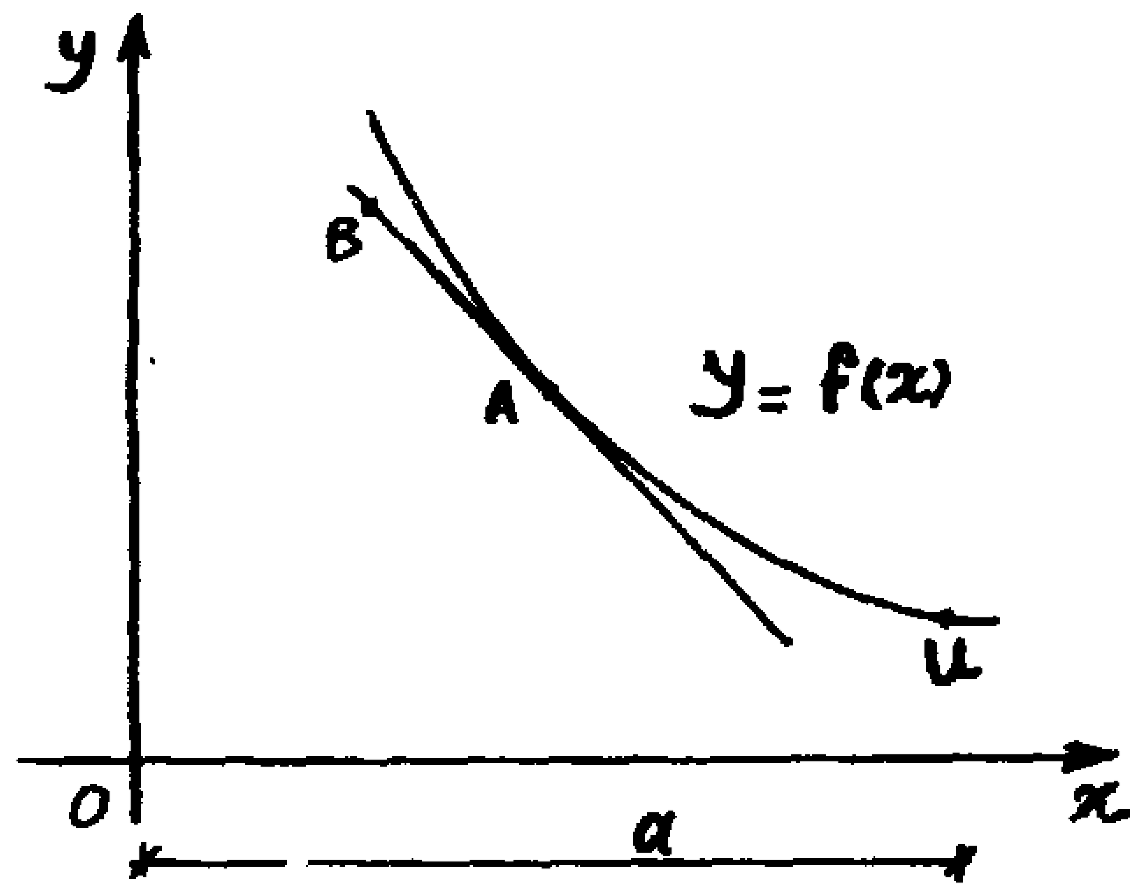
وهندسيـــاً :- فإنـه إذا كـان ميـل المـاس AB موجبـاً، أنظـر الشـكل (٧-٢) فإنـه



شكل (٧-٢)

بالقرب من النقطة A ، يقع المنحنى إلى يمين النقطة A وفوقها ؛ وإلى يسارها تحتها

أما إذا كان ميل المماس AB سالباً ، أنظر شكل (٧-٣) فإنه بالقرب من النقطة A يقع



شكل (٧-٣)

المنحنى إلى يمين النقطة A تحتها وإلى يسارها ، فوقها .

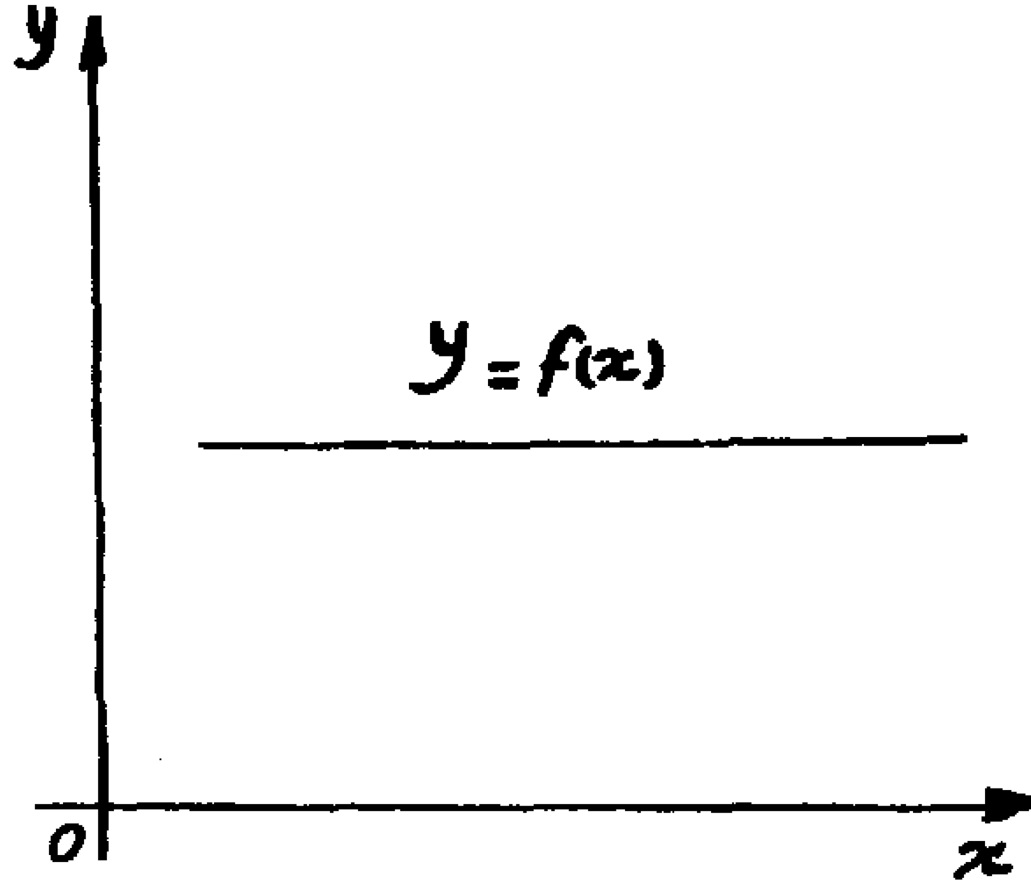
وإذا كانت الدالة عند نقطة $x=a$ ، لها مشتقة أولى تساوى الصفر ؛ $f'(a)=0$ فـإن

الدالة عند النقطة $x=a$ يمكن أن تكون إما :-

متزايدة كما فى الشكل الأول (٧-٢) ، النقطة c

متناقصة كما فى الشكل الثانى (٧-٣) ، النقطة u

وكقاعدة فإن الدالة عند النقطة $x=a$ ، لاهى متزايدة ولا متناقصة كما فى شكل (٧-٤) .

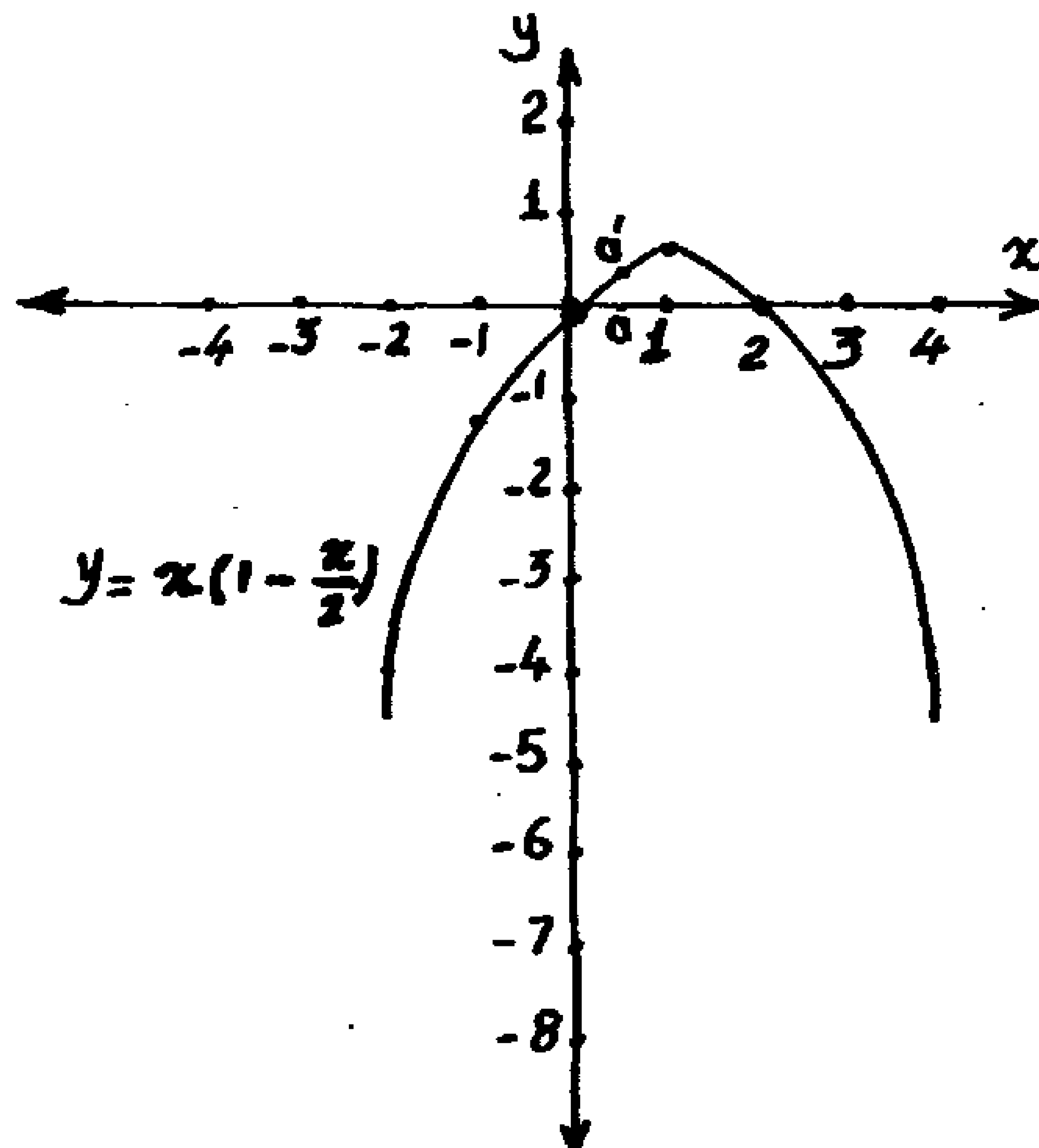


شكل (٧-٤)

ويُطلق على الدالة فى هذه الحالة ، بدالة ساكنة Stationary

مثـــال (١) :-

الدالة $y=x\left(1-\frac{x}{2}\right)$ ، كما هو موضح فى شكل (٧-٥)



شكل (٧-٥)

تتزايد عند النقطة $x=0$ وذلك لأنه :

$$y=x-\frac{x^2}{2} \qquad \therefore y` = 1-x$$

وبوضع $x=0$ فى $y`$:-

$$\therefore y` = 1-x = 1-0 = 1$$

أى أن $y` > 0$

كما أن هذه الدالة تتناقص عندما $x=2$ لأن :-

$$y` = 1-2 = -1$$

أى أن $y` < 0$.

فى حين أنه فى النقطة $x=1$ ، نجد أن :

$$y` = 1-1 = 0$$

وبذلك فإن الدالة ساكنة أى لا متزايدة ولا متناقصة .

وعليه فإن :-

(١) إذا كانت الدالة $y=f(x)$ تتزايد عند النقطة $x=a$ فإن مشتقتها (بفرض أنها قابلة للتفاضل فى هذه النقطة) ، عند هذه النقطة $(x=a)$ تكون موجبة كما فى شكل (٧-٢) النقطة A أو تكون المشتقة مساوية للصفر كما فى نقطة (c) بنفس الشكل

$$\therefore f`(a) \geq 0$$

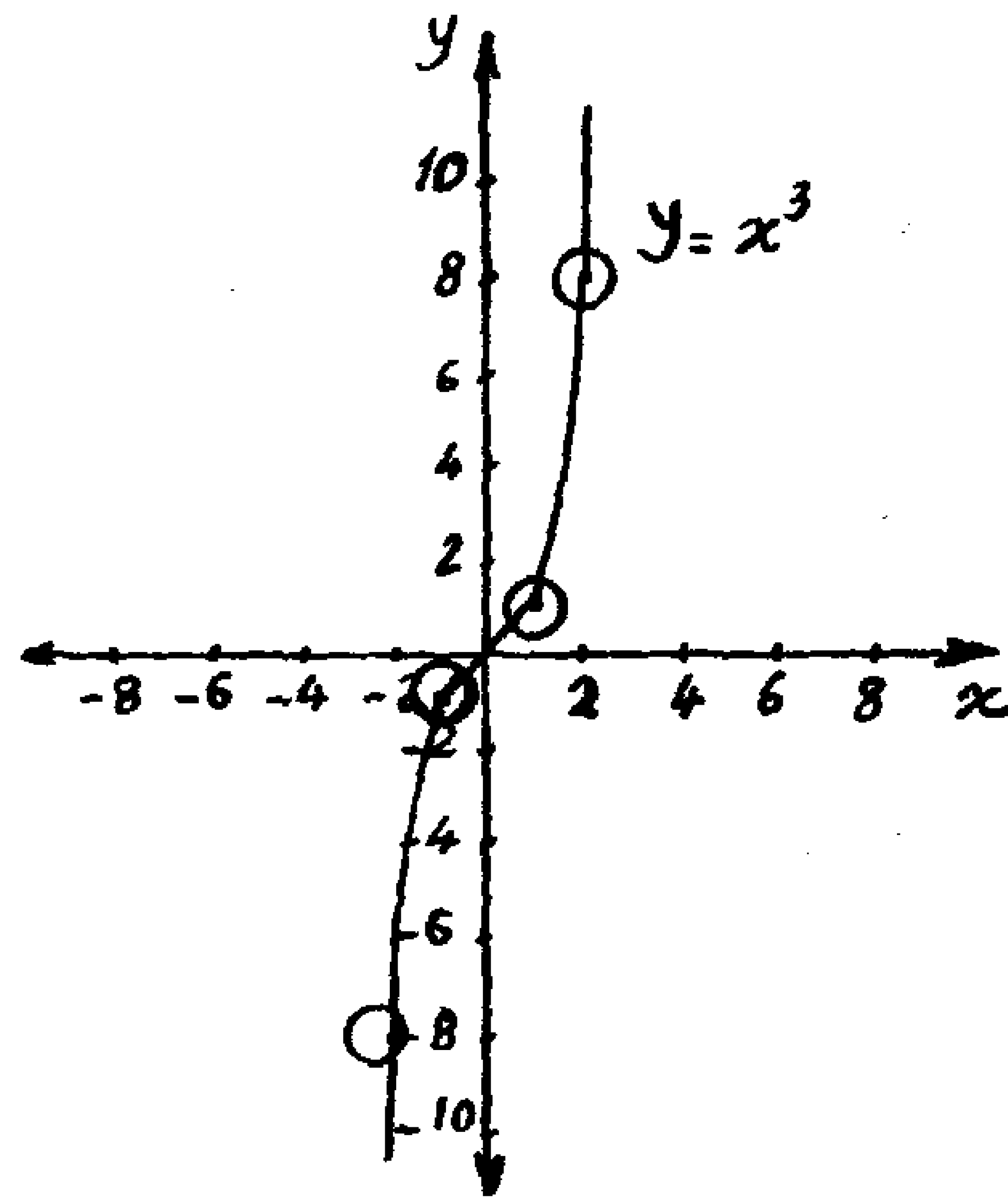
(٢) وبالمثل فإنه بالنسبة للدالة المتناقصة ، فإن مشتقتها تكون سالبة أو مساوية للصفر فى هذه النقطة $(x=a)$

$$\therefore f`(a) \leq 0 \text{ ،}$$

مثـــال (٢) :-

الدالة $y=(x^3)$ ، متزايدة عند أى نقطة ومشتقتها : $y` = 3x^2$ تكون موجبة عند جميع النقط ما عدا النقطة $(x=0)$ حيث تكون $(y`)$ عندها مساوياً للصفر $y` = 0$

أنظر الرسم شكل (٧-٦) .

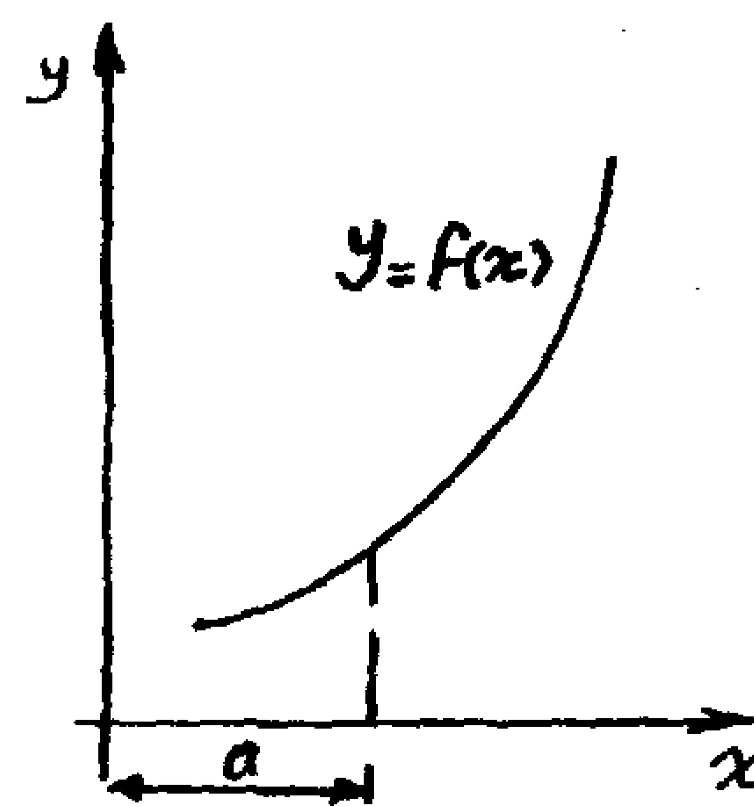


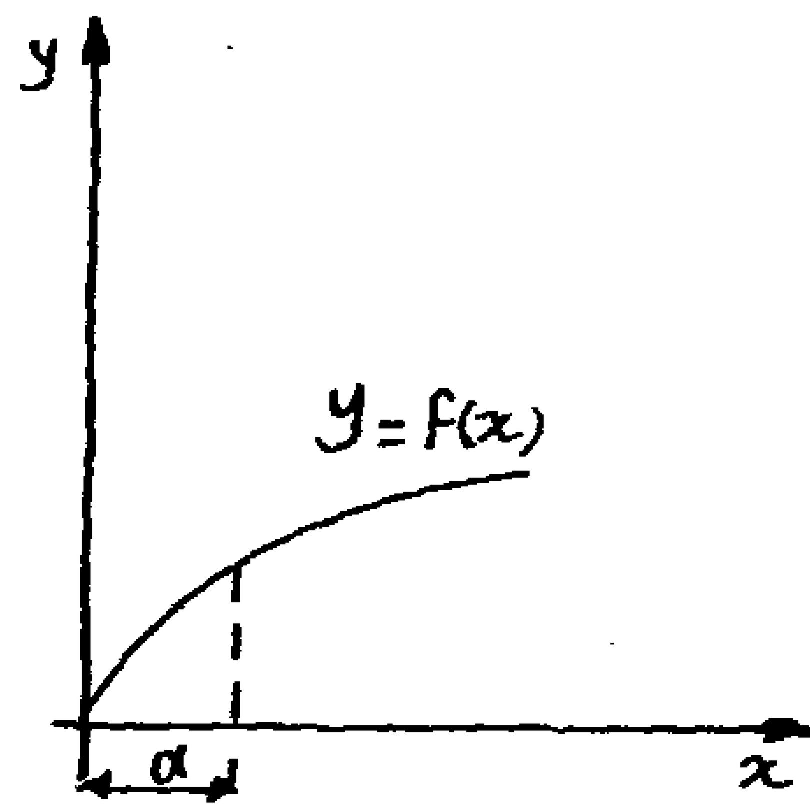
شكل (٧ – ٦)

وحيث أن الدوال الجبرية يمكن تمثيلها بيانياً ، لذلك فإن شكل المنحنى كما سنرى ورأينا سابقاً ، يبين لنا ما إذا كانت الدالة متزايدة أو متناقصة وبالتالى ما إذا كانت المشتقة الأولى موجبة أم سالبة .

٧–٤ :– الدوال المتزايدة Functions which are increasing

وهى تظهر لنا فى الأشكال (٧–٧) ، (٧–٨) ، حيث A نقطة على المنحنى وإحداثيها السينى $x=a$ ، B نقطة أُخرى قريبة منها ، إحداثيها السينى $x=a+\Delta x$ ويُلاحظ ما يلى :–





شكل (٧–٧) ، شكل (٧–٨)

(١) إما أن تكون المنحنيات الممثلة للدالة أو أجزاء منها مقعرة لأعلى وترتفع Concave upwards and rising كما فى شكل (٧-٧) .

وأمثلة لهذا النوع :- أ) $y = x^2$ لقيم x الموجبة

ب) $y = 10^x$

جـ) $y = \tan x$ فيما بين $\left(0 , \frac{\pi}{2}\right)$

(٢) أو قد تكون المنحنيات الممثلة للدالة أو أجزاء منها مقعرة لأسفل وترتفع كذلك Concave downwards and rising ، كما فى شكل (٧-٨)

وأمثلة لهذا النوع :- أ) $y = \sqrt{x}$

ب) $y = Log \ x$

جـ) $y = \sin x$ فيما بين $\left(0 , \frac{\pi}{2}\right)$

وفى كلتا الحالتين فإن المنحنى يرتفع **لأعلى** وإلى **اليمين** كلما زادت x

وكما هو واضح من الأشكال فإنه عندما تـزداد x بمقدار ضئيل Δx ، فإن y تزداد بمقدار مناظر مقداره Δy .

وبذلك فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وكذلك نهايتها تكون **موجبة** .

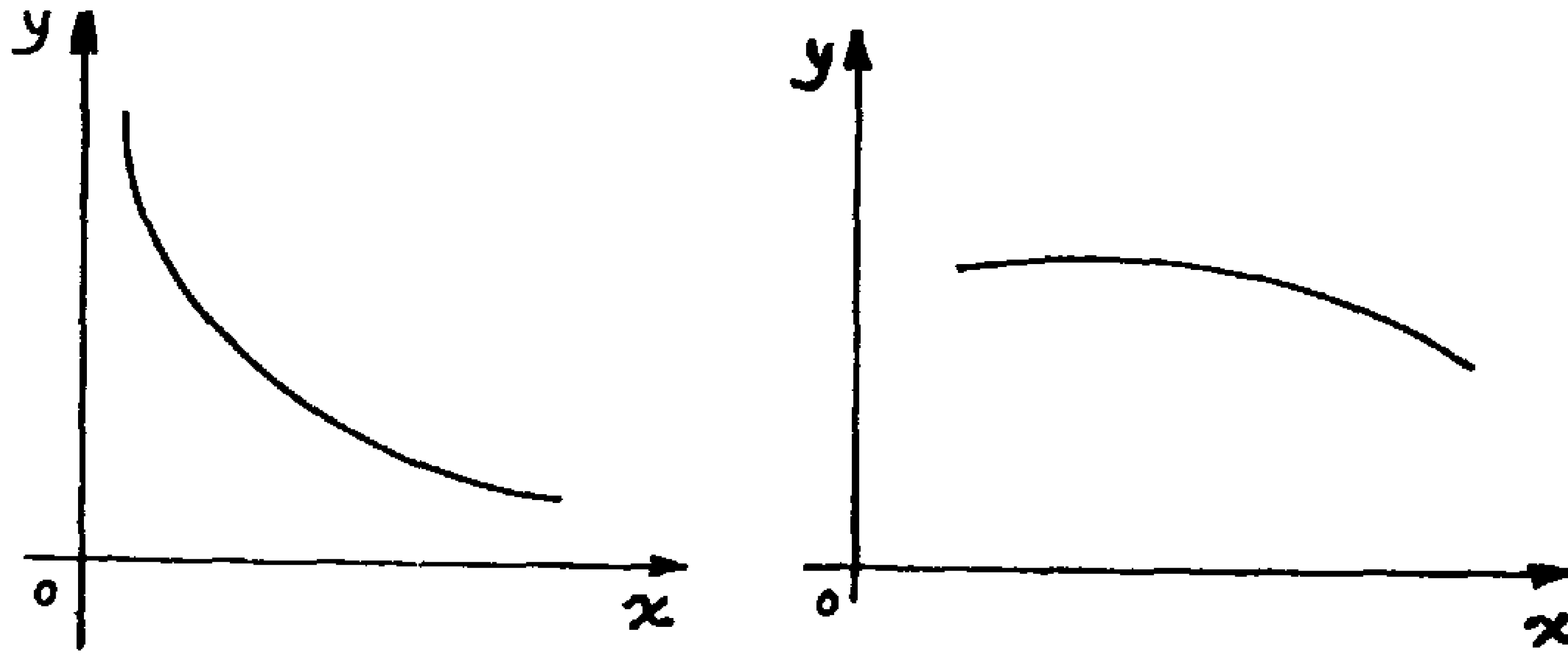
وهندسياً :- فإنه يتضح أن المماس للمنحنى عند النقطة A يصنع زاوية حادة acute angle مع المحور OX

وبذلك فإن الميل والذى يمثله ظل الزاوية θ ($\tan \theta$) يكون **موجباً** ويتضح كذلك أنه فى شكل (٧-٧) فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون **موجبة**

خلاصة :- يُقال أن الدالة $f(x)$ ، دالة متزايدة فى فترة معينة لقيم المتغير المستقل (x) ، إذا كانت $f(x_2) > f(x_1)$ لأى نقطتين متجاورتين فى نفس الفترة وبحيث $x_2 > x_1$ أى أنه إذا حدثت أى زيادة فى x فى خلال هذه الفترة فإنه يصاحبها زيادة مناظرة فى y

٧-٥ :- الدوال المتناقصة **Functions which are decreasing**

وبنفس الطريقة كما فى حالة الدوال المتزايدة فإنه يمكن تمثيلها بالمنحنيات كما فى شكل (٧-٩) ، (٧-١٠) .



شكل (٧-٩) ، **شكل (٧-١٠)**

ويتضح فى كلتا الحالتين أنه إذا زادت قيمة x عند A بمقدار ضئيل مقداره Δx فإن قيمة الدالة تقل .

وبذلك فإن Δy تكون سالبة عندما Δx موجبة وعليه فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وكذلك نهايتها $\frac{dy}{dx}$ تكون **سالبة** .

وكما سبق فهنالك وضعان :-

(١) المنحنى مقعر لأعلى وهابطاً **concave upwards falling** كما فى شكل (٧-٩).

وأمثلة لهذا النوع :-

أ- $y=\frac{1}{x}$

ب- $y=x^2$ (لقيم x السالبة)

جـ- $y=\cot(x)$ بين $\left(o\,,\frac{\pi}{2}\right)$

(٢) المنحنى مقعر لأسفل وهابطاً **concave downwards falling** كما فى شكل (٧-١٠)

وأمثلة لهذا النوع :-

أ- $y=-x^2$ (لقيم x الموجبة)

ب- $y=\sin x$ فيما بين $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

وتكون المماسات المرسومة لكل من هذين المنحنيين ، بحيث تصنع زاوية منفرجة Obtus angle مع محور السينات وبالتالى فإن $(\tan \theta)$ وميل هذا المماس يكون **سالباً**

خـــلاصـــة :-

يُقال أن الدالة $f(x)$ دالة متناقصة فى فترة معينة لقيم المتغير المستقل x إذا كانت $f(x_2)<f(x_1)$ لأى نقطتين متجاورتين x_1 , x_2 فى الفترة المعينة وبحيث $x_2>x_1$ أى أنه كلما حدثت زيادة لـ x فى خلال هذه الفترة فإنه يُصاحبها نقص فى قيمة y .

مثـــال (١) :-

إذا كانت $y=4x^2-20x+2$

فالمطلوب تحديد الفترة التى تكون فيها الدالة y :-

أ)- متزايدة .

ب)- متناقصة .

جـ)- لا متزايدة ولا متناقصة .

الحـــــل :-

يجب أولاً إيجاد قيمة y' أى المشتقة الأولى للدالة :

$$\because \quad y=4x^2-20x+2$$
$$\therefore y' = 8x-20$$

أ)- وتكون الدالة متزايدة عندما $y'>0$

أى عندما

$$(8x-20)>0$$
$$i.e \quad x>2.5$$

ب)- وتكون الدالة متناقصة عندما $y'<0$

أى عندما

$$0>(8x-20)$$
$$i.e \quad x<2.5$$

جـ)- وتكون الدالة لا متزايدة ولا متناقصة عندما $y' = 0$

$\therefore 8x - 20 = 0$

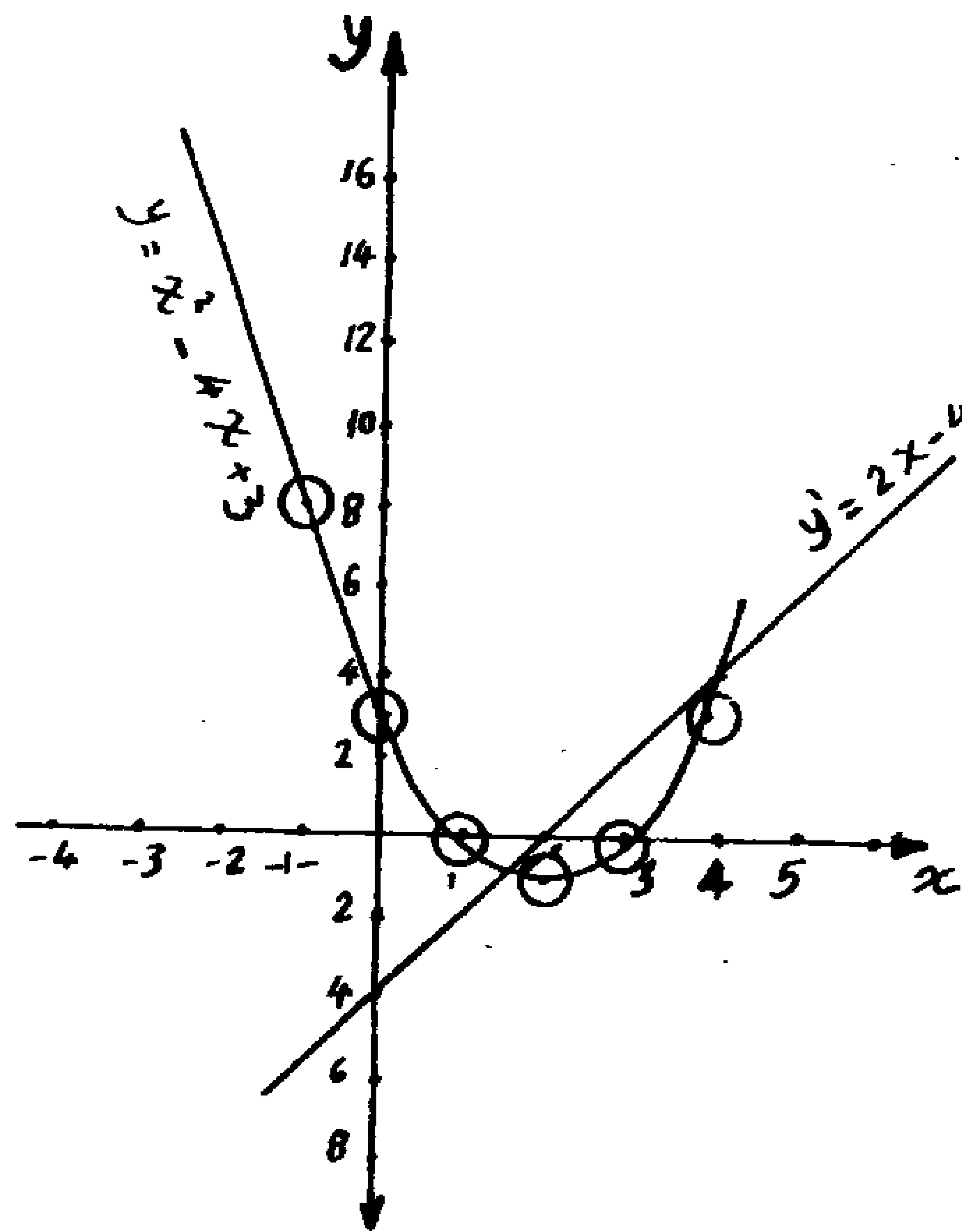
$\therefore \ x = 2.5$

وبذلك فإن الدالة $4x^2 - 20x + 2$ ← { متزايدة عندما $x > 2.5$ ، لا متزايدة ولا متناقصة عندما $x = 2.5$ ، متناقصة عندما $x < 2.5$ }

ملـــحوظة :- يقال أن الدالة $y = f(x)$ دالة ساكنة Stationary أى غير مـتزايدة ولا متناقصة عند النقطة $x = k$ ، إذا كانت قيمة $y' = 0$ عند هذه النقطة كمـا يتضـح فـى الفقرة التالية بالتفصيل .

٧-٦ :- القيـــم الثـــابتـــة Stationary values

ويظهر لنا فى شكل (٧-١١) الحالتان اللتان تم إيضاحهما فى شكلى (٧-٧) ، (٧-٩) .



شكل (٧-١١)

ويوضح شكل (٧-١١) الدالة :- $y = x^2 - 4x + 3$

وقد سبق دراستها فى شكل (٦-١) .

وسوف نتعرض لها بمزيد من الإيضاح فيما يلى :-

وحيث أن $y = x^2 - 4x + 3$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 4$$

والدالة الأخيرة $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ تُمثل خطاً مستقيماً AB فى شكل (٧-١١) ويمكن ملاحظة التغيرات التالية فى كل من المنحنى والدالة وكما يتضح من الرسم :-

(١) عندما تزداد x من $(-\infty \; to \; +2)$ فإن y تتناقص

وقيم $\frac{dy}{dx}$ الممثلة بالخط المستقيم AB تكون سالبة [انظر شكل (٧-٩)]

(٢) عندما تزداد x من $(+2 \; to + \infty)$ فإن y تتزايد

ومن ثم فإن قيم $\frac{dy}{dx}$ تكون موجبة [انظر شكل (٧-٧)]

(٣) عند نقطة C يتوقف المنحنى عن التناقص ثم يبدأ فى الزيادة

وبذلك فإنه عندما $x = 2$ فإن قيمة y لا تتغير لحظياً بل تكون ثابتة

وبذلك فإنه لا يكون هنالك معدل للتغير وتكون $\frac{dy}{dx}$ = صفر

ويقطع الخط المستقيم AB المحور OX عند هذه النقطة $(x = 2)$ ومن ثم فإنه عند $x = 2$ فإنه يقال أن : -

الدالة لها قيمة ثابتة ويُطلق على C بأنها نقطة ثابتة على المنحنى

ويمكن تلخيص الاستنتاجات الهامة السابقة فيما يلى : -

(١) لو أن $x < 2$ فإن y تتناقص ، $\frac{dy}{dx}$ سالبة .

(٢) لو أن $x > 2$ فإن y تتزايد ، $\frac{dy}{dx}$ موجبة

(٣) عندما $x = 2$ عند نقطة C فإن y ولفترة لحظية ، لا هى متزايدة ولا متناقصة ، أى أن الدالة لها قيمة ثابتة عندما $\frac{dy}{dx} = 0$

وسوف نعتبر الآن الدالة : -

$y = 3+2x-x^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2-2x$

ويوضح شكل (٧-١٢) هذه المنحنيات $\left[y = 3+2x-x^2 \ , \ y` = 2-2x\right]$

حيث يمثل الخط المستقيم AB الدالة المشتقة : – $2-2x$

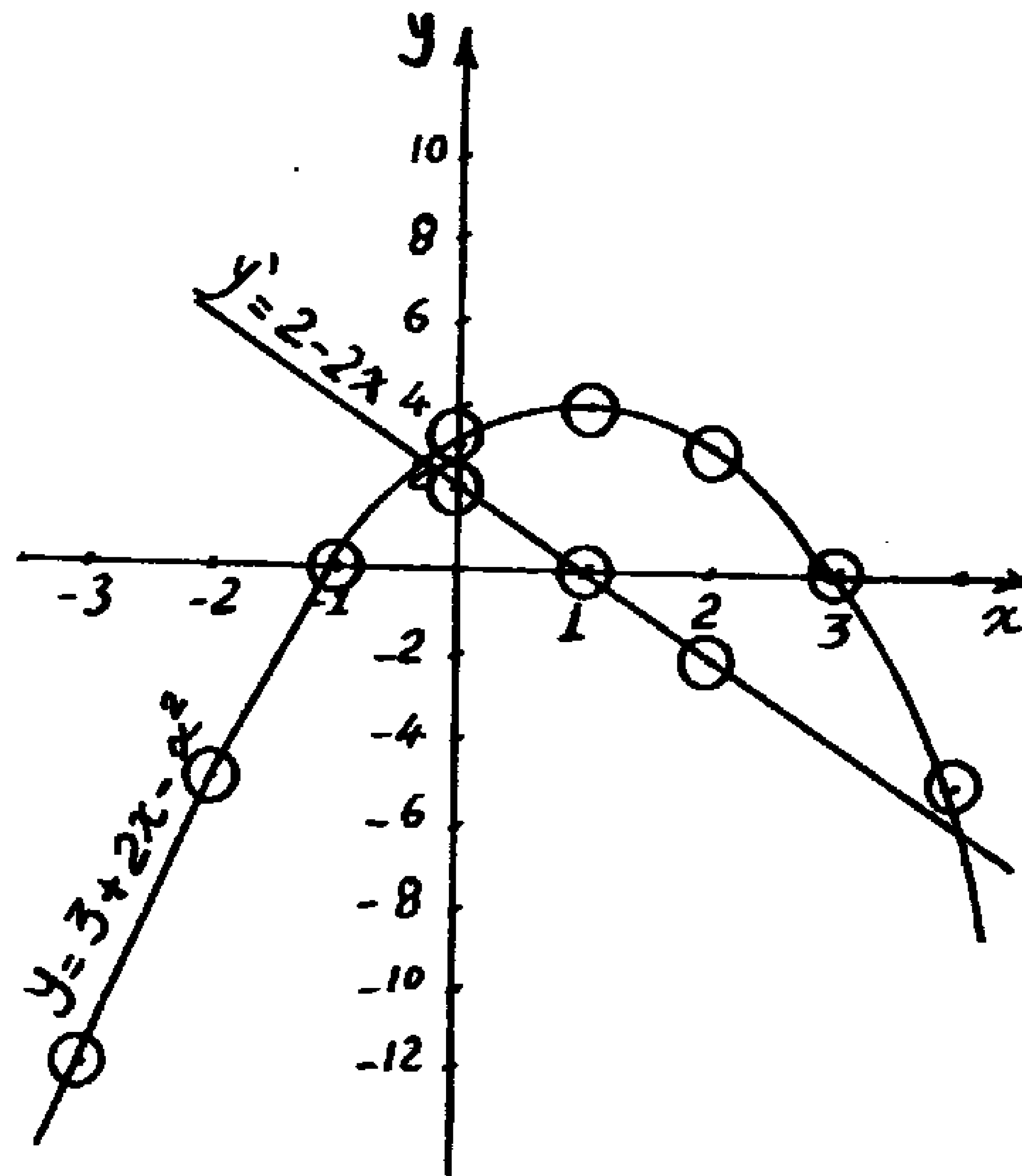
وبدراسة المنحنيات فى الشكل (٧-١٢) وكما سبق فسوف نلاحظ ما يلى : –

١) عندما $x < +1$ ، y متزايدة ، $\frac{dy}{dx}$ موجبة

٢) عندما $x > +1$ ، y متناقصة ، $\frac{dy}{dx}$ سالبة

٣) عندما $x = 1$ (عند نقطة c) فإن y تتوقف عن الزيادة وتبدأ فى التناقص

وبذلك فإن قيمة الدالة عند c تكون ثابتة



شكل (٧ – ١٢)

٧-٧ : - نقط التحول " الانعطاف " Turning Points

إذا ما قمنا بمقارنة النقط ذات القيم الثابتة فى شكل (٧-١١) ، (٧-١٢) [نقطة c فى كل من الشكلين] للمنحنيين : -

$y = x^2 - 4x + 3$

، $y = 3 + 2x - x^2$

فسوف نلاحظ الاختلافات الهامة التالية : -

فى الدالة : - $y = x^2 - 4x + 3$ عند النقطة c (الثابتة) أو الساكنة : -

(١) يتغير شكل المنحنى من مقعر للأعلى وهابطاً إلى مقعر للأعلى (كذلك) وصاعداً كما فى شكل (٧-٧) ، شكل (٧-٩) كما وأن الزاوية θ تتغير من **زاوية منفرجة إلى زاوية حادة مارة بالصفر .**

(٢) قيم الدالة تتناقص قبل وتتزايد بعد (النقطة الساكنة)

(٣) وبالتبعية فإن : - $\frac{dy}{dx}$ تكون سالبة قبل وموجبة بعد (النقطة الساكنة)

وفى الدالة . $y = 3 + 2x - x^2$ عند النقطة الساكنة c : -

(١) يتغير شكل المنحنى من مقعر للأسفل وصاعداً إلى مقعر للأسفل (كذلك) وهابطاً

إلا أن زاوية θ تتغير من زاوية حادة قبل النقطة الساكنة إلى زاوية منفرجة بعد النقطة كما فى شكلى (٧-٨) ، (٧-١٠)

(٢) قيم الدالة تتزايد قبل وتتناقص بعد .

(٣) وبالتبعية فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون موجبة قبل وسالبة بعد .

وبذلك فإنه عند كل من النقطتين : -

(١) تتناقص الدالة قبل وتتزايد بعد أو العكس بالعكس

(٢) $\frac{dy}{dx} = 0$ وتُغير إشارتها

ويُطلق على مثل هذه النقط على منحنى بنقط التحول أو الانعطاف

وسوف نرى فيما يلى بأن كل النقط الساكنة ليست نقط تحول أو انعطاف إلا أنه عند كل من النقط الساكنة ونقط الانعطاف فإن : -

$\frac{dy}{dx}=0$ دائماً ، وهى تُعبر عن سلوك الدالة قبل وبعد هذه النقطة

مثال (١) : - حدد قيم x التى يوجد عندها نقط تحول على المنحنى : -

$$y=2x^2-6x+9$$

$$y^{`}=4x-6$$

الحـــــل :-

وعند نقطة التحول فإن $\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore 4x-6=0$ $\qquad$ $\therefore x=1.5$

ولقيم x الأقل من 1.5 سنجد أن $\frac{dy}{dx}$ تكون سالبة ((وذلك بوضع قيم لـ x أقل من 1.5 فى المعادلة $4x-6=0$))

وبالتالى فإن الدالة متناقصة

وعند قيم x الأكبر من 1.5 $(x>1.5)$ سنجد أن $\frac{dy}{dx}$ تكون موجبة وبالتالى فإن الدالة متزايدة .

وحيث أن الدالة تتناقص قبل النقطة الساكنة وتتزايد بعدها

$\therefore$ هنالك نقطة تحول عند $x=1.5$

مثال (٢) : - حدد نقط التحول (الانعطاف) للدالة : -

$$y=1-2x-x^2$$

الحـــــل :-

$$\because y=1-2x-x^2$$

$$\therefore y^{`}=-2-2x$$

وللقيم الثابتة أو عند النقط الساكنة تكون $y^{`}=0$

$$\therefore -2-2x=0$$

$$\therefore x=-1$$

أى أنه توجد نقطة ساكنة عند $x=-1$.

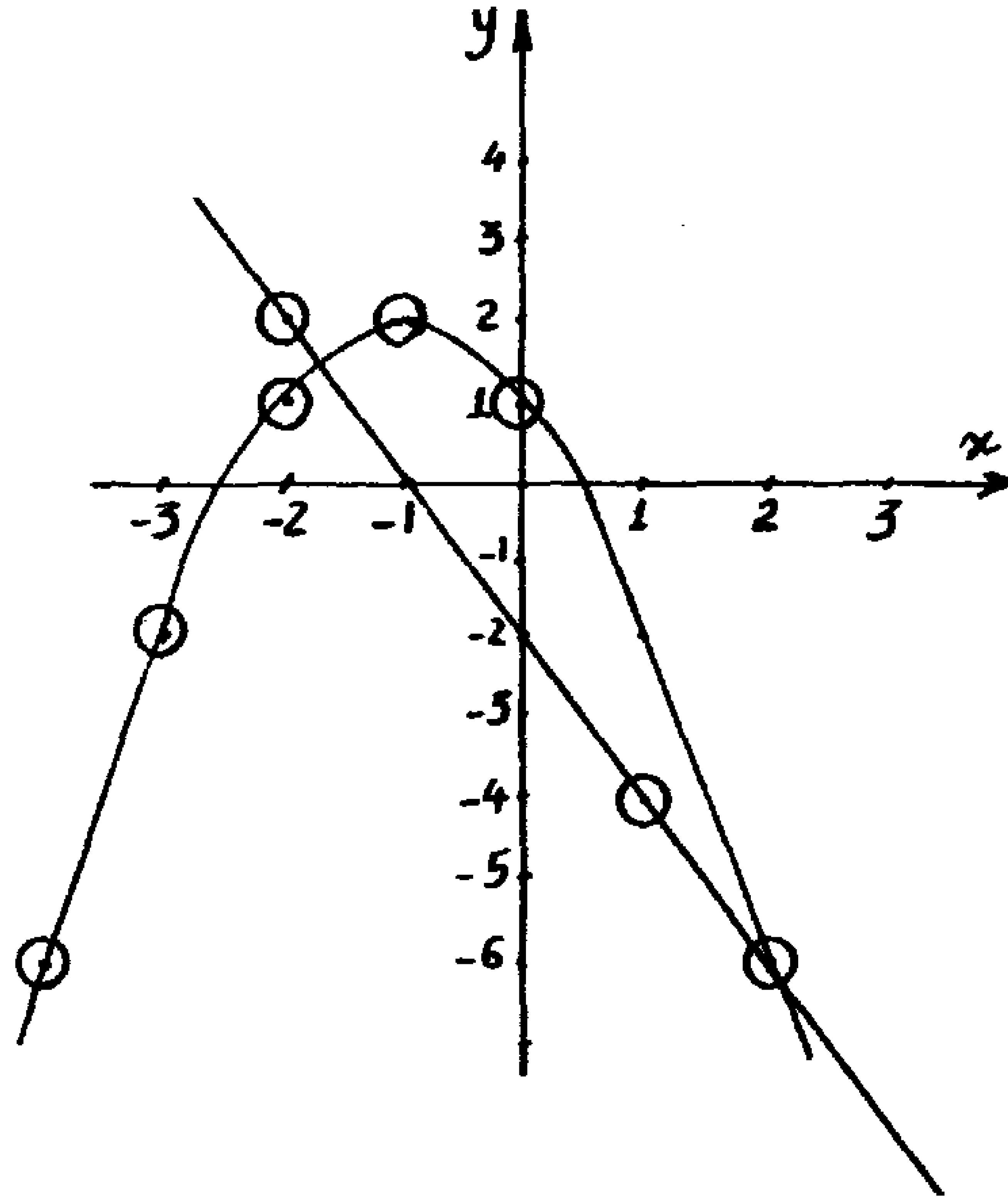
فإذا كانت $x < -1$ فإننا نجد $y' = \frac{dy}{dx}$ تكون موجبة وتتناقص قيمة y .

وإذا كانت $x > -1$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون سالبة وتتناقص قيمة y

∴ y تتزايد قبل وتتناقص بعد النقطة الساكنة

∴ فالنقطة الساكنة هى نقطة تحول (نهاية عظمى أو صغرى) كذلك عندما $x = -1$ ،

أنظر شكل (٧ - ١٣) .



شكل (٧ - ١٣)

٧ - ٨ : - القيم العظمى والصغرى Maximum and minimum values

هنالك فرق غاية فى الأهمية بين نقط التحول للدالتين السابق شرحهما ألا وهما :-

$y = x^2 - 4x + 3$

، $y = 3 + 2x - x^2$

وهذه الفروق كالتالى : -

(١) فى الدالة : $y = x^2 - 4x + 3$ المبينة فى شكل (٧-١١)

نجد أن نقطة التحول c هى أسفل نقطة فى المنحنى أى أن عندها تكون أقل قيمة لـ y

فإذا أخذنا مجموعة من النقط قرب c فى أيٍ من الاتجاهين يميناً أو يساراً ، فسوف نجد أن قيم الدالة عند هذه النقط أكبر من قيمتها عند c

ويُطلق على مثل هذه النقطة بنقطة نهاية صغرى **Minimum Point**

ويقال أن للدالة قيمة صغرى عند هذه النقطة .

وقد اتضح مما سبق أن قيم الدالة تتناقص قبل الوصول لنقطة التحول هذه (النهاية الصغرى) وتتزايد بعدها .

(٢) فى الدالة : $y=3+2x-x^2$ المبينة فى شكل (٧-١٢)

نجد أن نقطة التحول c هى أعلى نقطة فى المنحنى أى أن عندها تكون أكبر قيمة لـ y

فإذا أخذنا مجموعة من النقط قرب c فى أيٍ من الاتجاهين (يميناً أو يساراً) فسوف نجد أن قيم الدالة عند هذه النقط أقل من قيمتها عند c

ويُطلق على مثل هذه النقطة ، بنقطة نهاية عظمى **Maximum Point**

ويقال أن للدالة قيمة عظمى عند هذه النقطة .

وقد وضح مما سبق أن قيم الدالة تتزايد قبل الوصول لنقطة التحول هذه (النهاية العظمى) وتتناقص بعدها .

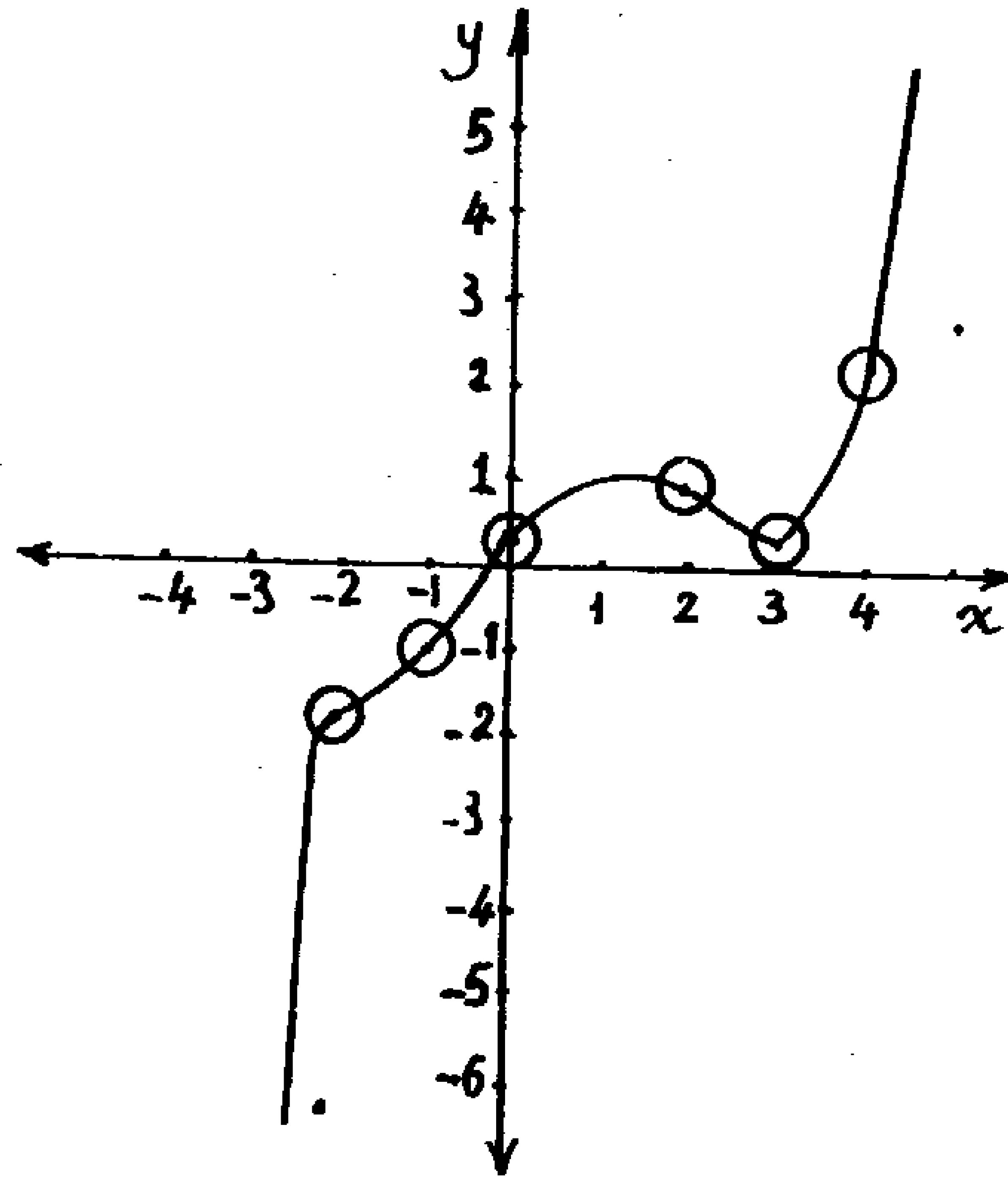
وباختصار [**الدالة $f(x)$ يكون لها نهاية عظمى (أو صغرى) عند النقطة $x=a$ إذا كانت قيمة $f(a)$ أكبر من (أو أصغر) من جميع القيم المجاورة**]

ملاحظة : - يمكن ألا تكون النهاية العظمى للدالة هى أكبر قيمها وكذلك ألا تكون النهاية الصغرى للدالة هى أقل قيمها

ويظهر ذلك من الدالة : - $3y=x^3-3x^2+1$

أو $y=\frac{x^3}{3}-x^2+\frac{1}{3}$

أنظر شكل (٧-١٤) .



شكل (٧ – ١٤)

فهذه الدالة لها نهاية عظمى $x = 0$ [النقطة $A\left(0,\frac{1}{3}\right)$ ، أعلى فى المستوى من جميع النقط المجاورة لها] .

كما وأن لها نهاية صغرى عند $x = 2$ [النقطة $B(2,-1)$ ، أدنى فى المستوى من جميع النقط المجاورة لها] .

وعلى ذلك فإن الدالة فى الفترة المحدودة $x[0,3]$ لها نهاية واحدة عظمى ونهاية واحدة صغرى .

إلا أننا لو نظرنا للدالة فى الفترة $x[-1,4]$ ، سنرى أن النهاية العظمى عند $x = 0$ ، $y = f(0) = \frac{1}{3}$ ، ليست هى أكبر قيمة للدالة فى الفترة $(-1,4)$ لأنه عندما تكون $x > 3$ فإن : –

$$f(x) > \frac{1}{3}$$

حيث أنه إلى يمين النقطة c يقع المنحنى فوق نقطة A

مثال : ادرس الدالة $y = (x-1)(x-2)(x-3)$

الحـــــل :-

هذه الدالة تساوى الصفر عندما :

$$(x-1)=0 \;\;,\;\; (x-2)=0 \;\;,\;\; (x-3)=0$$

أى عندما $x = 1 , 2 , 3$

وبالتالى فإن المنحنى يقطع محور السينات عند هذه القيم لـ(x)فإذا كانت الدالة متصلة ، أى أن التغيرات الصغيرة فى x ينشأ عنها تغيرات صغيرة مناظرة فى y فإنه :-

[لابد وأن يكون بين أى نقطتين متتاليتين من نقـط تقـاطع المنحنـى مـع محـور OX ، نقطة تحول سواء عظمى أو صغرى]

وعلى هذا فللدالة السابقة يوجد ثلاثة نقط لتقـاطع الدالـة مـع محـور OX وبالتـالى فإنـه يكون هنالك نقطتا تحول : -

(١) فيما بين $x=1$ ، $x=2$

(٢) فيما بين $x=2$ ، $x=3$

ويتضح ذلك من التحليل الآتى : -

(١) لو $x<1$ فإن y دائماً سالبة

(٢) لو $1<x<2$ فإن y موجبة

(٣) لو $2<x<3$ فإن y سالبة

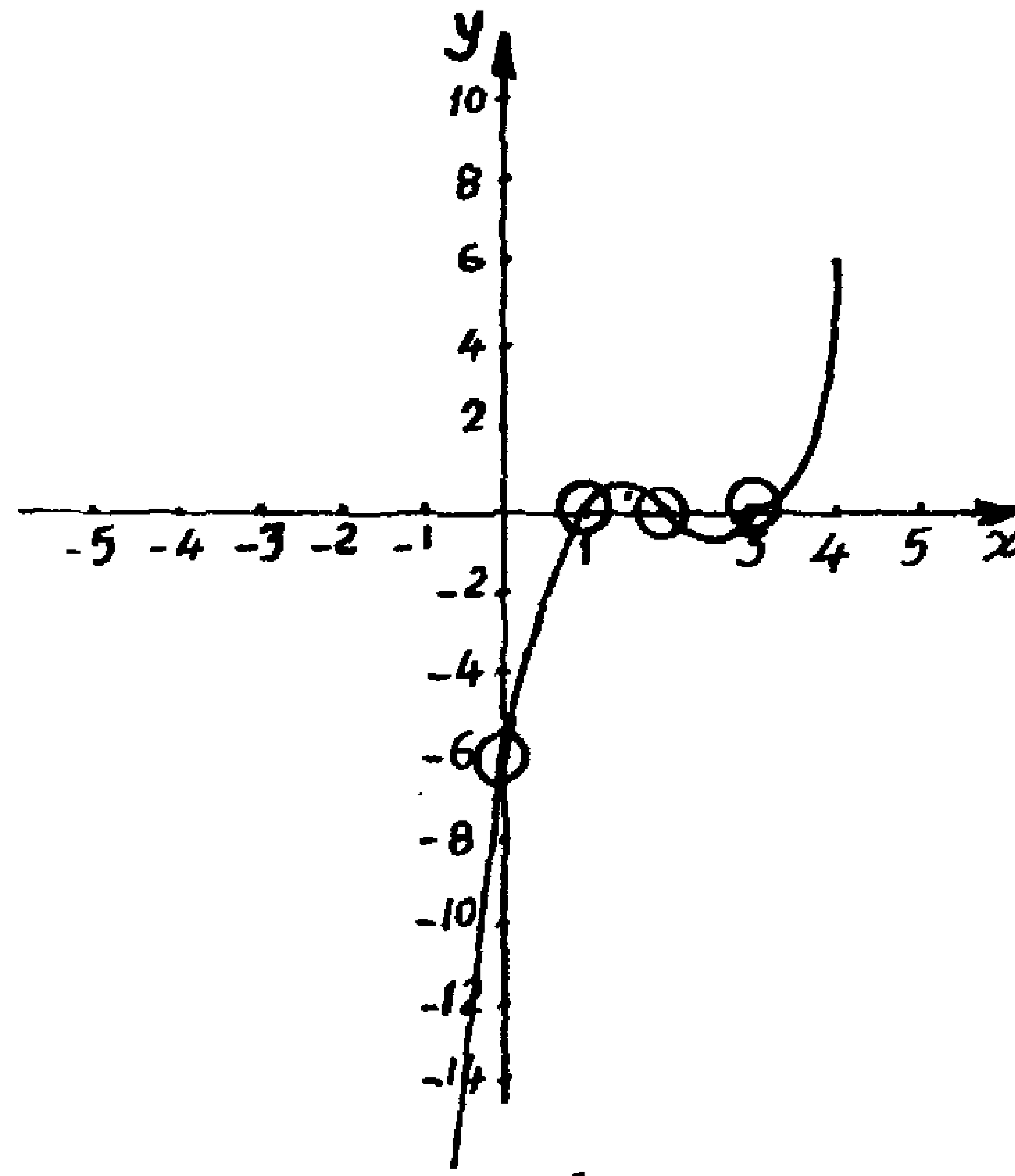
(٤) لو $x>3$ فإن y دائماً موجبة .

والنقطتان (٣) ، (٤) فى التحليل السابق تدعونا إلى إستنتاج ما يلى : -

(١) توجد نهاية عظمى بين $x=1$ ، $x=2$

(٢) توجد نهاية صغرى بين $x=2$ ، $x=3$

ويمكن رسم الدالة بعد عمل جدول مناسب بين قيم x ، y المناظرة لها



شكل (٧-١٥)

ويقتضى رسم هذه الدالـة مزيـد مـن الحسـابات المطولـة لتحديـد نقـط النهايـة العظمـى والصغرى

إلا انه باستخدام التفاضل ، يمكن تسهيل العملية إلى حد كبير فالدالة : -

$$y=(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$=x^3-6x^2+11x-6$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=3x^2-12x+11.$$

ومن المعلوم أنه عند نقط التحول فإن $\frac{dy}{dx}=0$ (المماس أفقياً)

$$\therefore 3x^2-12x+11=0$$

ومنها يمكن الحصول على قيمتى (جذرى) x وهما : -

$x_1=1.42$ تقريباً

$x_2=2.58$ ، تقريباً

وهى النقط $A^{`}, B^{`}$ على المنحنى

وبالتعويض عن قيم x هذه فى المعادلة الأصلية نحصل على قيم y المناظرة

$$\therefore y_1=0.385 \qquad at \qquad x_1=1.42$$

$at\ (A^{`})$		نهاية عظمى
، $y_2 = -0.385$	at	$x_2 = 2.58$
$at\ (B^{`})$		نهاية صغرى

٧-٩ : - طرق التمييز بين النهايات العظمى والصغرى : -

وتوجد ثلاث طرق ، نابعة من الاستنتاجات السابق التعرض لها فى هذا الباب ، إلا إنـه بعد معرفة هذه الطرق سنكتفى بطريقتين منها فقط كما سيرد فيما بعد : -

أولاً : - تغيرات الدالة قرب نقط التحول

Changes in the function near the turning points

(١) نقطة النهاية العظمى هى النقطة التى تكون عندها قيمة الدالة أكبر من قيمتها عنـد قيم x الأكبر قليلاً أو الأقل قليلاً من قيمة x لنقطة التحول

(٢) نقطة النهاية الصغرى تُعرف وبالمثل بأنها النقطة التى تكون عندها قيمة الدالة أصغر من قيمتها عند قيم x الأكبر قليلاً أو الأقل قليلاً من قيمة x لنقطة التحول

وبناءً على هذه التعريفات فإنه يتم التعويض بقيم x الأكبر قليلاً والأقل قليـلاً مـن قيمـة x عند نقطة التحول ، فى الدالة الأصلية وبمقارنة هذه النتائج بالحالة (١) نهايـة عظمـى أو بالحالة (٢) نهاية صغرى ، يمكن تحديد نوع النقطة " نقطة التحول "

ويمكن التعبير عن هذا بصورة عامة كالتالى : -

نفترض أن $f(x)$ دالة فى (x)

، نفترض أن a هى قيمة x عند نقطة التحول والمطلوب معرفة نوعيتها هل هى عظمى أم صغرى

$\therefore$ $f(a)$ هى قيمة الدالة عند نقطة التحول هذه

ونفـترض أن $f(a+h)$ ، $f(a-h)$ هـى قيمتـى الدالـة بـالقرب مـن النقطــة (يمينهـا ويسارها) وعليه فإن : -

النهاية العظمى تكون عندما $f(a)$ أكبر من كـل مـن $f(a+h)$ ، $f(a-h)$ أى أكـبر من قيمها بالقرب من $x = a$

وبالمثل فإن النهاية الصغرى تكون عندما $f(a)$ أصغر من كل من $f(a+h)$ ، $f(a-h)$ أى أصغر من قيمها بالقرب من $x=a$

ثانياً :-التغيرات فى قيمة المشتقة الأولى (المعامل التفاضلى) قبل وبعد نقطة التحول

Changes in the value , sign of the differential Coefficient before and after the turning point

(١) النهاية العظمى : - رأينا فيما سبق أن الدالة تزيد قبلها وتقل بعدها

[$\therefore \frac{dy}{dx}$ **يجب أن تكون موجبة قبلها وسالبة بعدها**]

ولمعرفة هذا نعوض فى المشتقة الأولى بقيم x الأكبر قليلاً والأقل قليلاً عن قيمة x عند هذه النقطة : -

[فإذا كانت المشتقة الأولى تُغير إشارتها من موجب قبلها إلى سالب بعدها مارة بالصفر فإن النقطة تكون نهاية عظمى]

فى حين أن $\frac{dy}{dx}$ عند هذه النقطة = صفر

(٢) النهاية الصغرى : - وبالمثل نجد هنا أن [$\frac{dy}{dx}$ **تكون سالبة قبلها وموجبة بعدها**]

فإذا ما عوضنا فى المشتقة الأولى بقيم x الأكبر قليلاً والأقل قليلاً من قيمة x عند هذه النقطة : -

[فإذا كانت $\frac{dy}{dx}$ تغير إشارتها من سالب إلى موجب مارة بالصفر فإن النقطة تكون نهاية صغرى]

فى حين أن $\frac{dy}{dx}$ عند هذه النقطة = صفر

ثالثاً : - إشارة المشتقة الثانية Sign of the second differential coefficient

وحيث أن $\frac{d^2y}{dx^2}$ هى مشتقة المقدار " $\frac{dy}{dx}$ " وبالتالى فهى تُحدد التغيرات فى الدالة $\frac{dy}{dx}$ أى التغيرات فى المشتقة الأولى كالتالى : -

(١) النهاية العظمى : -

أ - الدالة تزيد قبلها وتقل بعدها

ب - ∴ $\frac{dy}{dx}$ تكون موجبة قبلها وسالبة بعدها

جـ - ∴ $\frac{dy}{dx}$ تتناقص عند النهاية العظمى

ء - ∴ $\frac{d^2y}{dx^2}$ يجب أن تكون سالبة

(٢) النهاية الصغرى : -

أ - الدالة تقل قبلها وتزيد بعدها

ب - ∴ $\frac{dy}{dx}$ تكون سالبة قبلها وموجبة بعدها

جـ - ∴ $\frac{dy}{dx}$ تتزايد عند النهاية الصغرى

ء - ∴ $\frac{d^2y}{dx^2}$ يجب أن تكون موجبة

٧-١٠ : - الإيضاح البيانى **Graphical illustrations**

ولإيضاح ما سبق بيانياً فإننا نبدأ فى دراسة الدالة السابق التعرض لها عند إيضـاح نقـط النهاية العظمى والصغرى وهى : -

$$f(x)=(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$$

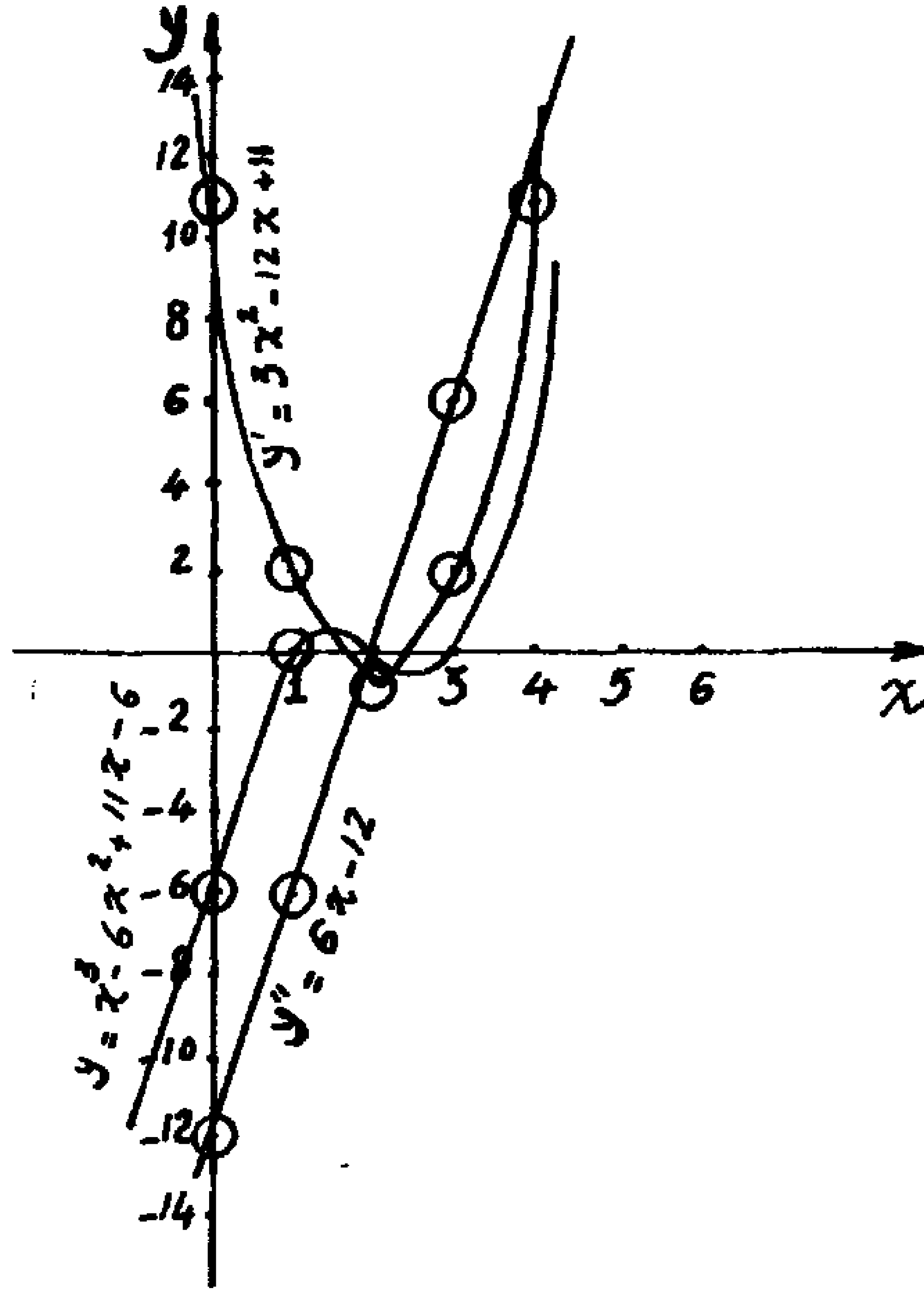
، إرجع لشكل ← (٧ - ١٥)

$$\therefore f(x)=x^3-6x^2+11x-6 \qquad \text{.......... (1)}$$

$$، f^{`}(x)=3x^2-12x+11 \qquad \text{.......... (2)}$$

$$، f^{``}(x)=6x-12 \qquad \text{.......... (3)}$$

وشكل (٧ - ١٦) يوضح هذه المنحنيات الثلاث .



شكل (٧ – ١٦)

وللبحث عن نقط النهاية العظمى والصغرى ، نضع $f`(x) = 0$ لأن المشتقة الأولى لأى دالة عندها = صفر

$\therefore 3x^2 - 12x + 11 = 0$

$\therefore x_1 = 1.42 \quad , \quad x_2 = 2.58$

وتُمثل هذه القيم النقط A , B على المحور السينى ويقابلها النقط $A` , B`$ كنقط تحول على المنحنى وكما سبق فإن قيمة الدالة عند :

$A` = 0.385 \quad , \quad B` = -0.385$

وباستخدام طريقة المشتقة الثانية (الطريقة ثالثاً السابقة) فى تحديد ماهية نقط التحول وهل هى عظمى أم صغرى ، يمكننا تحديد نوع النهاية تماماً

فإذا عوضنا فى $f``(x)$ بقيمتى x ،

$$\because \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12$$

(١) عندما $x = 1.42$

$$\therefore 6x - 12 = 6 \times 1.42 - 12 = -3.48$$

أى أن $\frac{d^2y}{dx^2}$ سالبة

$\therefore$ $\grave{A}$ لابد وأن تكون نقطة نهاية عظمى

(٢) عندما $x = 2.58$

$$\therefore 6x - 12 = 6 \times 2.58 - 12 = +3.48$$

$\therefore$ $\grave{B}$ لابد وأن تكون نقطة نهاية صغرى .

وبالرجوع إلى المنحنيات الممثله للدوال الثلاث : $f^{``}(x)$ ، $f^{`}(x)$ ، $f(x)$ نجد الآتى

أ - عند نقطة النهاية العظمى $\grave{A}$: -

(١) $f^{`}(x) = 0$ وهى شرط ضرورى عند نقطة التحول

(٢) $f(x)$ تزيد قيمتها قبل نقطة $\grave{A}$ وتقل بعدها

(٣) $f^{`}(x)$ تكون موجبة قبل $\grave{A}$ وسالبة بعدها

(٤) $\therefore$ $f^{`}(x)$ متناقصة

(٥) $\therefore$ $f^{``}(x)$ ، أى $\frac{d^2y}{dx^2}$ سالبة

ب - عند نقطة النهاية الصغرى $\grave{B}$: -

(١) $f^{`}(x) = 0$ وهى شرط ضرورى عند نقطة التحول

(٢) $f(x)$ تقل قيمتها قبل نقطة $\grave{B}$ وتزيد بعدها

(٣) $f^{`}(x)$ تكون سالبة قبل $\grave{B}$ وموجبة بعدها

(٤) $\therefore$ $f^{`}(x)$ متزايدة

(٥) $\therefore$ $f^{``}(x)$ ، أى $\frac{d^2y}{dx^2}$ موجبة

ويوضح شكل (٧ - ١٦) كل هذه الاستنتاجات

ومن كل ما سبق يتضح أن الطريقة المتبعة فى (أولاً) لتحديد نقط النهاية العظمى والصغرى يمكنها أن تدلنا بالرغم من أنها مطولة كما أن الطريقة (ثانياً) مجهدة كذلك أما الطريقة المتبعة فى (ثالثاً) وهى طريقة المشتقة الثانية فهى الأسهل

٧ - ١١ : - أمثلة محلولة : -

(١) أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة : -

$y=2x^2-6x+3$

الحـــــل :-

$\frac{dy}{dx}=4x-6$

وعند نقط التحول أو نقط النهاية العظمى والصغرى فإن : - $\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore 4x-6=0 \qquad \therefore x=1.5$

∴ توجد نقطة تحول (نهاية عظمى أو نهاية صغرى) على المنحنى عندما $x=1.5$

ولتحديد ما إذا كانت نهاية عظمى أو صغرى : -

، حيث أن $\frac{dy}{dx}=0$ أى $4x-6=0$: -

(١) إذا كانت $x<1.5$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون سالبة

(٢) إذا كانت $x>1.5$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون موجبة

∴ $\frac{dy}{dx}$ تزيد بزيادة x

وبإستخدام الطريقة الثالثة فإن y يكون لها قيمة صغرى عندما $x=1.5$

(٢) ادرس نقط النهاية العظمى والصغرى للدالة :-

$y=6-x-x^2$

ثم حدد كل منها

الحـــــل :-

$\because \quad y=6-x-x^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-1-2x$

وعند نقط النهاية العظمى والصغرى فإن : $\frac{dy}{dx}$ تساوى الصفر

$\therefore\ -1-2x=0 \qquad \therefore\ x=-\frac{1}{2}$

a) فإذا كانت $x<-\frac{1}{2}$ فإن $(-1-2x)$ أو $\frac{dy}{dx}$ تكون موجبة

b) وإذا كانت $x>-\frac{1}{2}$ فإن $(-1-2x)$ أو $\frac{dy}{dx}$ تكون سالبة

أى أن $\frac{dy}{dx}$ تتناقص بتزايد x

وباستخدام الطريقة (ثانياً) وهى طريقة $y`$ فإن y تكون لها قيمة عظمى عندما

$x=-\frac{1}{2}$

c) $\frac{d^2y}{dx^2}=-2$ وهى سالبة دائماً

وبواسطة الطريقة (ثالثاً) وهى طريقة المشتقة الثانية $y``$ ، تكون النقطة عبارة عن نهاية عظمى .

(٣) أوجد نقط النهاية العظمى والصغرى على المنحنى :-

$y=x^3-6x^2+9x-3$

ثم حدد كل منها وقيم الدالة حينئذ ؟

الحــــــل :-

$\because\ y=x^3-6x^2+9x-3$

$\therefore y`=3x^2-12x+9$

$y``=6x-12$

ثم نضع $y`=0$ ونحل المعادلة فى x :-

$\therefore 3x^2-12x+9=0$

$\therefore\ x^2-4x+3=0$

$\therefore (x-1)\,(x-3)=0$

$\therefore\ x_1=1 \quad , \quad x_2=3$

أى أنه توجد نقطتا تحول أو نقطتا نهاية عندما : $x=3$ ، $x=1$ وسوف نستخدم الطريقة المتبعة فى (ثالثاً) وهى طريقة المشتقة الثانية فى تحديد نوعية هذه النهاية ، عظمى أم صغرى .

$\because y'' = 6x-12$ ،

$\therefore$ عندما $x=1$ فإن :-

$y'' = 6\times1-12=-6=(-)ve$

وعندها تكون نقطة نهاية عظمى لأنها سالبة $ve(-)$

، عندما $x=3$ فإن :-

$y'' = 6\times3-12=6=(+)ve$

وعندها تكون نقطة نهاية صغرى لأنها موجبة $ve(+)$

$\therefore$ فلهذه الدالة أو لهذا المنحنى ، نهاية عظمى عند $x=1$ ، ونهاية صغرى عند $x=3$ وقيم الدالة حينئذ كالتالى :

$y=f(x)=f(1)=1-6+9-3=+1$

، $f(3)=27-54+27-3=-3$

(٤) قذف جسم رأسياً إلى أعلى بسرعة إبتدائية قدرها $8m/\sec$ فإذا كانت المسافة s التى قطعها الجسم بعد t ثانية تُعطى بالعلاقة : $s=8t-4.9t^2$

فأوجد أقصى ارتفاع يمكن للجسم أن يصل له والزمن اللازم لذلك .

الحـــــل :-

$\because \quad s=8t-4.9t^2$

$\therefore \frac{ds}{dt}=8-9.8t$

وعند أقصى مسافة فإن $\frac{ds}{dt}$ تساوى الصفر

[عند أقصى مسافة يتوقف الجسم عن الصعود ويسكن لحظياً أى تُصبح سرعته صفراً ، أى $0=\frac{ds}{dt}$ ثم يبدأفى الهبوط]

$\therefore\ 8-9.8t=0 \qquad \therefore\ t=\dfrac{8}{9.8}=0.816\,\text{sec.}$

، $\dfrac{d^2s}{dt^2}=-9.8$

وواضح أنها سالبة دائماً

∴ فمقدار المسافة s يكون نهاية عظمى بعد زمن مقداره 0.816sec.

وبالتعويض فى المعادلة :-

$\therefore S=8\times0.816-4.9\times0.666$

$=6.528-3.263 \ \cong 3.265\ meter$

(٥) إذا كانت تكلفة التصنيع بالجنيه لكابل كهربائى طولـه كيلـو متر واحـد تُعطـى بالعلاقة : $c=\dfrac{140}{x}+500\ x$

حيث :

x مساحة مقطع الكابل بالسنتيمتر المربع ، c التكلفة بالجنيه

فأوجد :

مساحة المقطع التى تكون عندها التكلفة أقل ما يمكن

وما هى أقل تكلفة للكيلو متر الطولى الواحد .

الحــــــل :-

$\because\ \ c=\dfrac{140}{x}+500\ x$

$\therefore \dfrac{dc}{dx}=-\dfrac{140}{x^2}+500$

وعندما تكون c أقل ما يمكن (أو أكبر ما يمكن) فإن :-

$\dfrac{dc}{dx}=0$

$\therefore -\dfrac{140}{x^2}+500=0$

$\therefore\ \ x^2=\dfrac{140}{500}=\dfrac{28}{100}$

$\therefore x=\sqrt{0.28}=\pm0.529\ \ cm^2$ تقريباً

وفى موضوعنا هذا فإن الجذر السالب (0.529-) عديم المعنى ولمعرفة ما إذا كانت قيمة x المساوية لـ 0.529+ ، تعطـــى أكـــبر أو أقل قيـــم ، تستـخدم الطريقـة (الثالثـة) أى طريقة y''

$$c'' = \frac{d^2c}{dx^2} = \frac{280}{x^3} \text{ ،}$$

فإذا عوضنا بقيمة $x = 0.529$ فإن $\frac{d^2c}{dx^2}$ تكون موجبة .

∴ فالتكلفة تكون أقل ما يمكن (نهاية صغرى) عندما :

$$x = 0.529 \quad cm^2$$

وبالتعويض بقيمة x فى المعادلة

$$\therefore c = \frac{140}{(0.529)} + 500 \times 0.529$$

$$= 264.65 + 264.50 = 529.15 \quad L.E$$

(٦) إذا كانت $6y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 900$

تمثل الدالة $y = f(x)$ **فى المتغير** x **، فحدد نقط النهايات العظمى والصغرى لهـذه الدالة باستخدام المشتقة الأولى فقط .**

الحـــــل :-

$$\because \quad y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 150$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^2 - x - 6$$

وعند نقط النهاية بنوعيها تكون $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore x^2 - x - 6 = 0$$

$$\therefore (x+2)\,(x-3) = 0$$

$$\therefore x_1 = -2 \quad , \quad x_2 = 3$$

∴ توجد نقطتا نهاية عظمى وصغرى عند $x = -2 \quad , \quad x = 3$

أولاً عند :- $[x = -2]$ **:-**

نعتبر نقطتين على يمين ويسار $x = -2$ وقريباً منها وهما $x = -2.1 \ , \ x = -1.9$

وعندما $x=-2.1$:

$$\therefore y` = (-2.1)^2 - (-2.1) - 6$$
$$= 4.41 + 2.1 - 6 = +0.51 (+)ve$$

وعندما $x=-1.9$:

$$\therefore y` = (-1.9)^2 - (-1.9) - 6$$
$$= 3.61 + 1.9 - 6 = -0.49 (-)ve$$

$\therefore$ $y`$ فى الحالتين تغير إشارتها من $(+ve)$ إلى $(-ve)$

$\therefore$ عند $x=-2$ توجد نهاية عظمى .

ثانيـاً : عند $[x=3]$:-

نعتبر نقطتين على يمين ويسار $x=3$ وهما : $x=2.9$, $x=3.1$

فعندما $x=2.9$:-

$$\therefore y` = (2.9)^2 - (2.9) - 6$$
$$= 8.41 - 8.9 = -0.49 \ (-ve)$$

وعند $x=3.1$:-

$$y` = (3.1)^2 - (3.1) - 6$$
$$= 9.61 - 9.1 = 0.51 \ (+ve)$$

اى أن $y`$ تُغير إشارتها من $(-)$ إلى $(+)$

$\therefore$ عند $x=3$ توجد نهاية صغرى .

(٧) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}$$

الحـــــل :-

حيث أنه لم يذكر الطريقة الواجب اتباعها لتحديد نقط النهايات لذلك فسنستخدم طريقة المشتقة الثانية لأنها الأسهل والأسرع فى تحديد المطلوب .

$\because\ y=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}$

$\therefore y^{`}=x^2-5x$

، $y^{``}=2x-5$

والشرط اللازم توفره (ولكنه ليس بالشرط الأكيد) عند نقط النهايات هو $y^{`}=0$

$\therefore\ y^{`}=x^2-5x=0$

$\therefore\ x\,(x-5)=0 \qquad \therefore\ x_1=0\ ,\ x_2=5$

أما الشرط الكافى لتحديد نوع النهاية فهو إيجاد قيمة $y^{``}$ ومعرفة إشارتها

١) عندما $x=0$:

(سالبة) $y^{``}=2x-5=2\times0-5=-5$

$\therefore$ عندما $x=0$ توجد نهاية عظمى

٢) عندما $x=5$

(موجبة) $\therefore\ y^{``}=2x-5=2\times5-5=5$

$\therefore$ عندما $x=5$ توجد نهاية صغرى

(٨) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة :

$$y=\frac{3}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3$$

الحـــــل :-

$y^{`}=3x^3-3x$

، $y^{``}=9x^2-3$

والشرط اللازم هو :- $y^{`}=0$

$\therefore\ 3(x^3-x)=0 \qquad \therefore \qquad 3x(x^2-1)=0$

$\therefore 3x(x-1)(x+1)=0$

$\therefore$ نقط التحول أو نقط النهايات العظمى والصغرى تكون عندما :-

$x_1=0\ ,\ x_2=1\ ,\ x_3=-1$

والشرط الكافى هو إيجاد قيمة $y^{``}$ ومعرفة إشارتها :

$y^{``}=9x^2-3$

عندما $x=0$:

سالبة $y'' = 9\times 0 - 3 = -3$

∴ عندما $x=0$ توجد نقطة نهاية عظمى .

وعند $x=+1$:

موجبة $y'' = 9\times(1)^2 - 3 = 6$

∴ عندما $x=+1$: تكون نهاية صغرى

وعندما $x=-1$:

موجبة $y'' = 9\times(-1)^2 - 3 = 6$

∴ عندما $x=-1$: تكون نهاية صغرى كذلك

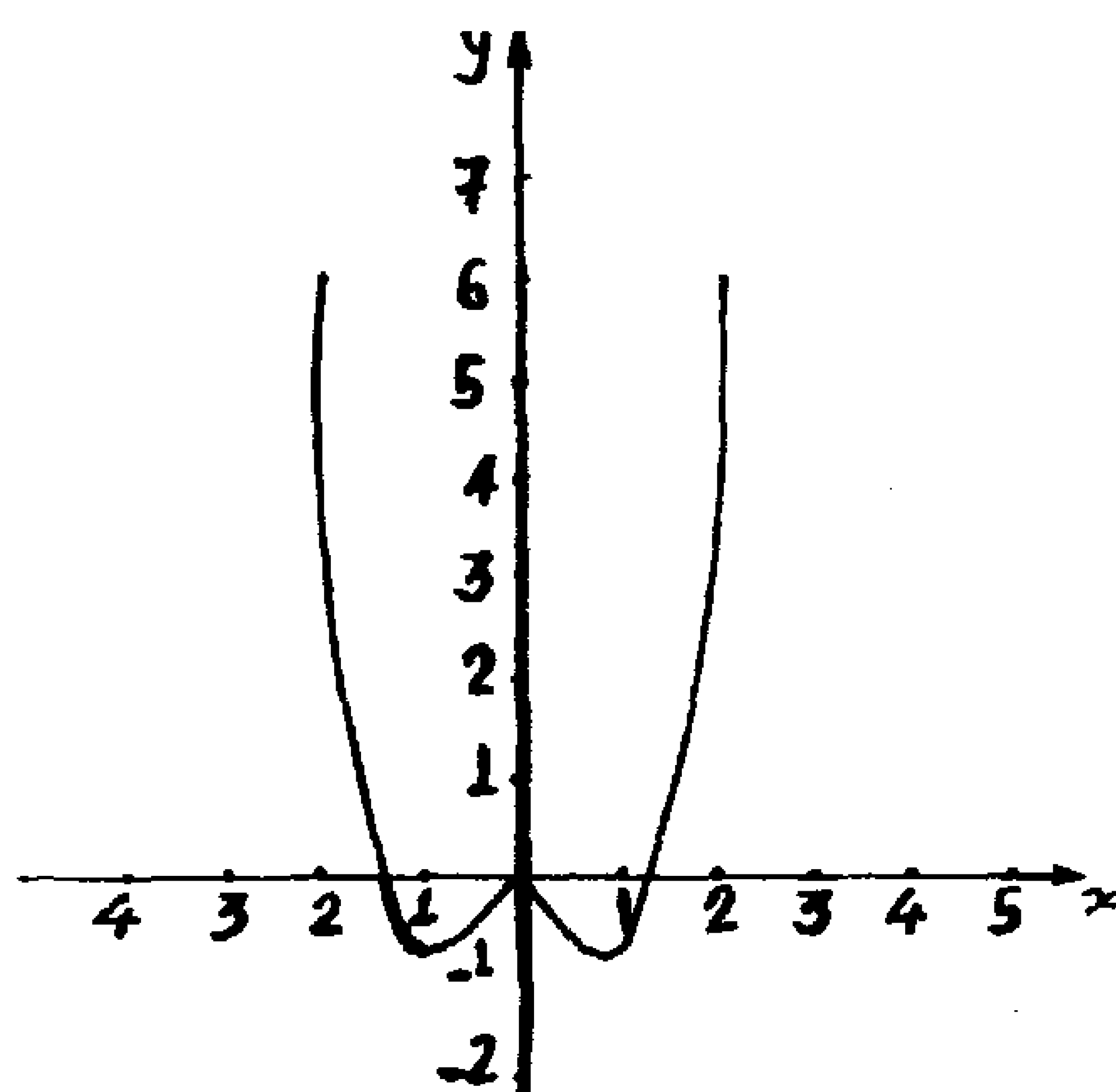
أى أنه لهذه الدالة توجد نهاية واحدة عظمى عند $x=0$ ونهايتان صغريتان عندما :

$$x=-1 \quad , \quad x=+1$$

وحيث أننا قد عرفنا نقط النهايات لهذه الدالة فإنه يمكننا الآن رسمها بعمل جدول بين قيم x (فرضاً) وقيم y المناظرة لها على أن يكون ضمن هذه القيم :-

$x=0, x=-1, x=+1$

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$47\frac{1}{4}$	6	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{21}{64}$	0	$-\frac{21}{64}$	$-\frac{3}{4}$	6	$47\frac{1}{4}$



شكل (٧-١٧)

ومن هذا المثال يتضح أنه يجوز أن يكون للدالة أكثر من نقطة نهاية صغرى أو كبرى إلا أن المشكلة تظهر إذا أردنا معرفة أيـا مـن هـذه النقـط ، يمثـل النهايـة الصغـرى الحقيقيـة (المُطلقة) أو النهاية الكبرى الحقيقية باعتبار جميع قيم x وليس فى خلال فترة محددة.

ونود أن نذكر هنا بأنه يوجد نوعان من النهايات العظمى والصغرى :-

١- نهايات عظمى وصغرى مطلقة Global

٢- نهايات عظمى وصغرى محلية محدودة Local

والنهايات المحدودة يقصد بها النهايات عند نقطة قريبة جـداً يمينـاً أو يسـاراً مـن نقطـة معينة أو فى خلال فترة محدودة .

أما النهايات المطلقة فهى فى غاية الأهمية وتظهر هذه الأهمية إذا كـان لدينـا أكـثر مـن نقطة نهاية صغرى أو عظمى محلية ويراد معرفـة النهايـة الصغـرى أو العظمـى المطلقـة ، والتى بناء عليها يتم تحديد إجراء معين مطلوب .

ففى الحياة تُترجم المشاكل إلى مسائل رياضية ، ويتطلب الأمر أحياناً الحصول على أكبر مساحة أو أصغر حجم أو أقصى تكلفة أو أطول مدى أو أقل ارتفاع ، ... وهكذا .

ولتحديد النهاية المطلقة نتبع التالى :-

إذا كانت $y = f(x)$ ، نوجد y' ثم نوجد قيم x التي تجعل $y' = 0$ ولتكن هذه النقط $(x_1 , x_2 , x_3 , ...)$.

ثم نوجد قيمة الدالة عند كل منها ، ثم نوجد قيمة y عند أقل وأكبر قيمـة لـ x عنـد طرفى الفترة أو المدى

، نعين النقط التى تكون عندها $f'(x)$ غير معرفة ، وتقع خارج المدى .

ونحسب قيم الدالة عند النقط الحرجة وعند طرفى الفترة وأكبر قيمـة فـى مجموعـة القيـم السابقة تعتبر بمثابة القيمة العظمى المطلقة بينما أصغر قيمة تكون القيمة الصغرى المطلقة.

(٩) اوجد جميع النهايات الصغرى والعظمى للدالة :-

$$y = x\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

الحـــــل :-

$\because \; y = x - \frac{x^2}{2}$

$\therefore y' = 1 - x$

وعند نقاط النهاية العظمى والصغرى فإن $y' = 0$:

$\therefore 1 - x = 0 \qquad \therefore x = 1$

فعندما $x < 1$ فإن $y' = +ve$

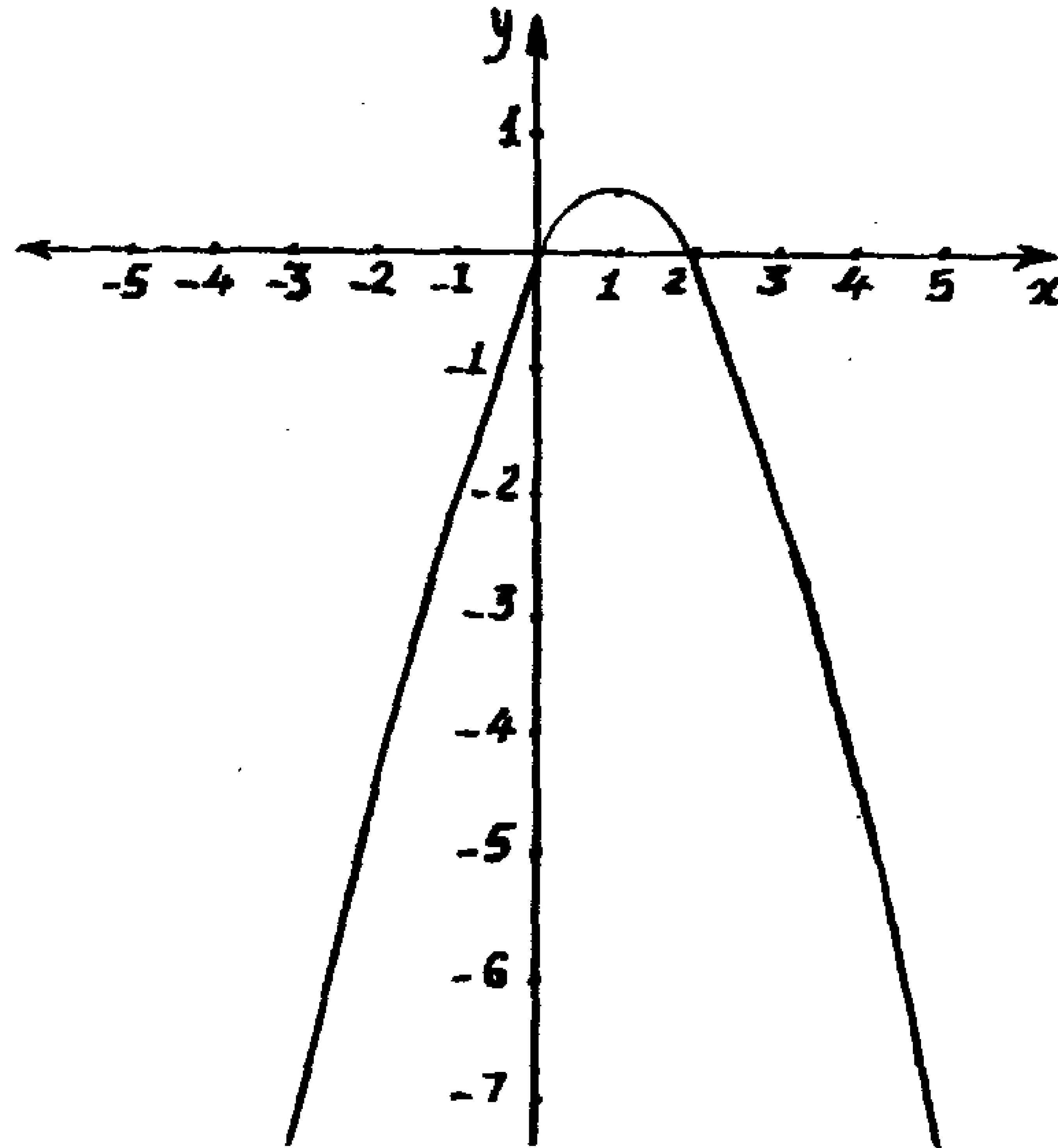
وعندما $x > 1$ فإن $y' = -ve$

أى أن المشتقة الأولى تُغير إشارتها من موجب إلى سـالب وهـو شـرط لازم عـنـد نقـط النهاية العظمى والصغرى إلا أنه غير كافٍ لوجود أياً من النهايتين والشرط الكـافى هـو $y'' = 0$ ، حيث أن $y' = 1 - x$

$\therefore y'' = -1$

وهى سالبة وعليه فإنه توجد عند $x = 1$ ، نهاية عظمى

أنظر شكل (٧-١٨)



شكل (٧-١٨)

(١٠) أوجد جميع النهايات الصغرى والعظمى للدالة :

$$y = (x-1)^2\,(x+1)^3$$

الحـــــل :-

$$y^{`}=2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2$$
$$=(x-1)(x+1)^2(5x-1)$$

وعند النهايات العظمى والصغرى فإن $y^{`}=0$

$$\therefore (x-1)(x+1)^2(5x-1)=0$$

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=-1 \quad , \quad x_3=\frac{1}{5}$$

ومنها :-

إلا أنه يلزم ترتيب قيم x تصاعدياً

$$x_1=-1 \quad , \quad x_2=\frac{1}{5} \quad , \quad x_3=1$$

وكذلك $f^{`}(x)$:-

$$f^{`}(x)=5(x+1)^2\left(x-\frac{1}{5}\right)(x-1)$$

فعندما $x_1<-1$:-

$$f^{`}(x)=5(-)^2(-)(-)=+ve \qquad \text{.......... (1)}$$

وفى الفترة فيما بين $x=\frac{1}{5}$, $x=-1$:-

$$f^{`}(x)=5(+)^2(-)(-)=+ve \qquad \text{.......... (2)}$$

وبمقارنة (1) ، (2) نجد عدم وجود تغيير فى إشارة المشتقة الأولى وتظل موجبة عند عبور النقطة $x=-1$

وعليه فإنه للدالة المذكورة لا توجد نهاية عظمى ولا صغرى عند $x=-1$ بل تتزايد الدالة

وعندما $x_2<\frac{1}{5}$:-

كما فى (2) $\qquad y^{`} \; or \; f^{`}(x)=+ve$

وعندما $x_2>\frac{1}{5}$:-

$$y^{`}=f^{`}(x)=5(+)^2(+)(-)=-ve \qquad \text{.......... (3)}$$

ولما كانت y' تغير إشارتها من موجب $(+ve)$ إلى سالب $(-ve)$ عند عبور المتغير x

للنقطة $x_2 = \frac{1}{5}$ ؛ فإن الدالة تتحول من التزايد للتناقص ،

أى أنه عند $x = \frac{1}{5}$ توجد نهاية عظمى وقيمتها :-

تقريباً $$f\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}-1\right)^2\left(\frac{1}{5}+1\right)^3 \approx 1.1$$

وعندما $x_3 < 1$:- $\therefore y' = 5(+)^2(+)(-) = -ve$

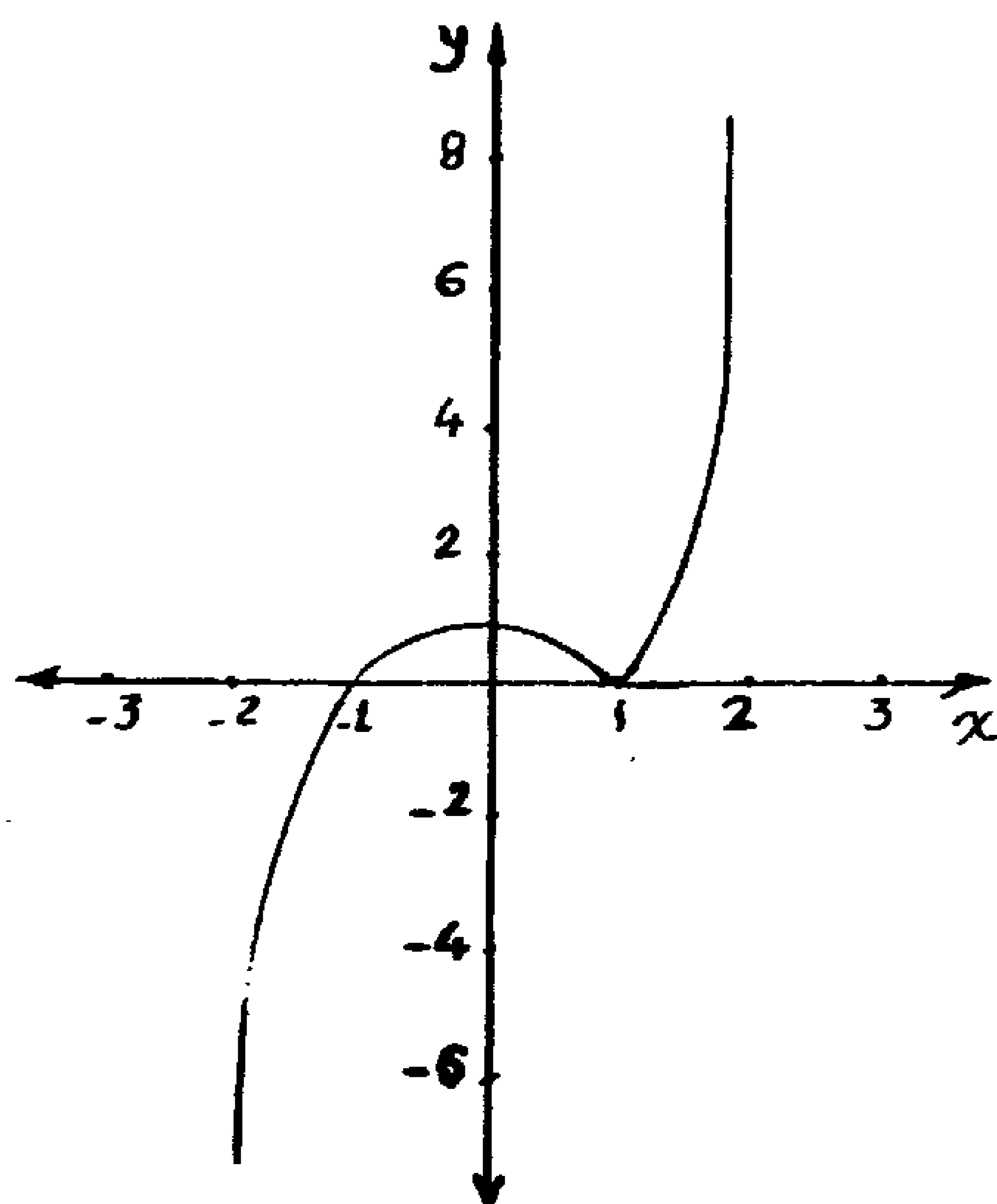
وعندما $x^3 > 1$:- $\therefore y' = 5(+)^2(+)(+) = +ve$

أى أن المشتقة تُغير إشارتها من سالب $(-ve)$ إلى موجب $(+ve)$ عند عبور النقطة

$x = 1$ وعليه فإن الدالة تنتقل من التناقص للتزايد

$\therefore$ عندما $x = 1$ ، هنالك نهاية صغرى مقدارها $y = (1-1)^2(1+1)^3 = 0$.

أنظر الرسم شكل (٧-١٩) .



شكل (٧-١٩)

(١١) أوجد جميع النهايات الصغرى والعظمى للدالة : -

$$y = (x-1).x^{\frac{2}{3}}$$

الحـــــل :-

$$y' = x^{\frac{2}{3}} + \frac{(2x-1)}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{5}{3}\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)}{x^{\frac{1}{3}}}$$

ويلاحظ أن الدالة عند $x=0$ غير قابلة للتفاضل $\left(y' = \infty\right)$

وعليه فإنه يكون لدينا نقطتان عندما $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{5}$

$x < 0$: -

$$y' = \frac{5}{3}\frac{(-)}{(-)} = +ve$$

، $\frac{2}{5} > x > 0$: -

$$y' = \frac{5}{3}\frac{(-)}{(+)} = -ve$$

، $x > \frac{2}{5}$:

$$y' = \frac{5}{3}\frac{(+)}{(+)} = +ve$$

وعليه ، حيث أن y' تغير إشارتها حول الصفر من موجب $+ve$ لسالب $-ve$ ، يكون للدالة نهاية عُظمى عند $x=0$ وقيمتها :

$$y = f(0) = 0$$

وعندما $x < \frac{2}{5}$ فإن y' سالبة كما سبق

وعندما $x > \frac{2}{5}$ فإن y' موجبة كما سبق

وعليه فإن y' تُغير إشارتها حول الصفر من سالب إلى موجب

∴ فيكون لها نهاية صغرى عند $x = \frac{2}{5}$ وقيمتها $y = f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{-3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}} \cong -0.33$

(١٢) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة : -

$$y=\frac{x^4}{2}-x^2+3$$

الحــــــل :-

$y` = 2x^3-2x$

ثم نضع $y`=0$ للحصول على نقط النهايات العظمى والصغرى : -

$\therefore 2x^3-2x \quad =0$

$\therefore x(x^2-1) \quad =0$

$\therefore x(x-1)(x+1)=0$

$x_1=0, x_2=1, x_3=-1 \therefore$

هى النقط التى عندها نهايات عظمى أو صغرى

، $y`` =6x^2-2$

وبالتعويض بقيم x السابقة فى $y``$ لمعرفة إشارتها : -

$\therefore f``(-1)=4>0 \quad i.e.(+ve)$

، $f``(0) =-2>0 \; i.e.(-ve)$

، $f``(1) =4>0 \quad i.e.(+ve)$

$\therefore$ توجد نهاية عظمى واحدة عند $x=0$ ($y``$ سالبة)

ونهايتان صغريتان عند $x=1,-1$ ($y``$ موجبة) .

٧ - ١٢ : نقط الإنقلاب Points of inflexion

كما علمنا فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ تكون إشارتها سالبة عند نقط النهاية العظمى وموجبة عند نقط النهاية الصغرى ؛

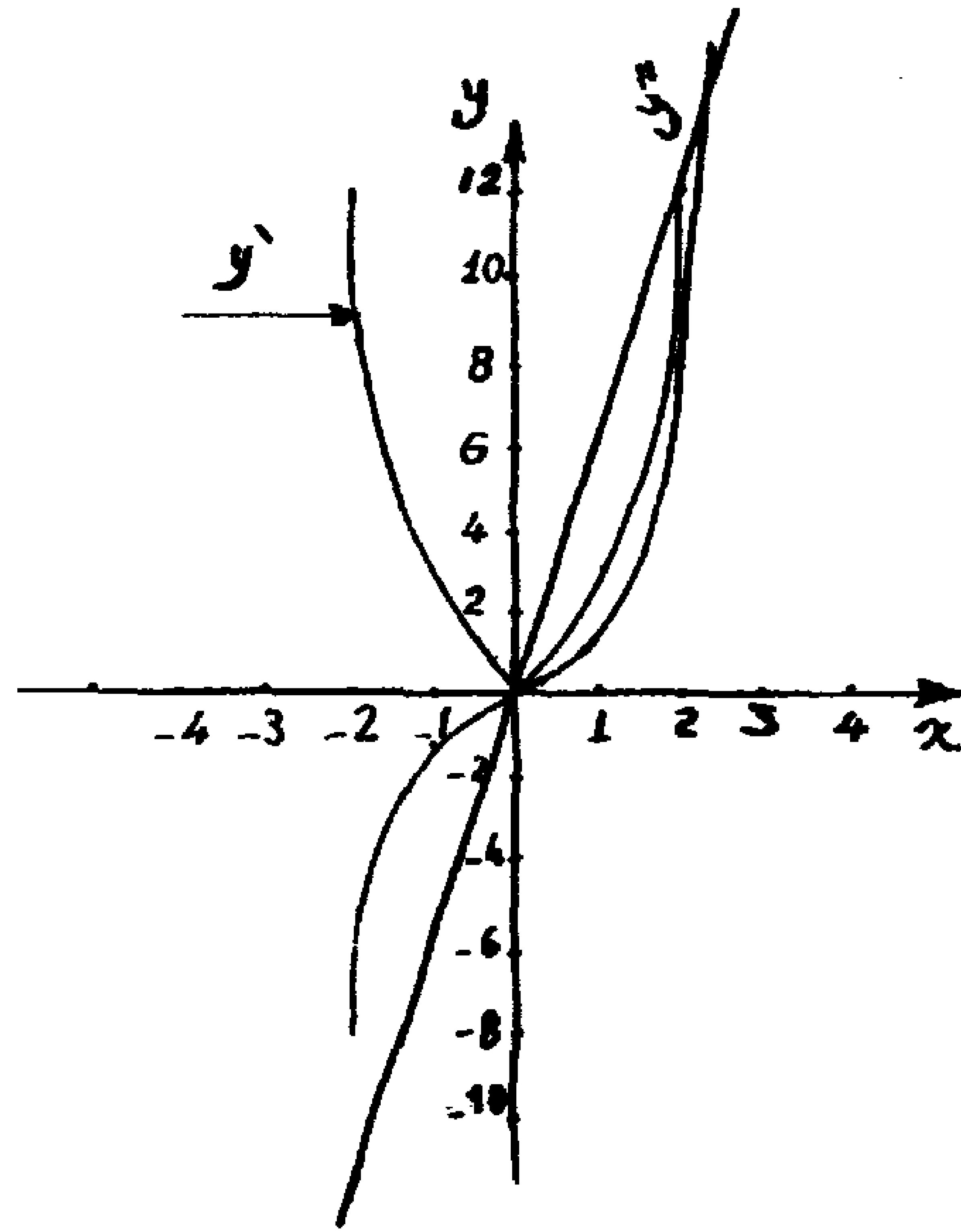
والآن دعنا نعرف كيف يكون الأمر عندما تكون $\frac{d^2y}{dx^2}$ مساوية للصفر بالرغم من عدم وجود نهاية صغرى أو عظمى .

لنعتبر الدالة : $y = x^3$

$\therefore y` = 3x^2$

، $y`` = 6x$

ويوضح الشكل (٧-٢٠) هذا المنحنى والمنحنيات والمستقيمات المناظرة لدوال المشتقة الأولى والثانية .



شكل (٧ - ٢٠)

ويلاحظ أن المنحنى $y = x^3$ يمر بنقطة الأصل والتى عندها يُغير المنحنى تقوسه (شكله) من مقعر للأسفل صاعداً إلى مقعر للأعلى وصاعداً كذلك .

أى أنه يكون صاعداً فى كلتا الحالتين أى أن الدالـة ذات قيمـة متزايدة فيمـا عـدا عنـد نقطة الأصل حيث يبدو منحنى الدالة ساكناً لحظياً أى انه عند هذه النقطـة توجـد قيمـة ثابتة ، والميل يساوى الصفر ويكون محور السينات هو المماس للمنحنى .

وهى بذلك لا ينطبق عليها كل مواصفات نقطة التحول (أى زيادة قبل نقطـة التحـول ونقص بعدها أو العكس بالعكس) .

ويظهر المنحنى الممثل للمشتقة الأولى $y' = 3x^2$ فى صورة قطع مكافئ (متقطع) وهذا المنحنى (موجب) دائماً إلا أن قيمته تساوى الصفر عند نقطة الأصل .

وهذا يبين أن الميل للمنحنى $y = x^3$ ، يساوى الصفر عند هذه النقطة والتى هـى أسـفل نقطة فى المنحنى . $y = 3x^2$.

ويُطلق على مثل هذه النقط على المنحنى بنقط الإنقلاب .

ويعنى الإسم : إنحناء فى سير المنحنى ، حيـث يتغير تقـوس المنحنـى عندهـا مـن مقعـر للأسفل إلى مقعر للأعلى أو بالعكس كما فى حالة المنحنى $(y = -x^3)$.

إلا أنه ليست بالضرورة أن تكون $\frac{dy}{dx}$ مسـاوية للصفـر عنـد هـذه النقطـة أى أنـه ليـس بالضرورة أن يكون المماس موازياً للمحـور OX إلا أن الميـل بالنسبة لنقطـة الإنقـلاب يكون أقل ما يمكن . وفى مثالنا هذا فإن القيمة الصغرى لهذا الميل = صفر .

ومصداقاً لأن المماس للدالة عند نقطة الإنقلاب لا يوازى محـــــور OX دائما ، سوف نعتبر نقطة C على المنحنى المبين فى الشكل (٧ - ١٥) وهو المنحنى الممثـل للدالـة :
$y = (x-1)(x-2)(x-3)$ وبالرجوع لهذا المنحنى نجد أن : -

(١) عند النقطة C ، يتغير تقوس المنحنى من مقعر للأسفل إلى مقعر للأعلى

(٢) عندما يكون المنحنى مقعر للأسفل فإن $\frac{dy}{dx}$ تتناقص : -

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}$ سالبة

وعندما يكون المنحنى مقعراً للأعلى فإن $\frac{dy}{dx}$ تتزايد

موجبة $\therefore \frac{d^2y}{dx^2}$

(٣) عند نقطة الإنقلاب $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$

(٤) وبالتبعية فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ تغير إشارتها عند نقطة الانقلاب

(٥) عند نقطة الانقلاب "C" فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون أقل ما يمكن لقيم x المناظرة

(٦) وقيمة $\frac{dy}{dx}$ ، هذه ومن على الرسم : $\frac{dy}{dx} = -1$

تعطى ميل المنحنى عند نقطة الانقلاب أى أنها تمثل ميل المماس للمنحنى الأصلى للدالـة عند نقطة C

فإذا كانت θ = زاوية ميل المماس :

$$\therefore \tan\theta = -1 \qquad \therefore \hat{\theta} = 135^\circ$$

وبناءً على ما تقدم فإنه عند نقطة الانقلاب على منحنى : -

(١) يتغير تقوس المنحنى من مقعر للأعلى إلى مقعر للأسفل أو العكس بالعكس

(٢) وبالتالى فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون متزايدة قبل ومتناقصة بعد أو العكس بالعكس

(٣) ولهذا فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ تكون موجبة قبل وسالبة بعد أو العكس بالعكس

(٤) $\frac{dy}{dx}$ تكون أكبر ما يمكن أو أقل ما يمكن

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

وبذلك فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ تغير إشارتها خلال نقطة الانقلاب .

ويمكن تلخيص طرق تحديد نقط النهايات العظمـى والصغرى والانقـلاب فـى الجـدول (٧-١) التالى : -

	نهاية عظمى	نهاية صغرى	نقطة انقلاب
$y = f(x)$	(١) تزيد قبلها (٢) تقل بعدها	(١) تقل قبلها (٢) تزيد بعدها	تتغير من مقعر لأعلى إلى مقعر لأسفل أو العكس بالعكس
$y^{`} = \frac{dy}{dx}$	(١) موجبة قبلها (٢) سالبة بعدها (٣) تساوى الصفر عند النقطة ∴ متناقصة	(١) سالبة قبلها (٢) موجبة بعدها (٣) تساوى الصفر عند النقطة ∴ متزايدة	لها قيمة عظمى أو صغرى
$\frac{d^2y}{dx^2}$	سالبة	موجبة	صفر وتغير إشارتها

٧ - ١٣ خلاصة : -

هنالك عدة نقاط تكون عندها مشتقة المنحنى " الدالة " مساوية للصفر أى أن $\frac{dy}{dx} = 0$ ، تعنى أن عند هذه النقط يكون المماس للمنحنى أفقياً

وعندما يكون المماس أفقياً فإن المنحنى يكون آخذاً فى تغيير شكله من صعود إلى هبوط أو من هبوط إلى صعود ، أو سكون لحظى

ورياضياً يمكننا إيجاد هذه النقط بإيجاد المشتقة الأولى للدالة ونساويها بالصفر ومن ثم نوجد قيمة أو قيم x والتى يُطلق عليها حينئذ بالقيم الحرجة critical values ، وهذه النقط الحرجة إما أن تكون نقط نهاية عظمى أو صغرى أو انقلاب .

وبمجرد الحصول على هذه النقط ، يمكن معرفة وتحديد كل منها باستخدام طريقتين فالنهاية العظمى تكون قيمة المشتقة الثانية " التغير فى الميل- changes in slope " ، عندها سالبة .

والنهاية الصغرى تكون قيمة المشتقة الأولى عندها موجبة .

وعند نقطة الإنقلاب يكون كل من $f^{``}, f^{`}$ مساوياً للصفر وعلى ذلك ، فبحساب كل من $f^{``}, f^{`}$ يُمكن أن يُحدد نوع النقطة .

أما إذا لم نرغب فى إيجاد قيمة $f^{``}$ ، لصعوبة ذلك مثلاً ، فإنه بعد إيجاد القيم الحرجة ، نُعوض فى معادلة الدالة الأصلية بقيم أقل منها قليلاً أو أكبر منها قليلاً (من القيم الحرجة) .

وسنلاحظ حينئذ قيمة الدالة عند هذه القيم ونقارنها بقيمتها عند النقطة الحرجة .

وسوف نجد أنه عند النهاية العظمى ، تزيد قيمة y قبلها وتقل بعدها والعكس عند نقط النهاية الصغرى .

٧ - ١٤ : - مسائل محلولة على القيم العظمى والصغرى ونقط الإنقلاب :

(١) أوجد نقط النهاية العظمى والصغرى للدالة : $y = f(x) = x^4$ ثم إرسمها.

الحـــل :-

$f^{`}(x) = 4x^3$

وبوضع $f^{`}(x) = 0$ ، للحصول على النقط الحرجة

$\therefore 4x^3 = 0$

$\therefore x = 0$

وهى القيمة الحرجة الوحيدة لهذه الدالة .

والآن يلزم أن نحدد ماهية النقطة $x = 0$ ، هل هى عظمى أم صغرى

وفى هذه المسألة فإنه ليس من المفيد إيجاد قيمة $f^{``}$ ، حيث أن : -

$f^{``} = 12x^2$

فعند التعويض بقيمة $x = 0$ فى $f^{``}$ فإن $f^{``}(0) = 0$

وعليه يلزم الإعتماد على طريقة المشتقة الأولى : -

حيث نوجد قيمها قبل وبعد النقطة $x = 0$

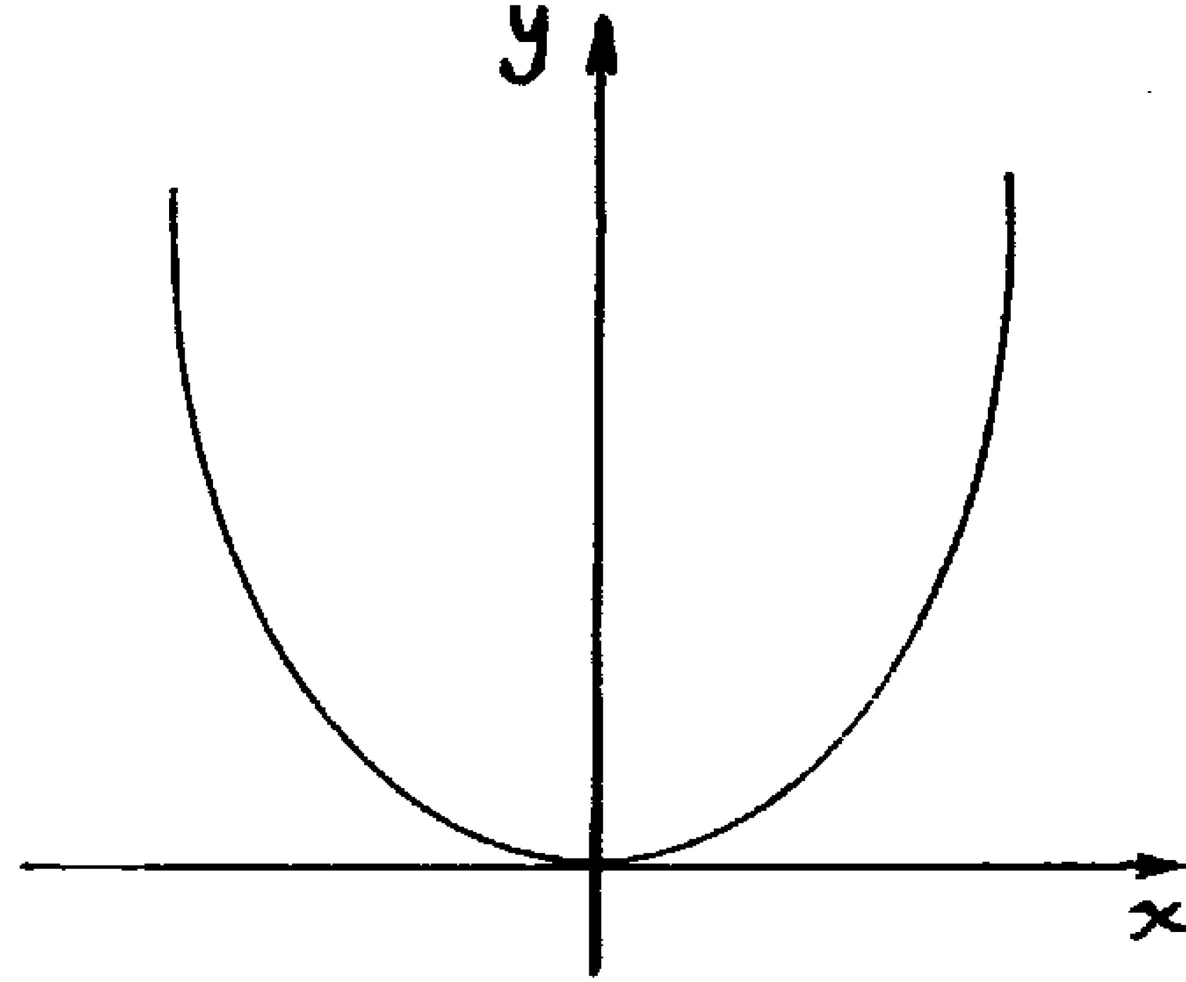
فعندما $x < 0$ فإن $f^{`}(x) = -ve$ (سالبة)

وعندما $x > 0$ فإن $f^{`}(x) = +ve$ (موجبة)

أى أن $y^{`}$ تُغير إشارتها من سالبة إلى موجبة

∴ عندما $x=0$ ، هنالك نهاية صغرى

∴ عند النقطة $(0,0)$ وهى نقطة الأصل هنالك نهاية صغرى ، انظر الرسم شكل (٧-٢١) .



شكل (٧-٢١)

(٢) أوجد النقط الحرجة للدالة : - $f(x)=3x^4-4x^3$ ثم إرسمها ؟

الحـــــل :-

$$f`(x)=12x^3-12x^2$$
$$=12x^2(x-1)$$

وبوضع $f`(x)=0$

$$\therefore 12x^2(x-1)=0$$

∴ إما $x=0$ وإما $x=1$ وهى النقط الحرجة لهذه الدالة

وبالنسبة للنقطة $x=0$ ، إذا ما أوجدنا المشتقة الثانية : -

$$f`` =36x^2-24x=12x(3x-2)$$

فإذا ما عوضنا بقيمة $x=0$ سنجد أن $f``(0)=0$ وبالتالى فإن طريقة المشتقة الثانية هنا لا تفيد فى تحديد قيم النهاية .

وعليه سنعتمد على طريقة $f`(x)$ ونوجد قيمها عند $x<0$ ، $1>x>0$ ، $x>1$

فعندما $x<0$ فإن $f'(x)=-ve$

وعندما $1>x>0$ فإن $f'(x)=-ve$

وعندما $x>1$ فإن $f'(x)=+ve$

وحيث أن $f'(x)$ تغير إشارتها من سالب إلى موجب

عند الواحد $(x=1)$ فإن هذا يعنى أنه عند $x=1$ توجد نهاية صغرى

وعندما $x=0$ فإن $f'(x)$ لا تغير إشارتها

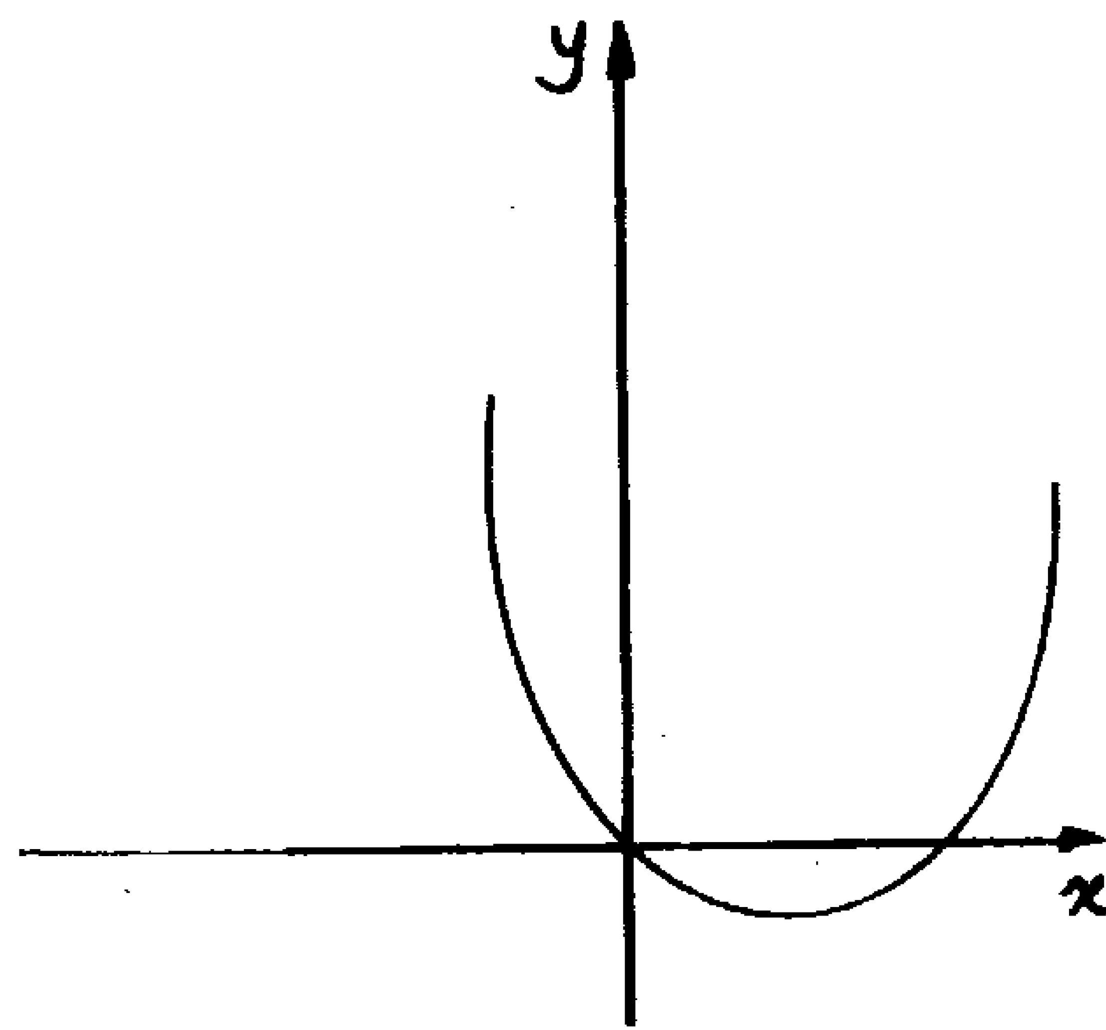
فهى سالبة عندما $x<0$ وعندما $1>x>0$ ؛ كذلك .

وعليه فإنه لا توجد نهاية صغرى ولا عظمى عند $x=0$

وحيث أن $f'(0)=0$ فإن الدالة يكون لها مماس أفقى عند $x=0$ ويُطلق على مثل هذه النقطة بنقطة انقلاب .

كما وأن $f''(0)=0$ مما يؤكد وجود نقطة انقلاب عندما $x=0$

انظر الرسم شكل (٧-٢٢) .



شكل (٧-٢٢)

(٣) حدد النهايات العظمى والصغرى للدالة : -

$$y=3x^2-2x$$

الحـــــل :-

نوجد $\frac{dy}{dx}$ ونساويها بالصفر فنحصل على النقط الحرجـة ثـم نسـتخدم اختبـار المشـتقة الثانية لتحديد ماهية هذه النهاية ، عظمى أم صغرى : –

$$f`(x) = 6x - 2$$

$$6x - 2 = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{3}$$ ،

$$f``(x) = 6 \quad i.e. +ve$$ ،

∴ عند $x = \frac{1}{3}$ توجد نقطة حرجة وهى نهاية صغرى $\left[f``(x) = +ve\right]$

وبالتعويض بقيمة $x = \frac{1}{3}$ فى الدالة $f(x)$

$$\therefore f(x) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-1}{3}$$

∴ نقطة النهاية الصغرى هى النقطة التى إحداثياتها

$$\left(\frac{1}{3} , \frac{-1}{3}\right)$$

(٤) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة : –

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

الحـــــل :–

$$f`(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2\left(x^2 - 1\right)$$

$$= 15x^2(x-1)(x+1)$$

∴ القيم الحرجة هى :

$$x = 0 \ , \ x = -1 \ , \ x = +1$$

وبترتيبها تصاعدياً :

$$\therefore x = -1 \ , \ x = 0 \ , \ x = +1$$

ولتحديد نوع النهاية عند كل نقطة ، نوجد المشتقة الثانية : –

$\therefore f''(x) = 60x^3 - 30x$

$= 30x(2x^2 - 1)$

$\therefore f''(-1) = -30 < 0 \ (-ve)$

$\therefore$ عند $x = -1$ توجد نهاية عظمى

، $f''(1) = 30 > 0 \ (+ve)$

$\therefore$ عند $x = 1$ توجد نهاية صغرى

، $f''(0) = 0$

مما يعنى أنه عند النقطة $x = 0$ توجد نقطة لا هى نهاية عظمى ولا هى نهاية صغرى فهى بالتالى نقطة انقلاب

وللتأكد ، لنرى سوياً ، سلوك الدالة $f(x)$ عند نقطة $x = 0$ باستخدام المشتقة الأولى

فعند $-1 < x < 1$: -

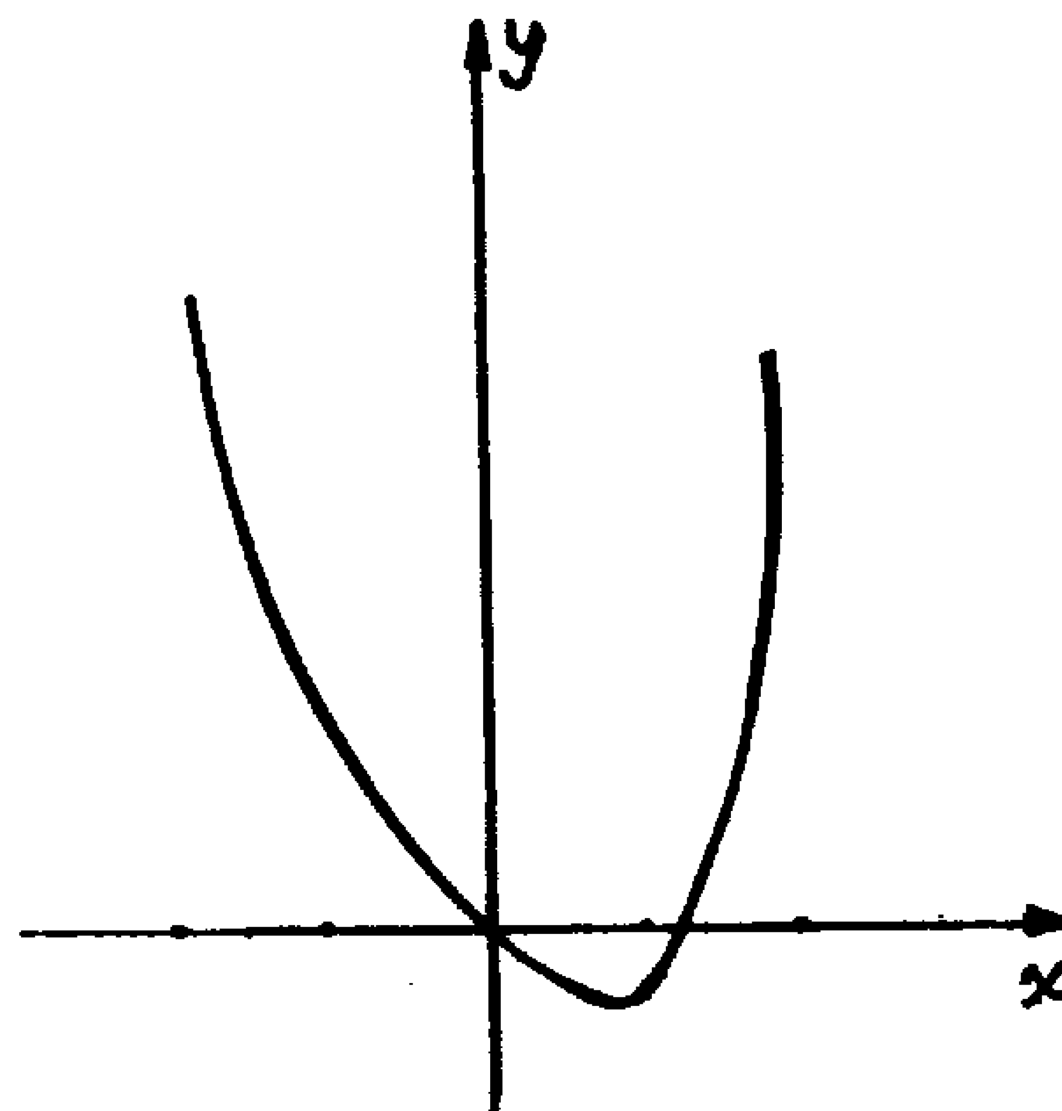
$\therefore f'(x) = -ve$ (سالبة)

وعند $0 < x < 1$ فإن

$\therefore f'(x) = -ve$ (سالبة)

أى أنه لا يوجد تغير فى إشارة y' .

، انظر الرسم شكل (٧ - ٢٣) .



شكل (٧ - ٢٣)

(٥) أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة : -

$y = 2x^2 - 8x + 5$

الحـــــل :-

$\frac{dy}{dx} = 4x - 8$

وبمساواتها بالصفر نحصل على قيم x الحرجة : -

$\therefore 4x - 8 = 0 \quad \therefore x = 2$

$\therefore$ عند $x = 2$ توجد نقطة حرجة ، وسوف نستخدم طريقة المشتقة الثانية لتحديد ما إذا كانت $x = 2$ عظمى أم صغرى

$\frac{d^2y}{dx^2} = y^{``} = 4$ ، $+ ve$ موجبة

$\therefore$ فعند $x = 2$ توجد نهاية صغرى .

وبالتعويض بقيمة $x = 2$ فى الدالة y

$\therefore y = 2(2)^2 - 8(2) + 5$

$= 8 - 16 + 5 \quad = -3$

$\therefore$ النهاية الصغرى تكون عند النقطة $(2 , -3)$

(٦) : - أوجد النهاية العظمى والصغرى للدالة : -

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$

الحـــــل :-

$f^{`}(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$= 6(x^2 - x - 2)$

$= 6(x+1)(x-2)$

وبوضع $f^{`}(x) = 0$

$\therefore 6(x+1)(x-2) = 0$

$\therefore x = -1 \; , \; x = 2$

، نوجد $f^{``}(x)$ ونوجد قيمتها المناظرة لقيم x الحرجة : -

$$f''(x) = 12x - 6$$
$$= 6(2x - 1)$$
$$\therefore f''(-1) = -18 \qquad at \;\; x = -1$$
$$، \;\; f''(2) = +18 \qquad at \;\; x = 2$$

وعند $x = -1$: -

$$\therefore f(x) = 20$$

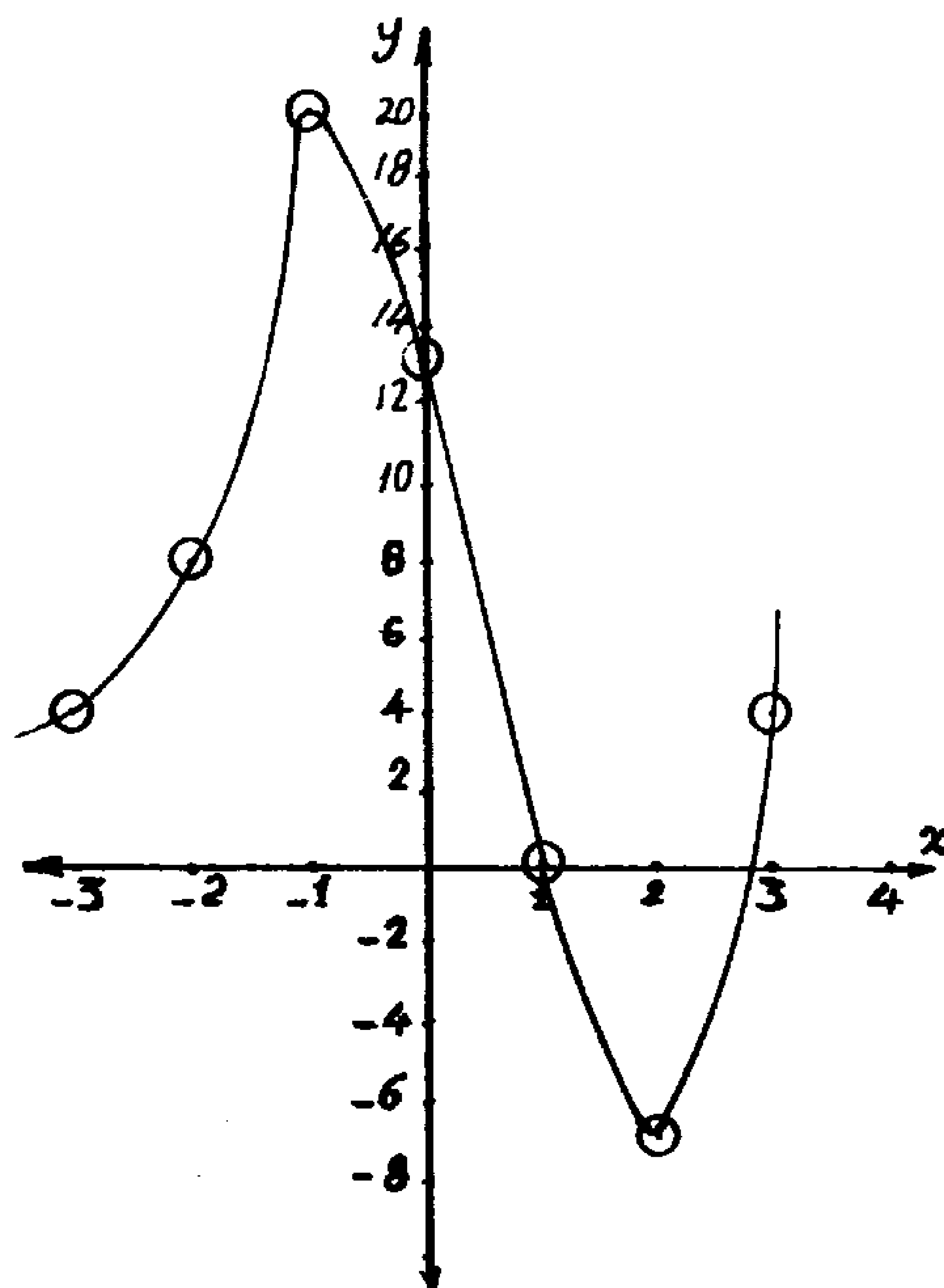
وعند $x = 2$: -

$$\therefore f(x) = -7$$

$\therefore$ $(-1 , 20)$ ، نقطة نهاية عظمى

، $(2 , -7)$ ، نقطة نهاية صغرى

انظر الرسم شكل (٧ - ٢٤) .



شكل (٧ -٢٤)

(٧) أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة التالية ، وارسمها : -

$$y = \frac{4}{x^2 - 4}$$

الحـــــل :-

$$y' = \frac{(x^2-4)(0)-4(x^2-4)}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$$

وبوضع $y' = 0$

$$\therefore \frac{-8x}{(x^2-4)^2} = 0$$

$$\therefore \; -8x = 0 \qquad \therefore x = 0$$

وبالتعويض بقيمة x فى الدالة y : -

$$\therefore y = \frac{4}{0-4} = -1$$

∴ النقطة $(0 , -1)$ هى النقطة الحرجة الوحيدة لهذه الدالة .

ولتحديد ماهيه هذه النقطة ، نستخدم طريقة المشتقة الأولى : -

ونوجد قيم $\frac{dy}{dx}$ عند $-1 \le x < 0$ ، $0 < x \le 1$

فعند $x = -1$ ، مثلاً ، نجد أن : -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8}{9}(+ve)$$

وعند $x = +1$ نجد أن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8}{9}(-ve)$$

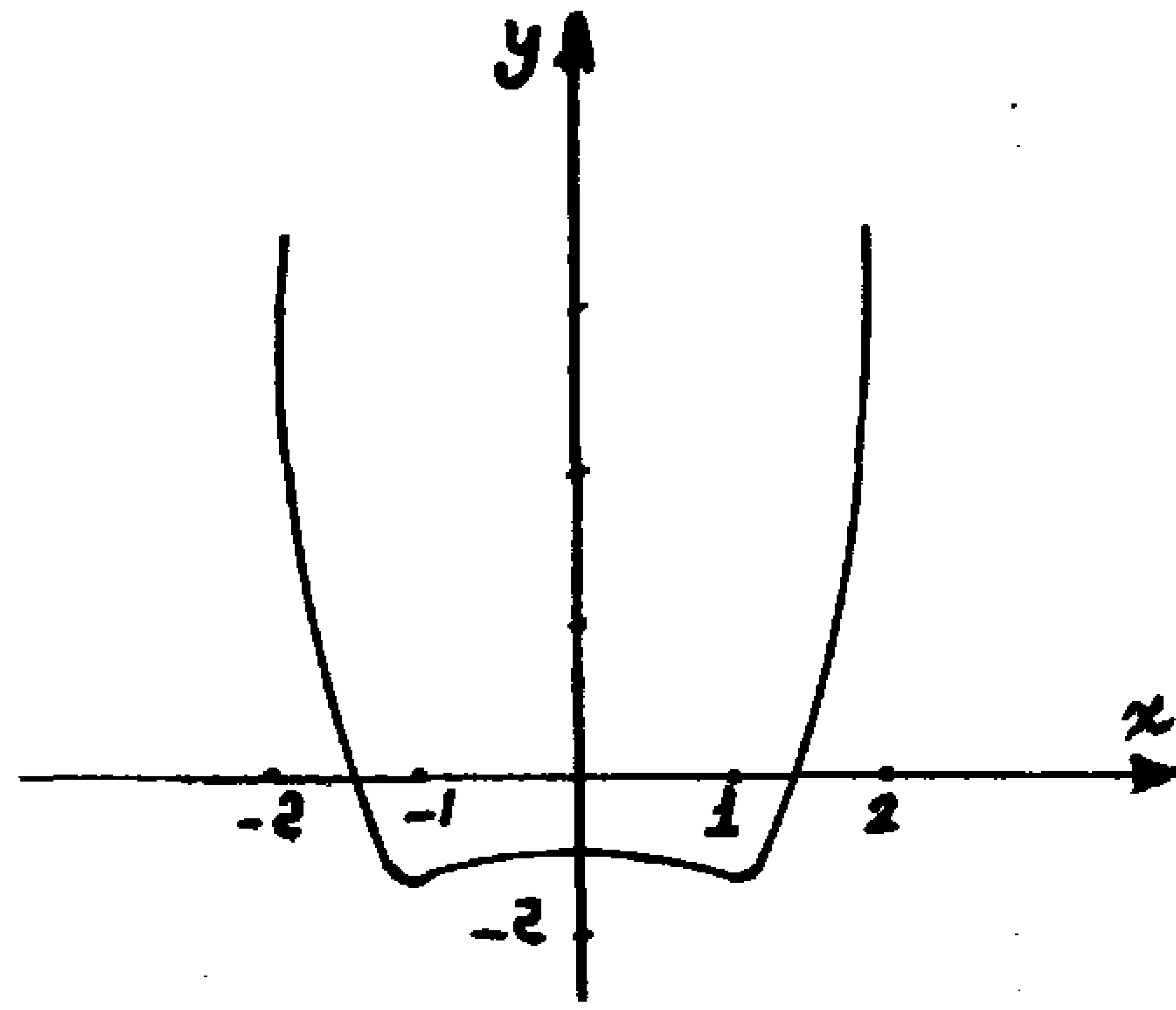
∴ $\frac{dy}{dx}$ تُغير إشارتها من $(+ve)$ إلى $(-ve)$ عند المرور بنقطة $x = 0$

∴ عند النقطة $(0 , -1)$ ، هُنالك نهاية عظمى

فإذا ما عوضنا بقيمة $x = \pm 2$ فى الدالة الأصلية سنجد أن : -

$$y = \pm \infty$$

انظر الرسم شكل (٧ - ٢٥) .



شكل (٧ - ٢٥)

(٨) أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة : -

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + 4$$

الحـــــل :-

نوجد $\frac{dy}{dx}$ ونساويها بالصفر ثم نوجد قيم x الحرجة

$$\therefore y` = x^2 - 5x + 6$$
$$= (x-2)(x-3) = 0$$
$$\therefore x = 2 \quad , \quad x = 3$$

والآن نوجد المشتقة الثانية لتحديد ماهيه هذه النقط : -

$$y`` = 2x - 5$$

فعندما $x = 2$ توجد نهاية عظمى لأن : -

سالبة . $y`` = 2 \times 2 - 5 = -1 \ (-ve)$

وعند $x = 3$ نهاية صغرى لأن : -

موجبة . $y`` = 2 \times 3 - 5 = +1 \ (+ve)$

وبالتعويض بقيم x الحرجة فى الدالة y

$$\therefore y(2) = \frac{(2)^3}{3} - \frac{5(2)^2}{2} + 6(2) + 4$$

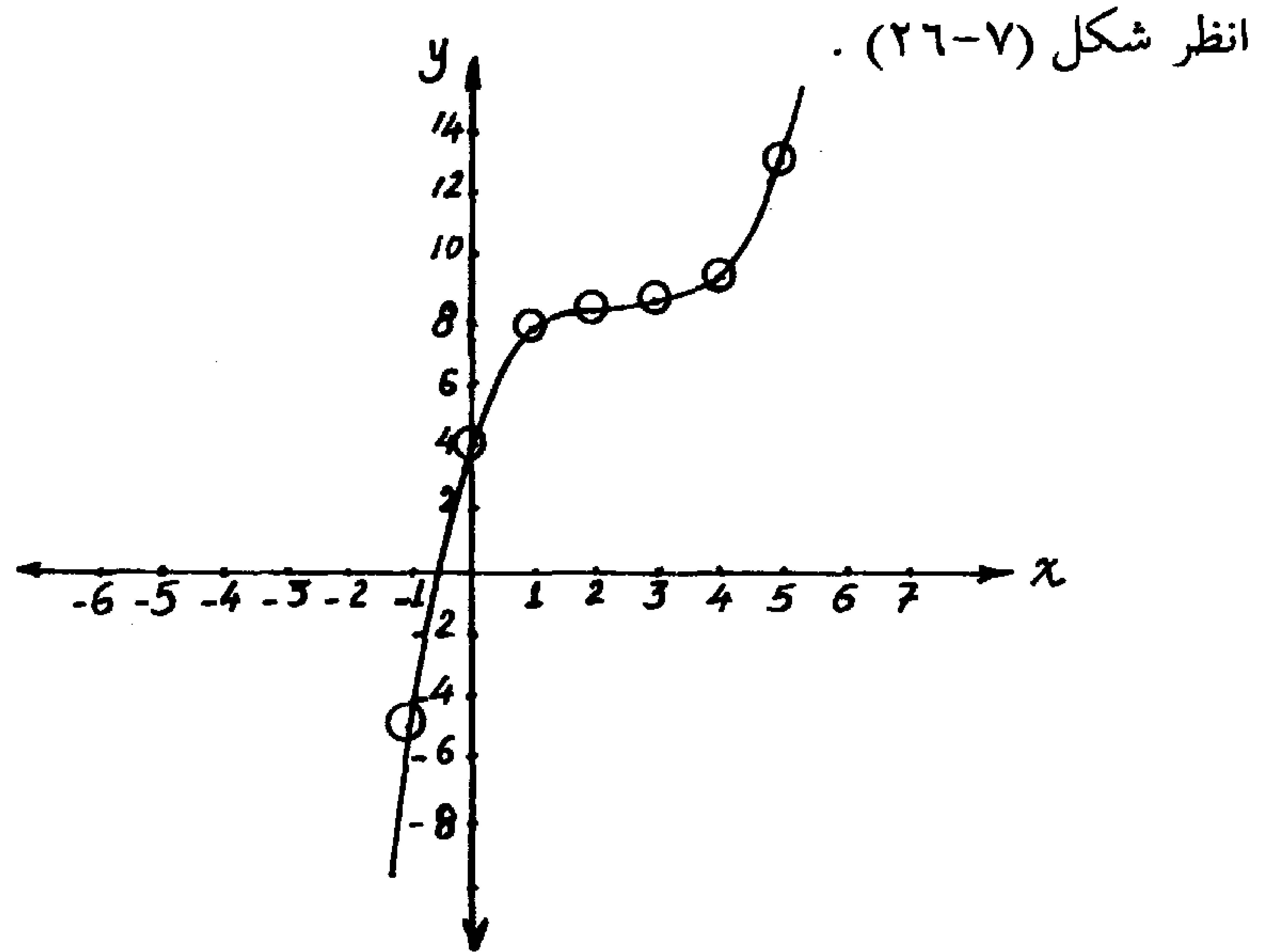
$$=\frac{8}{3}-10+12+4=8\frac{2}{3}$$

$$\text{،}\,y(3)=\frac{(3)^3}{3}-\frac{5(3)^2}{2}-6(3)+4$$

$$=8\frac{1}{2}$$

∴ للدالة نهاية عظمى عند $\left(2\,,8\frac{2}{3}\right)$ ونهاية صغرى عند $\left(3\,,\,8\frac{1}{2}\right)$ ،

انظر شكل (٧-٢٦) .



شكل (٧ – ٢٦)

(٩) إذا كانت $f(x)=\frac{1}{x}+x$ ، فأوجد القيم العظمى والصغرى وحدد الفترات التى تتزايد فيها $f(x)$ أو تتناقص ثم ارسم المنحنى

الحـــــل :-

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}+1=\frac{-1+x^2}{x^2}=\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

وبوضع : $f'(x)=0$

$$\therefore (x-1)(x+1)=0$$

∴ $x=1$ ، $x=-1$ ، هى النقط الحرجة

ولتحديد ماهية هذه النقط ، نعلم أن الدالة تزيد عندما $f^{`}(x)>0$ وتتناقص عندما $f^{`}(x)<0$ وأن نقط النهاية العظمى أوالصغرى ، تظهر عند النقط التى فيها : – $f^{`}(x)$ تغير إشارتها

ولذلك ، دعنا نرى $f^{`}(x)$ فى الفترات المحددة الموضحة بالجدول التالى :

$f^{`}(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$	$x<-1$
$+ve$	
$-ve$	$0>x>-1$
$-ve$	$1>x>0$
$+ve$	$x>1$

مما يدعونا إلى استنتاج وجود نهاية عظمى عند $x=-1$ لأن $f^{`}(x)$ تُغير إشارتها من + إلى – عند هذه القيمة (حولها)

كما توجد نهاية صغرى عند $x=1$ لأن $f^{`}(x)$ تُغير إشارتها من – إلى +

وكذلك تتزايد الدالة عند $x<-1$ وعند $x>+1$

وتتناقص عندما $0>x>-1$ وعندما $1>x>0$

ويمكن الحصول على نفس النتائج بإيجاد تفاضل $f^{`}(x)$ أى نوجد $f^{``}(x)$

$$f^{``}(x)=\frac{2}{x^3}$$ ،

فعندما $x=1$: –

$$\therefore f^{``}(x)=\frac{2}{1}=+ve$$

مما يعنى نهاية صغرى

وعندما $x=-1$: –

$$f^{``}(x)=\frac{2}{(-1)^3}=-ve$$

مما يعنى نهاية عظمى

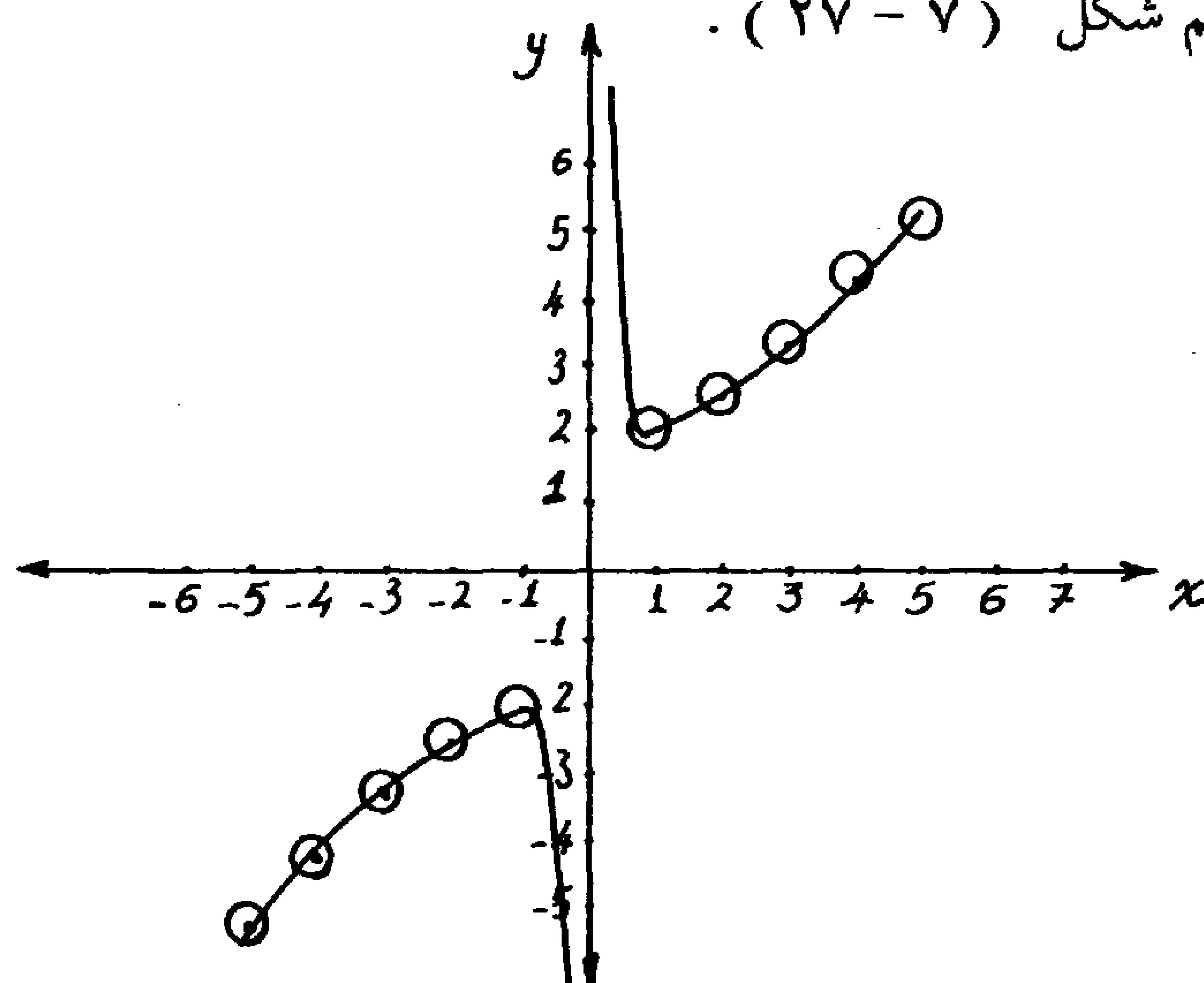
وبالتعويض بقيم x ، $(x=-1,+1)$ فى الدالة الأصلية .

نحصل على قيم y المناظرة

نقطة نهاية عظمى $\therefore (-1\ ,\ -2)$

نقطة نهاية صغرى $(1\ ,\ 2)$ ،

أنظر الرسم شكل (٧ - ٢٧) .



شكل (٧ - ٢٧)

(١٠) أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة : -

$$y = 3x^3 - 9x^2 - 27x + 15$$

الحـــــل :-

$$y' = 9x^2 - 18x - 27$$
$$= 9(x^2 - 2x - 3)$$
$$= 9(x+1)(x-3)$$

وبوضع $y' = 0$

$$\therefore (x+1)(x-3) = 0$$

$\therefore \quad x = -1$ ، $x = 3$ هى القيم الحرجة لهذه الدالة .

ولتحديد ماهية هذه القيم (عظمى أم صغرى) ، نوجد y'' : -

$$y'' = 18x - 18 = 18(x-1)$$ ،

فعندما $x = -1$: -

$y'' = -36 = -ve$ سالبة

∴ عند $x = -1$: - توجد نهاية عظمى

وعندما $x = 3$: -

$y'' = 54 - 18 = 36 = +ve$ موجبة

∴ عند $x = 3$ توجد نهاية صغرى

وبالتعويض بقيم x هذه نوجد قيم y المناظرة من الدالة الأصلية : -

$$y_{max} = 3(-1)^3 - 9(-1)^2 - 27(-1) + 15 = 30$$

$$، y_{min} = 3(3)^3 - 9(3)^2 - 27(3) + 15 - 66$$

(١١) إحسب القيم العظمى والصغرى للدالة :

$$f(x) = x^3 - x$$

فى الفترة من $x = -1$ إلى $x = 2$

الحـــــل :-

$$y' = 3x^2 - 1$$

ثم نضع $y' = 0$

$$\therefore 3x^2 - 1 = 0$$

$$\therefore x^2 = \frac{1}{3} \quad \therefore x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

ثم نوجد قيم الدالة y عند قيم x هذه .

$$\therefore f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$$

$$، f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

وبحساب قيم $f(x)$ عند حدود الفترة

$$\therefore f(-1) = 0$$

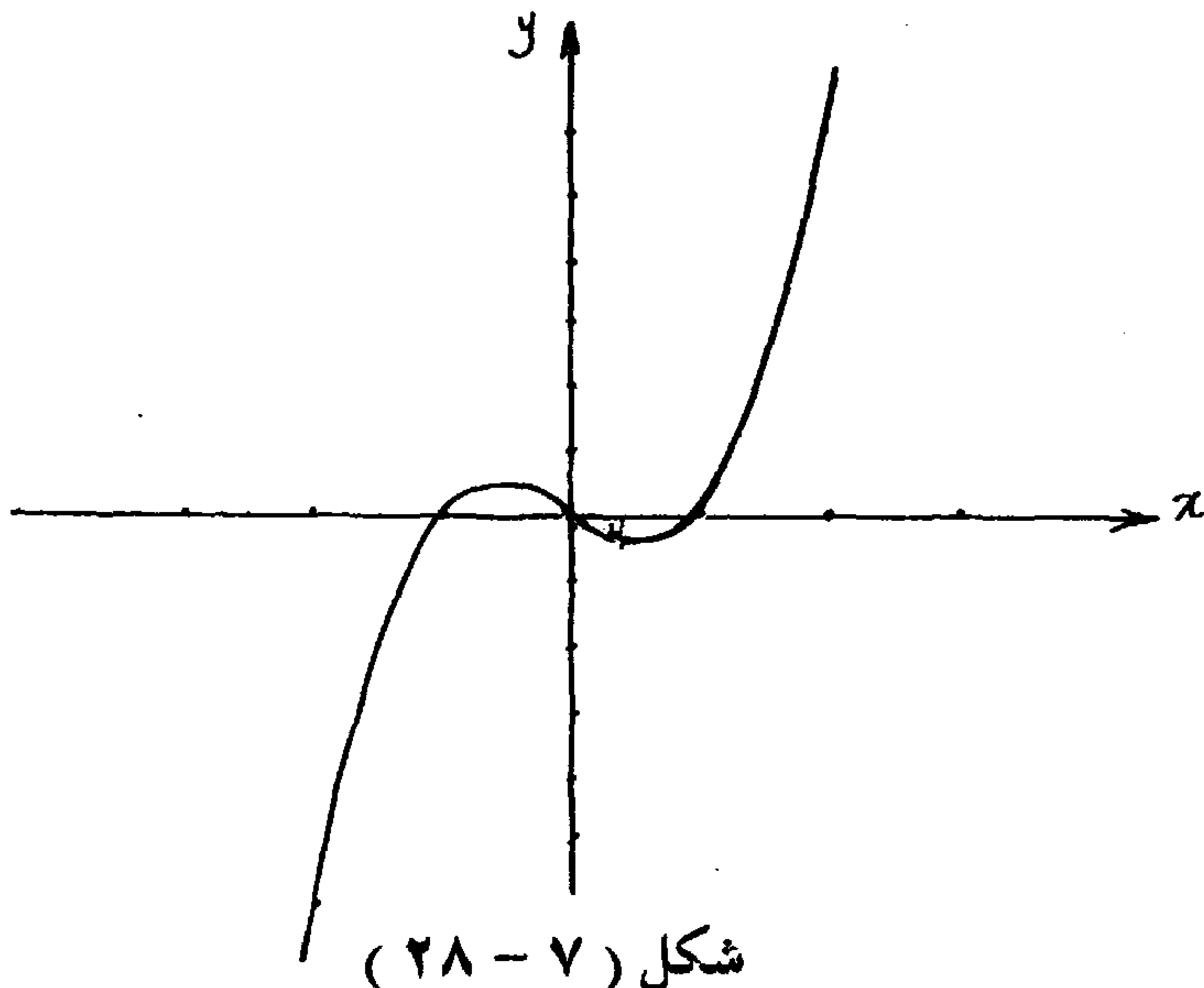
$$، f(2) = 6$$

∴ النقطة (2) وهى نهاية المدى ، تعتبر أقصى نهاية للدالة .

∴ أقصى قيم لـ f فى الفترة $(-1, 2)$: -

هى $6 \, , \, \frac{-2}{3\sqrt{3}}$

والنقطة $\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \, , \, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ ليست النهاية العظمى المطلقة ، إلا أنها العظمى النسبية فى هذه الفترة relative maximum ، انظر الرسم شكل (٧ - ٢٨)



شكل (٧ - ٢٨)

(١٢) أوجد نقط النهاية العظمى والصغرى والانقلاب للدالة وارسمها : -

$y = \sin x + \cos x$

الحــــــل :-

$y' = \cos x - \sin x$

ثم نضع $y' = 0$

$\therefore \cos x - \sin x = 0$

$\therefore \cos x = \sin x$

$\therefore \tan x = 1$

$\therefore \quad x = \frac{\pi}{4}$

كما وأنه فى الربع الثالث من الإحداثيات الكرتيزية ، نجد أن كلاً من $\sin x$ ، $\cos x$ تكون سالبة وبالتالى فإنهما يتساويان كذلك فى الربع الثالث أى عندما $x = \pi + \frac{\pi}{4}$

$\therefore x = 180 + 45 = 225° = \frac{5\pi}{4}$

ولما كان هذا المنحنى له دورة كاملة كل 2π ويتكـرر بعدهـا فـإذا أضفنـا $2\pi\ n$ لهـذا الرقم : - $\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ ، حيث $n = ...,-2,-1,0,1,2,.....$

فسوف نجد عدد لا نهائى من القيم الحرجة ولهذا فإن النقط الحرجة هى : -

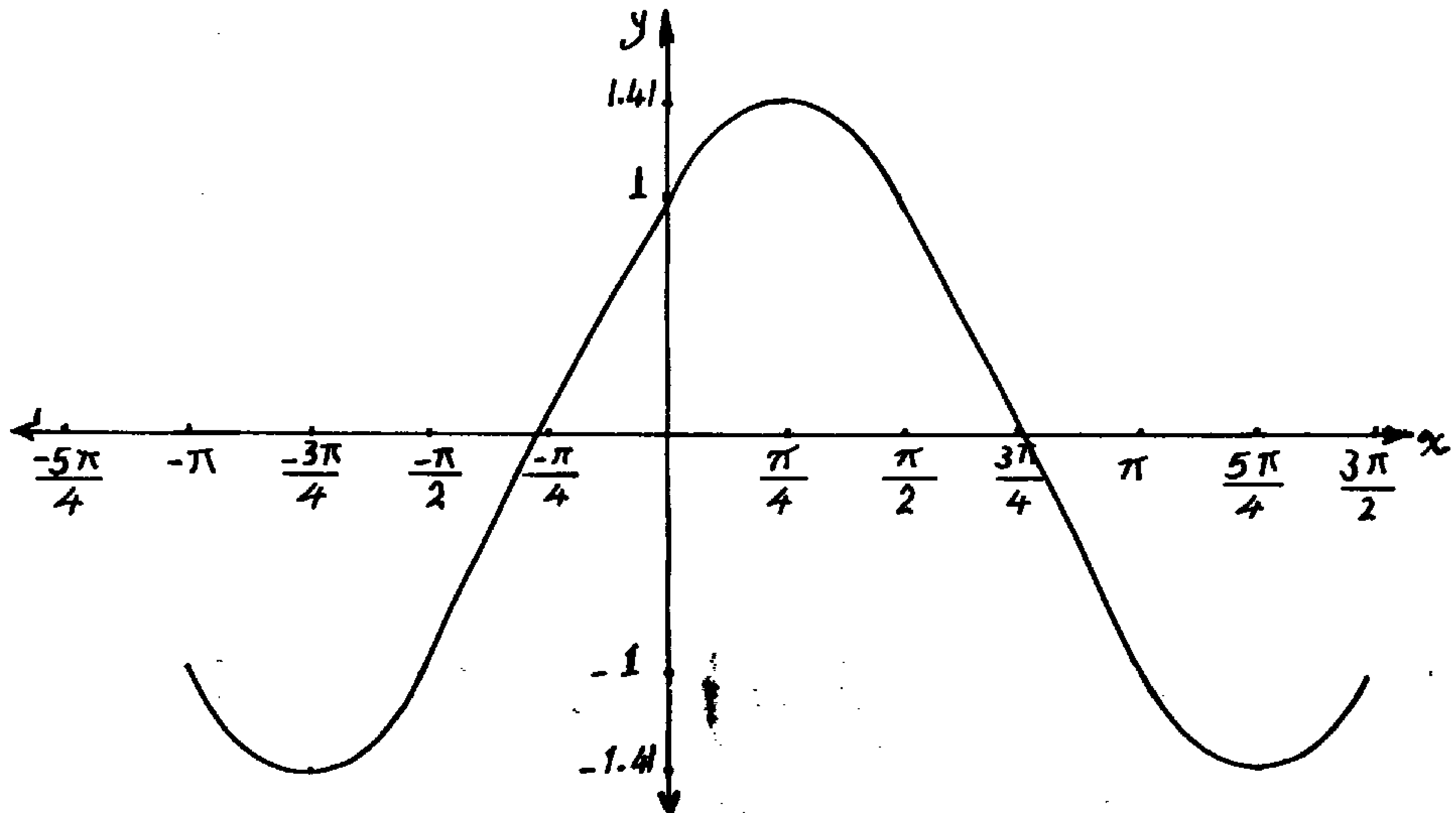
$\frac{\pi}{4}, 2\pi\ n, \frac{5\pi}{4}, 2\pi\ n \quad , \quad n = ...,-2,-1,0,1,2,.....$

إلا أننا سنقتصر فى دراسة الدالة فى المدى : -

$0 \le x \le 2\pi$

وسوف نستخدم طريقة المشتقة الأولى لتحديد ماهية النقط الحرجة ولابد من تجربـة قيـم أكبر قليلاً أو أقل قليلاً من كل من هذه القيم الحرجة ثم نسطر الجدول التالى : -

		$\frac{dy}{dx} = \cos x - \sin x$	
$x < \frac{\pi}{4}$	$x = 0$	$+1$	+
$\frac{5\pi}{4} > x > \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{\pi}{2}$	-1	–
$x > \frac{5\pi}{4}$	$x = 2\pi$	$+1$	+



شكل (٧ - ٢٩)

الباب الثامن

تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

Applied problems in maxima and minima

٨-١ :- عام :- إن أول خطوة فى حل المسائل من هذا النوع هو معرفة أى من المتغيرات ، مطلوب حساب قيمته العظمى أوالصغرى .

أى معرفة المتغير التابع y ، ثم معرفة المتغير المستقل x ثم نكتب معادلة فيما بين y , x وأى متغيرات أخرى فى المسألة يجب ملاشاتها بالتعويض بحيث يبقى لنا المتغير المستقل x فقط والمتغير التابع y .

ثم نفاضل y بالنسبة إلى x ثم نساوى y' بالصفر لإيجاد قيم x الحرجة .

وفى النهاية نحسب أيا من قيم x الحرجة هى نهاية عظمى أم صغرى .

(١) إذا كانت سرعة جسم بالقدم / ثانية تُعطى بالعلاقة :-

$$V(t) = t^2 - 4t + 5 \quad , \quad t \geq 0$$

حيث t الزمن بالثوانى .

فأوجد الزمن اللازم لكى تُصبح السرعة عظمى نسبية أو صغرى نسبية .

الحـــل :-

نوجد $V'(t)$ ونساويها بالصفر ونحل المعادلة لإيجاد قيم t الحرجة .

$$V'(t) = 2t - 4 = 2(t-2)$$

وعندما $V'(t) = 0$ فإن $t = 2$ وهى القيمة الحرجة للزمن

ولمعرفة ما إذا كانت $t = 2$ هى قيمة عظمى أم صغرى ، نختبر $V'(t)$

عنـدما $0 \leqq t < 2$ وعندما $t = 2$

وسوف نلاحظ أن $V'(t) < 0$ لقيم $0 \leqq t < 2$

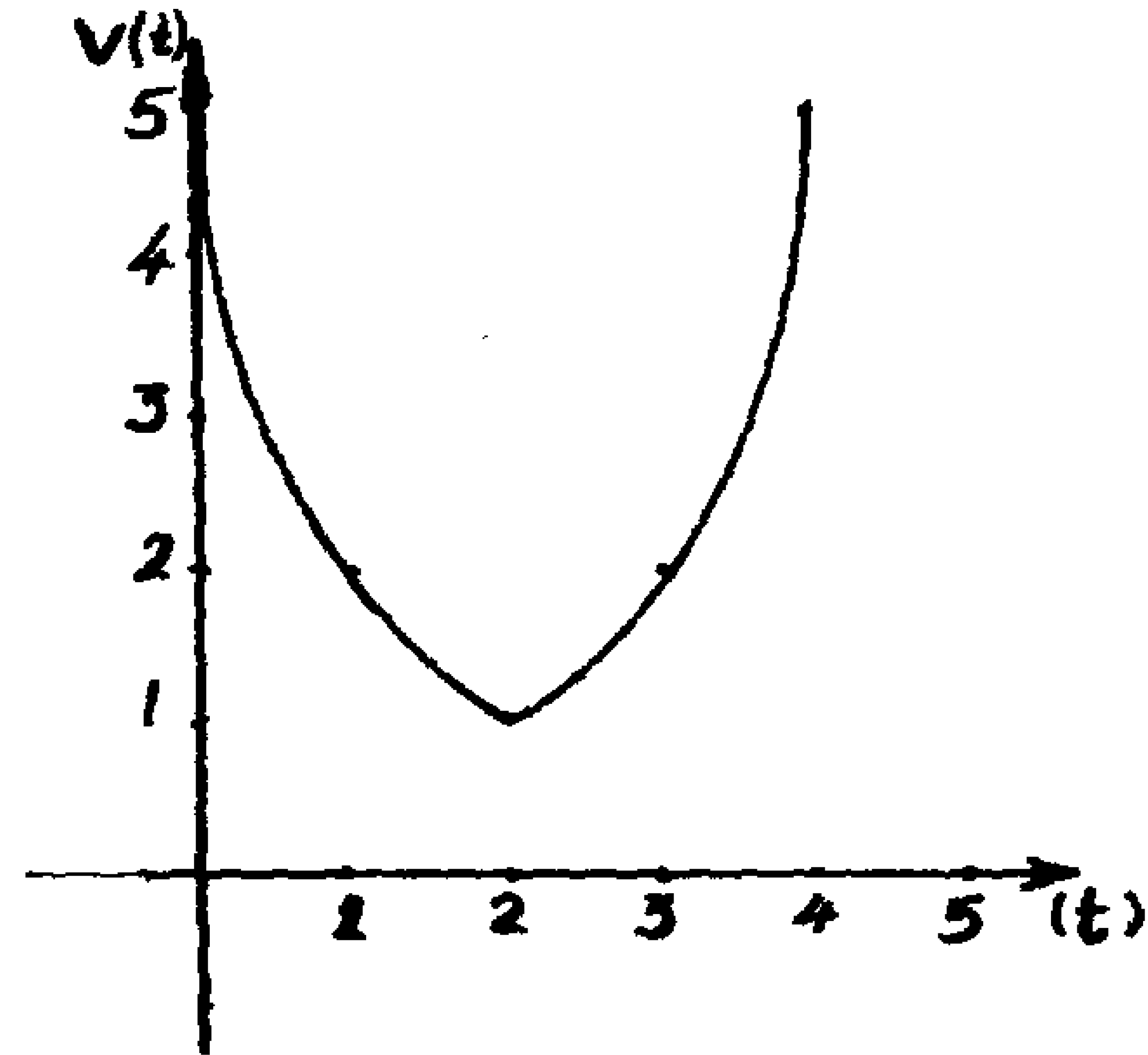
، $V'(t) > 0$ لقيم $t > 2$

مما يعنى أن V لها نهاية صغرى نسبية عندما $t = 2$ ، $V(2) = 1\ ft/s$

والآن ، لنختبر نقطة النهاية أى $t = 0$ وسوف تجد أن $V(0) = 5$

وسوف نجد كذلك أن $V'(0)=-4$ وهى ذات قيمة سـالبة وبالتالى فإن V ، دالة تناقصية عند $t=0$.

ولذلك ، ففى الفترة $t \geqq 0$ فإن $V(0)$ تساوى $5\,ft/s$ وهى قيمة عظمى ، أنظر الرسم شكل (٨-١) .



شكل (٨-١)

(٢) كيف يمكنك التعبير عن رقم معين ، كمجموع رقمين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

الحـــل :-

لنعتبر : أى رقم معين = a

أحد جزئيه = x

$\therefore$ $(a - x)$ هى الجزء الآخر من الرقم المعين .

وحاصل ضرب رقميه المكونين لجزئيه يساوى :-

$$x(a-x)=xa-x^2=y$$

ولكـى يكـون حـاصل الضـرب أكـبر مـا يمكـن نوجـد y' ونسـاويها بـالصفر

$$y'=a-2x=0$$

$$\therefore x=\frac{a}{2}$$

ولمعرفة ما إذا كانت $x=\frac{a}{2}$ قيمة عظمى أم لا ، سنأخذ قيمة أقل من $\frac{a}{2}$ ولتكن $\frac{a}{4}$ ، ونأخذ قيمة أخرى أكبر من $\frac{a}{2}$ ولتكن $\frac{3a}{4}$ ثم نحسب قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند : $x=\frac{a}{4},\frac{3a}{4}$

فإذا كان هنالك تغير فى الإشارة من (+) إلى (−) ، تكون $x=\frac{a}{2}$ قيمة عظمى :−

$$\frac{dy}{dx}\left(at \quad x=\frac{a}{2}\right)=a-\frac{2a}{4}=\frac{a}{2}(+ve)$$

$$\frac{dy}{dx}\left(at \quad x=\frac{3a}{4}\right)=a-\frac{6a}{4}=-\frac{a}{2}(-ve)$$

وعليه فإن $x=\frac{a}{2}$ هى فعلاً قيمة عظمى وعليه فإن الرقم المعطى يُقسم إلى جزئين تماماً فيكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

(٣) إذا اعتبرنا الرقم 100 كمجموع جزئين ، فاوجد قيمة كل من جزئيه بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

الحـــــل :−

لنعتبر x أحد جزئى الرقم 100

$\therefore$ الجزء الآخر $= 100-x$

والآن حاصل ضرب الجزئين = p :−

$$p=x(100-x)=100x-x^2$$

نوجد p' ونساويها بالصفر

$$\therefore p'=100-2x=0$$

$$\therefore 2x=100 \qquad \therefore x=50$$

وهى القيمة الحرجة الوحيدة .

ومثل المتبع فى المسألة السابقة نتأكد بطريقة y' من أن $x=50$ هى نهاية عظمى ، وعليه فإن حاصل ضرب جزئى الرقم 100 ، يكون أقصى ما يمكن عندما يكون كل من جزئيه متساويين وهو هنا 50 , $50+50=100$, $50\times50=2500$

(٤) اوجد العدد الذى يزيد عن مربعه بأكبر قيمة ممكنة .

الحـــــل :-

نكتب أولاً المعادلة التى تعبر عن الفرق بـين العـدد ومربعـه وليكـن العـدد = x وليكـن الفرق هو f .

$$\therefore\ f = x - x^2$$

ثم نوجد f' ونساويها بالصفر ونحل المعادلة للحصول على قيم x الحرجة .

$$\therefore\ f' = 1 - 2x = 0$$

$$\therefore\ x = \frac{1}{2}$$

ولتحديد ما إذا كانت هذه القيمة عظمى أم لا نوجد المشتقة الثانية .

$$\therefore\ f'' = -2 \quad (-ve)$$

مما يعنى أن المشتقة الثانية دائماً سالبة

وهذا يعنى أن $x = \frac{1}{2}$ هى قيمة عظمى

$\therefore$ فالعدد الذى يزيد عن مربعه بأكبر قدر ممكن هو $\frac{1}{2}$ ،

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

(٥) ما هما العددان الموجبان اللذان مجموعهما = 20 وحـاصل ضربهمـا أكـبر مـا يمكن .

الحـــــل :-

ليكن أحد العددين x $\therefore$ فالعدد الآخر :- $20 - x$

وحاصل ضربهما p

$$p = x(20 - x)$$
$$= 20x - x^2 \qquad , \quad x > 0 \ , \ 20 - x > 0$$

أى $0 < x < 20$

$$\frac{dp}{dx} = 20 - 2x \text{ ،}$$

$$= 2(10 - x) = 0$$

$$\therefore x = 10$$

وعنـد $x = 10$ توجـد قيمـة حرجـة وللتـأكد مـن أنهـا عظمـى ننظـر إلى $\frac{dy}{dx}$ عندمـا $x < 10$ وعندما $x > 10$

فإذا كان هنالك تغير فى الإشارة من (+) إلى (−) تكون $x = 10$ نهاية عظمى وسوف نجـــد أن :-

عندما	$x < 10$	$\frac{dp}{dx} > 0 \ (+ve)$
عندما	$x > 10$	$\frac{dp}{dx} < 0 (-ve)$
عندما	$x = 10$	$\frac{dp}{dx} = 0$

وعليـه فـإن $x = 10$ تمثـل نهايـة عظمـى ويمكـن الحصـول علـى نفـس النتيجـة إذا مـا استخدمنا طريقة المشتقة الثانية .

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = -2 \quad (-ve)$$

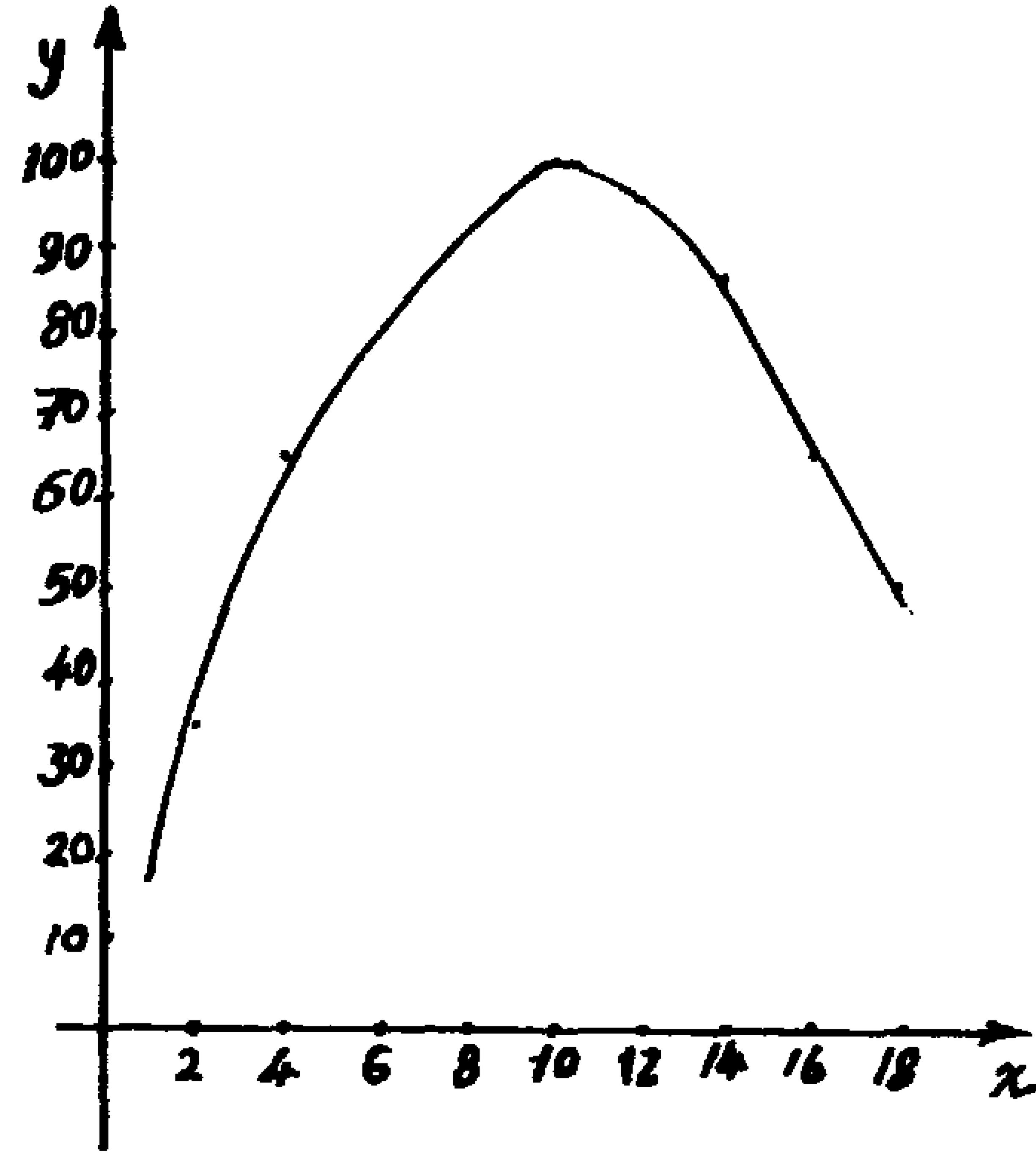
وهى سالبة دائماً مما يعنى وجود نهاية عظمى عند $x = 10$

وإذا نظرنا إلى الرســم شـكل (٨-٢) سـنجد أنـه مقعـر للأسـفل عنـد كـل نقطـة عليـه وللمنحنى قيمة عظمى عندما $x = 10$

وبذلك فإن العددان اللـذان مجموعهمـا = 20 وحـاصل ضربهمـا أكـبر مـا يمكـن همـا 10 , 10 وحاصل ضربهما = 100

ملحـــوظة :- يمكن التأكد حسابياً من ذلك بتجربة أى عددين كالتالى :-

$2 + 18 = 20$	,	$2 \times 18 = 36$
$4 + 16 = 20$	,	$4 \times 16 = 64$
$6 + 14 = 20$	,	$6 \times 14 = 84$
$7 + 13 = 20$	,	$7 \times 13 = 91$
$8 + 12 = 20$	,	$8 \times 12 = 96$
$9 + 11 = 20$	,	$9 \times 11 = 99$
$10 + 10 = 20$	,	$10 \times 10 = 100$



شكل (٨-٢)

(٦) قُسم العدد 72 إلى جزئين بحيث يكون حاصل ضرب أحدهما فى مكعب الآخر، أكبر ما يمكن ، فما هما العددان .

الحـــــل :-

لتكن y هى أحد الجزئين

∴ الجزء الآخر $= (72-y)$

وحاصل ضربهما p :-

$$p=(72-y)\times y^3$$
$$=72y^3-y^4$$

بعد ذلك نوجد $\frac{dy}{dx}$ ونساويها بالصفر

$$\therefore 216y^2-4y^3=0$$
$$\therefore 4y^2\,(54-y)=0$$
$$\therefore\ y=0 \qquad\qquad y=54$$

وهى القيمة الحرجة لـ y

وواضح أن $y=0$ لا تعنى شيئاً هنا لأنه إذا كان أحد الجزئين صفراً فالجزء الآخر $=(72-0)=72$ وحاصل ضربهما $=0$ ولا يساوى قيمة عظمى .

أما إذا وضعنا $y=54$

فنوجد $\frac{d^2p}{dy^2}$ لمعرفة ما إذا كانت قيمة y هذه تحقق نهاية عظمى أم لا ،

$$\frac{d^2p}{dy^2}=432y-12y^2$$

وبالتعويض بقيمة $y=54$ سنجد أن :-

$$\frac{d^2p}{dy^2}=-11664=(-ve)$$

وعليه فإنه عندما يكون أحد الجزئين $=54$ ويكون الجزء الآخر مساوياً 18 $(72-54)$ فإنه توجد نهاية عظمى .

(٧) ما هما العددان الموجبان اللذان مجموعهما $=100$ ومربع أحدهما مضروباً فى ضعف مكعب الآخر ، أقصى ما يمكن

الحـــل :-

نفرض أن أحد العددين هو x

$\therefore$ العدد الآخر يكون $(100-x)$

والآن نكتب المعادلة كالتالى :-

$$p=x^2\times 2\left[(100-x)^3\right]$$

$$\text{،}\ p'=4x(100-x)^3-6x^2(100-x)^2$$
$$=2x(100-x)^2\left[2(100-x)-3x\right]$$
$$=2x(100-x)^2\left[200-5x\right]$$

وبــوضع $p'=0$

$$\therefore 2x=0 \quad\rightarrow\quad x=0$$
$$\text{،}\ (100-x)^2=0 \quad\rightarrow\quad (100-x)=0 \quad\rightarrow x=100$$
$$\text{،}\ 200-5x=0 \quad\rightarrow\quad x=40$$

∴ قيم x الحرجة هى $40\ ,\ 100\ ,\ 0$

ولما كانت :-

$$p(0)=0 \qquad , \qquad p(100)=0$$

$$p(40)=2(40)^2\left[(100-40)^3\right]$$

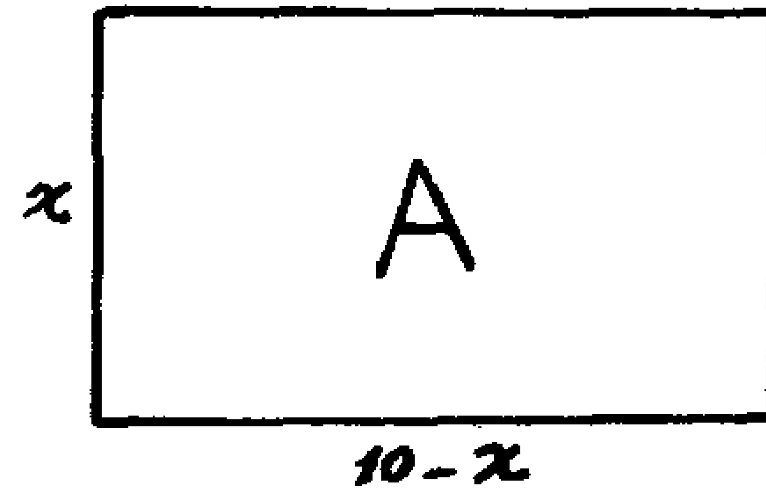
$$=3200\left[60^3\right] > 0$$

∴ فقيمة $x=40$ هى التى تحقق الشرط اللازم وعليه يكون الرقمان هما $40\ ,\ 60$

(٨) قطعة سلك طولها 20 متر يراد تشكيلها بحيث تكون ذات شكل مستطيل فما هى أبعاد هذا المستطيل بحيث يحيط بأكبر مساحة ممكنة .

الحـــل :-

أنظر الرسم شكل (٨-٣) .



شكل (٨-٣)

إذا اعتبرنا أن عرض المستطيل = x

فيكون طوله $\dfrac{20-2x}{2}=(10-x)$

، مساحة المستطيل $A=x(10-x)$

$$\frac{dA}{dx}=10-2x$$

وبـوضع $A'=0$

$$\therefore\ 2(5-x)=0$$

$$\therefore\ x=5$$

ولمعرفة ما إذا كانت $x = 5$ تحقق نهاية عظمى أم لا ، نختار قيمة أكبر من x قليلاً ولتكن 6 وقيمة أقل قليلاً ولتكن 4 ونثبت أن $A`$ تغير إشارتها موجب إلى سالب ،

$A`(4) = 2 \quad , \quad A`(6) = -2$

$\therefore$ $x = 5$ هى بالتأكيد القيمة التى تحقق الشرط اللازم (أكبر مساحة)

وعليه تكون أبعاد المستطيل $5 \ , \ (10-5) = 5$

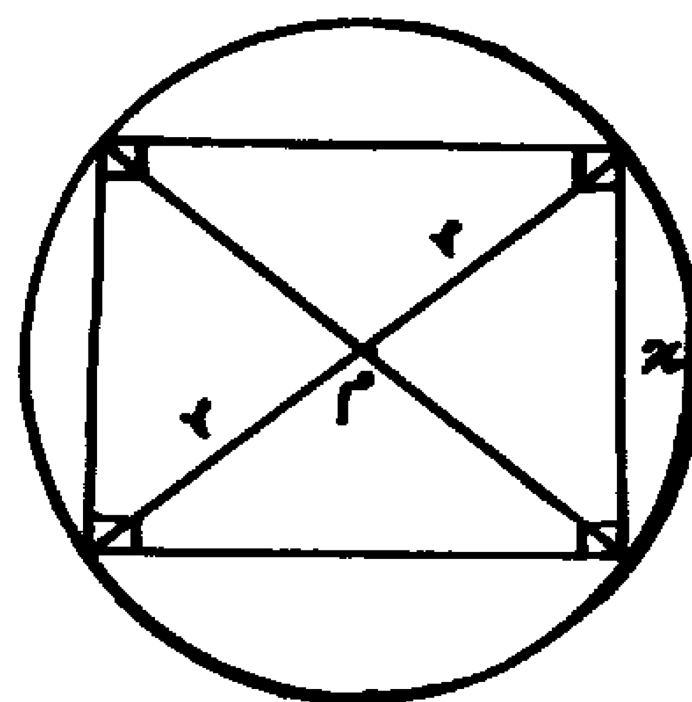
أى أن طوله = عرضه أى أنه يلزم أن يكون الشكل على هيئة مربع طول ضلعه = $5m.$

ويمكن إثبات أن $x = 5$ هى نهاية عظمى إذا ما أوجدنا $A``$ فسنجد أنها سالبة مما يؤكد الإجابة السابق الحصول عليها .

(٩) ما هى أكبر مساحة ممكنة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها = r

الحـــــــل :-

أنظر الرسم شكل (٨-٤) .



شكل (٨-٤)

من الرسم يتضح أن قطر المستطيل = $2r$

، طول ضلع المستطيل (العرض) = x

$\therefore$ طول المستطيل = $\sqrt{(2r)^2 - x^2}$

$= \sqrt{4r^2 - x^2}$

ومساحة المستطيل = الطول × العرض = A

$$\therefore\ A = x\sqrt{4r^2 - x^2}$$

$$، \quad A' = x \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{(4r^2 - x^2)} + \sqrt{(4r^2 - x^2)} \cdot 1 = 0$$

$$\therefore A' = x \times \frac{1}{2}\left(4r^2 - x^2\right)^{\frac{-1}{2}} \times -2x + \left(4r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

وبالإختصار :-

$$\therefore \frac{4r^2 - 2x^2}{\left(4r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

ولما كان المقام $\left(4r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ لا يمكـن أن يسـاوى الصفـر لأنـه يمثـل طـول المسـتطيل ، لذلك فإن البسط لابد وأن يساوى الصفر :-

$$\therefore 4r^2 - 2x^2 = 0$$

$$\therefore 4r^2 = 2x^2$$

$$\therefore x^2 = 2r^2$$

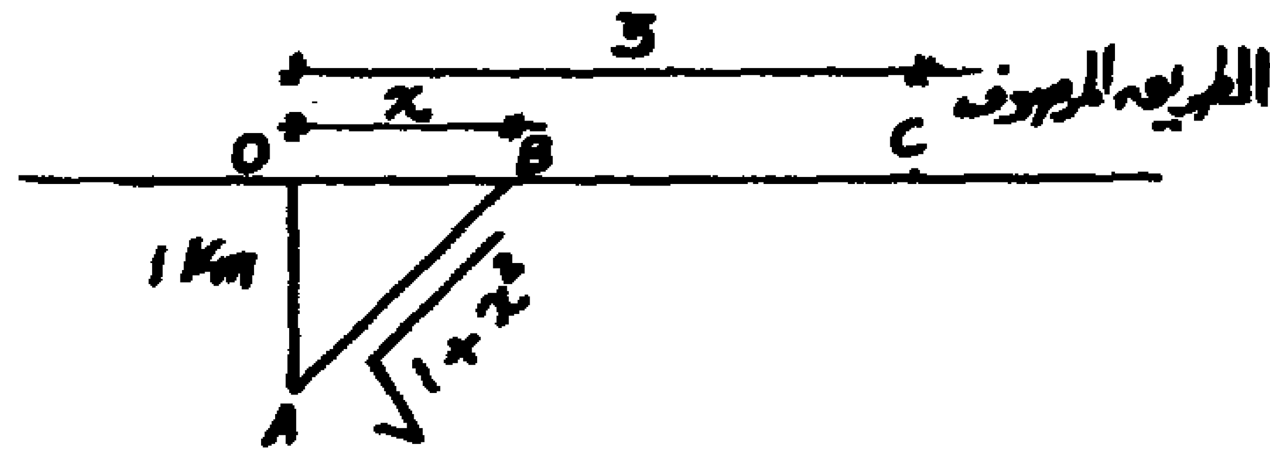
$$\therefore x = r\sqrt{2}$$

وعليه يكون طول المستطيل :-

$$\left(4r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left[4r^2 - \left(r\sqrt{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[4r^2 - 2r^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[2r^2\right]^{\frac{1}{2}} = r\sqrt{2}$$

أى أن طـول المسـتطيل = عرضـه = $r\sqrt{2}$ = نصـف قطـر الدائـرة مضروبـاً فـــى $\sqrt{2}$ وواضح أنه لابد أن يكون مربعاً طول ضلعه = $r\sqrt{2}$.

(١٠) دراجة عند "A" وعلى بعد "1"km من أقرب نقطة لها على طريق مرصـوف "o" ، أنظر الرسم شكل (٨-٥)



شكل (٨-٥)

يريد قائدها أن يتجه إلى "C" على الطريق المرصوف على بعد "3" km من نقطة "O" فإذا كانت سرعته على الطريق غير المرصوف "AO" تعادل "10" km/h في حين أنها تبلغ "20" km/h على الطريق "CO" المرصوف .

فعند أى نقطة "B" على الطريق المرصوف يجب أن يتجه قائد الدراجة حتى يصل إلى "C" فى أقل زمن ممكن .

الحـــــل :-

من الشكل ،

$$AO = 1 \ \ km$$
$$, OB = x \ \ km$$
$$, AB = \sqrt{1+x^2} \ \ km$$
$$, BC = 3 - x \ \ km$$

وعلى الراكب أن يتجه بالدراجة من A إلى B " طريق غير مرصوف أيضاً " ثم من B إلى C عبر طريق مرصوف .

والزمن اللازم لذلك = المسافة ÷ السرعة

$$T = \frac{\sqrt{1+x^2}}{10} + \frac{(3-x)}{20}$$

ولإيجاد قيمة x التى تكون عندها T نهاية صغرى ، نفاضل T بالنسبة إلى x ونساويها بالصفر .

$$\therefore T' = \frac{1}{10} \times \frac{1 \times 2x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{20}$$

$$= \frac{x}{10\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{20}$$

$$= \frac{2x - \sqrt{1+x^2}}{20\sqrt{1+x^2}} = 0$$

ولما كان المقام موجب دائماً وأكبر من الصفر ، لذلك فالبسط يساوى الصفر

$$\therefore 2x - \sqrt{1+x^2} = 0$$

$\therefore \sqrt{1+x^2} = 2x$

$\therefore 1+x^2 = 4x^2$

$\therefore x^2 = \frac{1}{3}$

$\therefore \ x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

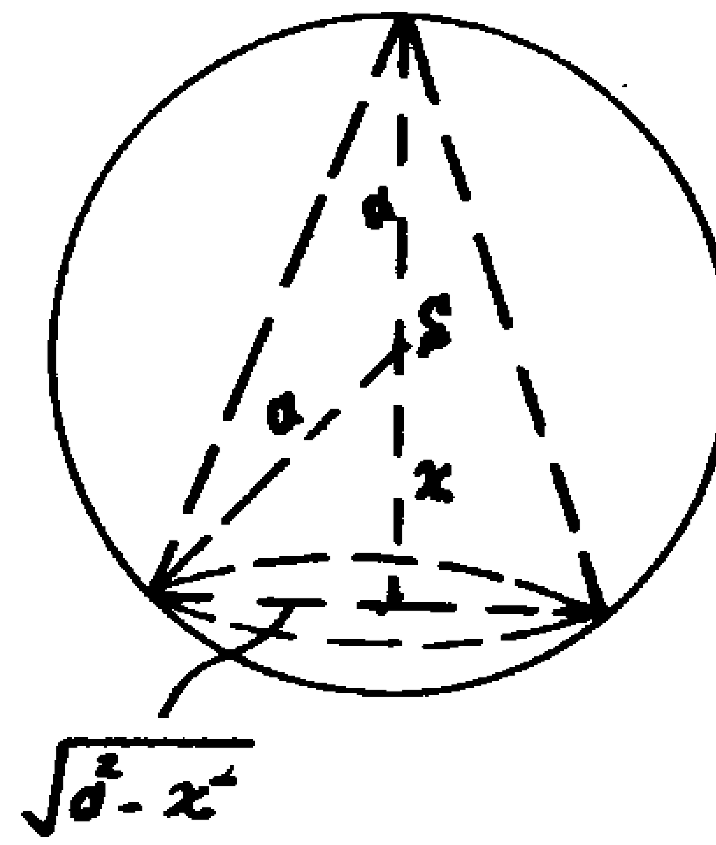
والقيمة السالبة مرفوضة لأنه ليس لها معنى فى هذا النوع من المسائل وعليه فإن قيمة x الحرجة هى $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

وبذلك فإن على قائد الدراجة أن يسير فى اتجاه AB بحيث يقطع OC عند نقطة B على بعد $x = OB = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0.58\ km$

(١١) أوجد أبعاد أكبر مخروط دائرى قائم يمكن وضعه فى كرة نصف قطرها (a)

الحـــــل :-

كما هو موضح بالشكل (٨-٦) .



شكل (٨-٦)

نفترض أن x هى المسافة من مركز الكرة s إلى مركز قاعدة المخروط o والتى يبلغ نصف قطر قاعدتها :- $\sqrt{a^2 - x^2}$

وأن ارتفاع المخروط = $a + x$

، ∵ حجم المخروط القائم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الإرتفاع :-

$$V=\frac{1}{3}\pi\ r^2h$$

حيث r تمثل نصف قطر قاعدة المخروط $\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)$

، h = ارتفاع المخروط .

$$\therefore V=\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2.(a+x)$$

$$\therefore V`=\frac{\pi}{3}\left[a^2-x^2-2x\,(a+x)\right]$$

$$=\frac{\pi}{3}(a+x)(a-3x)$$

وبوضع $V`=0$

$$\therefore \frac{\pi}{3}(a+x)(a-3x)=0$$

$$\therefore x_1=-a \quad , \quad x_2=\frac{a}{3}$$

والإجابة $x_1=-a$ غير ذات معنى لأنه لا توجد مسافة سالبة .

ولمعرفة ما إذا كانت $x=\frac{a}{3}$ تحقق أقصى حجم ممكن من عدمه نوجد $V``$:-

$$\therefore V``=\frac{-2}{3}(a+3x)=(-ve)$$

أى سالبة .

وهى سالبة دائماً لجميع قيم x الموجبة ، a الموجبة كذلك وعليه فإنه عندما تكون $x=\frac{a}{3}$ أى عندما تكون x مساوية لسدس $\frac{1}{6}$ قطر الكرة يكون حجم المخروط أكبر ما يمكن ويساوى :

$$V=\frac{\pi}{3}\left(a^2-x^2\right).(a+x)$$

$$V=\frac{\pi}{3}\left(a^2-\frac{a^2}{9}\right).\left(a+\frac{a}{3}\right)=\frac{32}{81}\pi\,a^3$$

(١٢) غلاية إسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى وذات حجم ثابت قدره V فإذا كان سطح قاعدة الغلاية يتكلف ضعف السطح الأسطوانى .

فأوجد نسبة الارتفاع إلى نصف القطر بحيث تكون التكلفة أقل ما يمكن .

الحـــــل :-

نعتبـــــر :-

$r =$ نصف القطر

$h =$ ارتفاع الغلاية

$2k =$ تكلفة وحدة المساحة من سطح القاعدة

$k =$ تكلفة وحدة المساحة للسطح الأسطوانى

$c =$ التكلفة الكلية

$$c = 2k\pi r^2 + 2k\pi r h$$

ثم نختزل المتغيرات فى الطرف الأيمن لتُصبح واحداً فقط وهو (r)

$$\because V = \pi r^2 h \qquad , \qquad \therefore h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$\therefore c = 2k\pi r^2 + 2k\frac{V}{r}$$

وبتفاضل c بالنسبة إلى r :-

(ثابت $= V$) $$\therefore c' = 4k\pi r - \frac{2kV}{r^2}$$

وبوضع $V = \pi r^2 h$ مرة ثانية ،

$$\therefore c' = 4k\pi r - 2k\pi h = 2k\pi(2r - h)$$

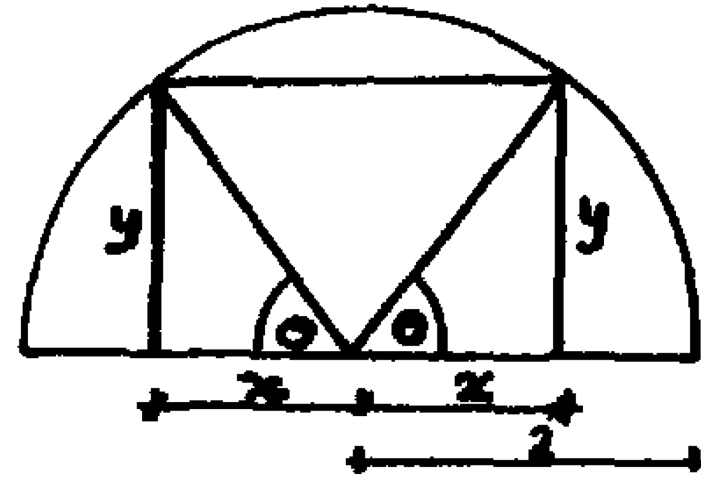
وبوضع $c' = 0$:-

$$\therefore 2r - h = 0 \qquad \therefore h = 2r$$

وبذلك فإنه عندما يصبح الارتفاع ضعف نصف القطر (القطر) فإن التكلفة تكون أقل ما يمكن .

(١٣) فى الشكل (٨-٧) ، نصف دائرة قطرها = 4 ، مطلوب أن نرسم بها مستطيل بحيث يكون ذو أكبر مساحة ممكنة ، فما هى أبعاده ؟

الحـــــل :-



شكل [٨ – ٧]

المساحة (من الشكل)

$A = 2x \cdot y$

$, \ x = 2\cos\theta$

$, \ y = 2\sin\theta \ \therefore A = 2 \cdot x \cdot y = 2 \cdot 2\cos\theta \cdot 2\sin\theta = 8\sin\theta\cos\theta$

$\because \sin\theta \ \cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2}$ ،

$\therefore A = 4\sin 2\theta$

وسوف نوجد قيمة θ المناظرة لأكبر مساحة للمستطيل وذلك بإيجاد A' بالنسبة لـــ θ ومساواتها بالصفر ثم نوجد قيم θ :

$$A' = \frac{dA}{d\theta} = 4 \times \cos 2\theta \times 2 = 8\cos 2\theta$$

$A' = 8\cos 2\theta = 0$ ،

$\therefore \cos 2\theta = 0 \qquad \therefore 2\theta = \dfrac{\pi}{2} \qquad \therefore \theta = \dfrac{\pi}{4}$

ثم نوجد A'' لمعرفة ما إذا كانت $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ تحقق أقصى مساحة أم لا :-

$$A'' = 8 \times -\sin 2\theta \times 2 = -16\sin 2\theta$$

فعند وضع $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ أو $2\theta = \dfrac{\pi}{2}$ نجد أن $A'' = -ve$ $(-16) = A''$

$\therefore$ عند $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ تكون هنالك نهاية عظمى .

والمساحة A =

$$A = 4\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\ units$$

(١٤) أوجد أبعاد المستطيل الذى مساحته A وحدة مربعة وطـول قطـره أقصـى مـا يمكن .

الحـــــل :-

أنظر الرسم شكل (٨-٨)

إذا اعتبرنا عرض المستطيل = x

وإذا اعتبرنا طول المستطيل = y

وإذا اعتبرنا قطر المستطيل = z

$$\therefore A = x\,y \qquad \therefore y = \frac{A}{x}$$

$$، z^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore z^2 = x^2 + \frac{A^2}{x^2}$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى x

$$\therefore 2z\,\frac{dz}{dx} = 2x - \frac{2A^2}{x^3}$$

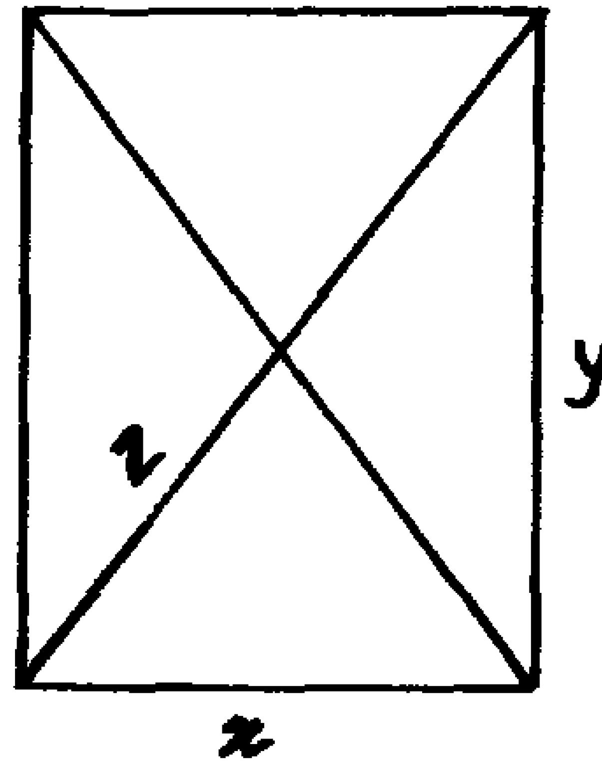
وبوضع $\frac{dz}{dx} = 0$ ∴ الطرف الأيسر = صفر

$$\therefore 2x - \frac{2A^2}{x^3} = 0$$

$$\therefore x^4 = A^2$$

$$\therefore x^2 = A = x\,y \qquad \therefore x = y$$

وعليه فإن المستطيل يكون مربع .



شكل (٨-٨)

(١٥) أوجد عددين موجبين مجموعهما 24 وبحيث يكون :

أ – حاصل ضربهما أكبر ما يمكن

ب– مجموع مكعبيهما أصغر ما يمكن

الحــــــل :-

أولاً : نفرض أن العددين هما $(x)\,,\,(24-x)$

نفرض أن حاصل ضربهما = y

$$\therefore\ y = x(24-x) = 24x - x^2$$

$$،\ y' = 24 - 2x = 2(12-x)$$

بوضع $y' = 0$

$$\therefore\ 12 - x = 0 \qquad \therefore\ x = 12$$

وهذه النقطة الحرجة الوحيدة لهذه الدالة .

ثم نوجد قيم الدالة y عند النقطة الحرجة وعند طرفى الفترة أى عند : $12\,,\,0\,,\,24$

$$\therefore\ y_{(12)} = 24 \times 12 - (12)^2 = 288 - 144 = 144$$

$$،\ y(0) = 0$$

$$،\ y_{(24)} = 24 \times 24 - (24)^2 = 0 \qquad also$$

وعليه فإن أكبر قيمة لحاصل الضرب هى : $y = 144$

عندما $x = 12$

أى عندما يكون العددان 12 , 12

ثانياً :– كما سبق فإن فرضنا أن العددين هما x , $24 - x$ ومجموع مكعبيهما = y

$$\therefore y = (24 - x)^3 + x^3$$

$$، \; y' = 3x^2 + 3(24 - x)^2 \times -1$$

$$= 3x^2 - 3\left(576 - 48x + x^2\right)$$

$$= 3x^2 - 1728 + 144x - 3x^2$$

$$= 144x - 1728 = 144(x - 12)$$

وبوضع $y' = 0$

$$\therefore 144(x - 12) = 0$$

$$\therefore x = 12$$

وهى النقطة الحرجة الوحيدة لهذه الدالة .

وكما سبق فى أولاً ، نوجد قيم الدالة y عند 12,0,24

$$\therefore y_{(12)} = (24 - 12)^3 + 12^3 = 1728 + 1728 = 3456$$

$$، y_{(0)} = (24)^3 + 0 = 13824$$

$$، y_{(24)} = 0 + 24^3 = 13824$$

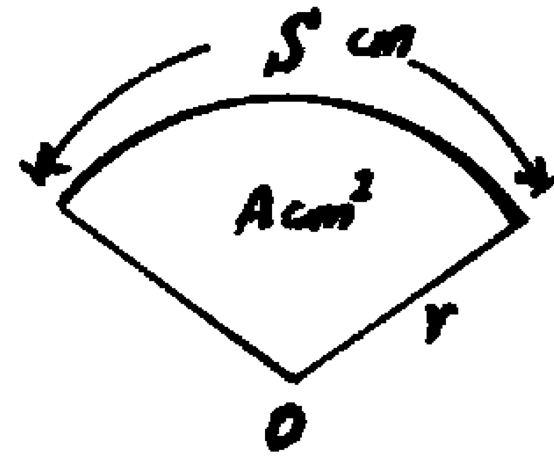
وواضح أن أصغر قيمة لمجموع المكعبين هى 3456 ونحصل عليها عندما $x = 12$ أى عندما يكون العددان هما 12 , 12

كما أن أكبر قيمة لمجموع المكعبين تكون هى 13824 (أحد العددين صفر) .

(١٦) قطاع دائرى طول محيطه = $64\ cm$. أوجد طول نصف قطر دائرته عندما تكون مساحة سطحه أكبر ما يمكن .

الحـــــل :–

أنظر الرسم شكل (٨ – ٩) .



شكل (٨ – ٩)

نفترض أن نصف قطر دائرة القطاع $= r$ ومركزه $= O$

، طول قوسه $= S\ cm$ ومساحته $= A\ cm^2$

$$A=\frac{1}{2}S.r \quad \text{.......... (1)}$$

، $\because$ محيط القطاع $= 64\ cm$

$$\therefore S+2r=64$$

$$\therefore S=64-2r \quad \text{.......... (2)}$$

وبالتعويض فى المعادلة (1) عن قيمة S من المعادلة (2) : –

$$\therefore A=\frac{1}{2}r(64-2r)$$

$$=32r-r^2$$

$$\frac{dA}{dr}=A'=32-2r=2(16-r)$$

وبوضع $A'=0$ للحصول على القيم الحرجة

$$\therefore 2(16-r)=0 \qquad \therefore r=16$$

$\therefore$ $r=16$ هى النقطة الحرجة الوحيدة لهذه الدالة

وبإيجاد A''

$$\therefore A''=-2 \quad =-ve$$

أى أنه عند $r=16$ توجد نهاية عظمى لمساحة القطاع وتساوى $256cm^2$

أو بطريقة أخرى نوجد قيم الدالة A عند النقطة الحرجة $r=16$ وعند حدود الفترة r وهى $[0,32]$

$$A_{(16)} = 32\times16-(16)^2$$
$$= 512-256 \qquad = 256\ cm^2$$
$$\text{،} A_{(0)} = 0$$
$$\text{،} A_{(32)} = 32\times32-(32)^2 = 0$$

∴ أكبر قيمة لمساحة سطح القطاع : -

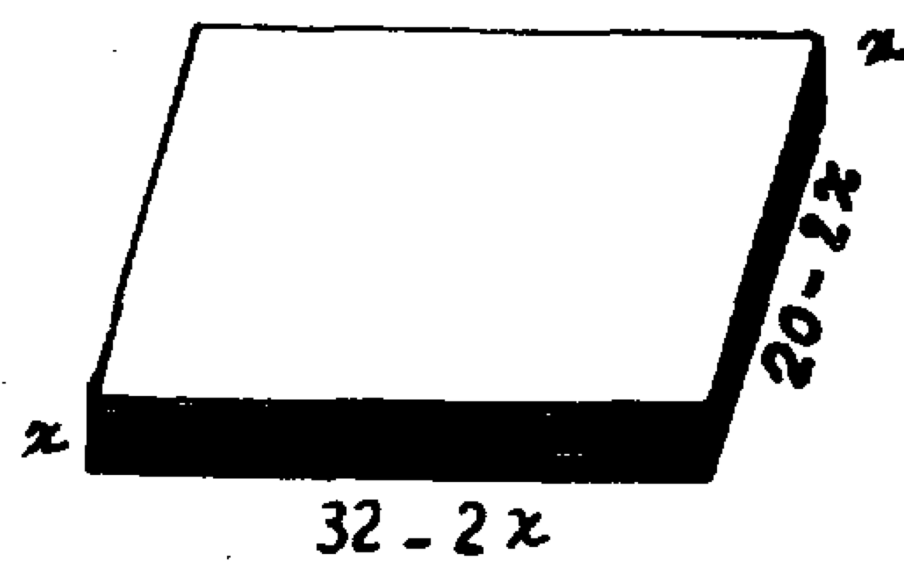
$$A_{.} = 256\ \ cm^2$$

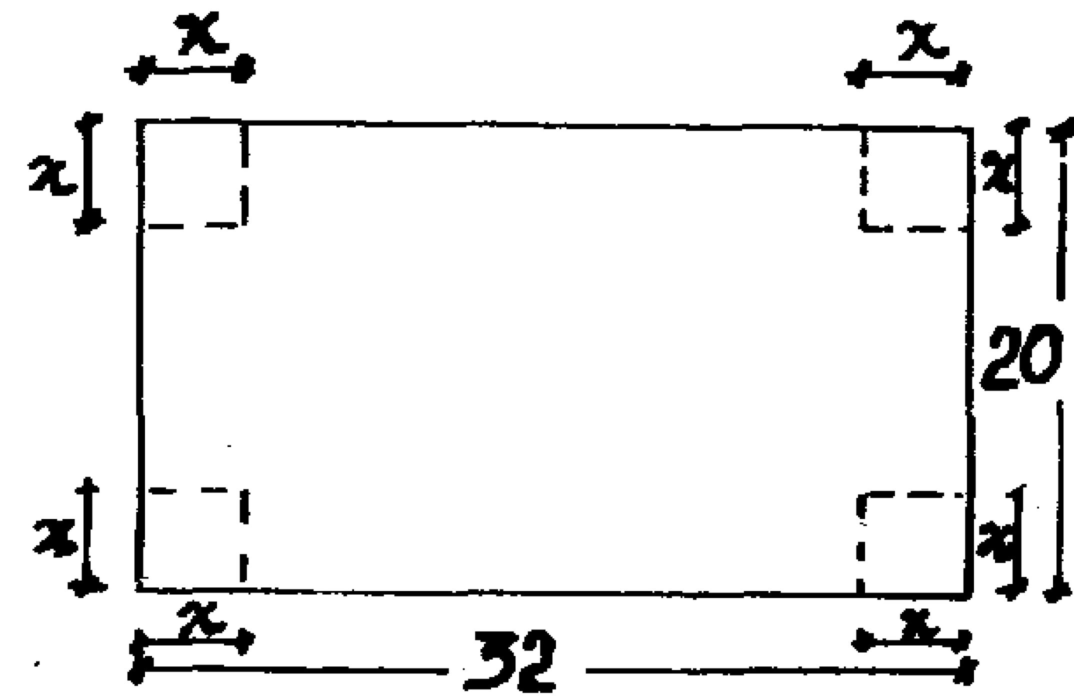
وذلك عندما $S=32\ cm$، $r=16\ cm$

(١٧) قطعة صفيح معدنية على شكل مستطيل أبعـــاده $20,32\ cm$ ، قطعت من أركانها الأربعة ، أربعة مربعات متساوية المساحة ثم تم ثنى الحواف لتكون صنـدوق على شكل متوازى مستطيلات مفتوح من الأعلى

والمطلوب حساب طـول ضلـع المربـع المقطـوع مـن الأجنـاب وبحيـث يكـون حجـم الصندوق أكبر ما يمكن .

الحـــــــل :- انظر الرسم شكل (٨ - ١٠) .





شكل (٨ - ١٠)

نفترض أن طول ضلع المربع الصغير المقطوع من الأجناب = $x\ cm$ ،

حجم الصندوق = $V \quad cm^3$

وإرتفاع الصندوق = $x \quad cm$

، أبعاد قاعدتيه = $(32-2\,x)\,,\,(20-2\,x)$

، حجم الصندوق = مساحة القاعدة × الإرتفاع = V

(١) .... $\therefore V=(20-2x)\ (32-2x)\times x$

وطرفى الفترة المحصورة فيها x هى $[0,10]$

ثم نوجد $V^\backslash=\dfrac{dV}{dx}$ ونساويها بالصفر للحصول على قيم x الحرجة

$$,\because V\ =4x^3-104x^2+640x$$
$$\therefore V^\backslash=12x^2-208x+640$$
$$=4\left(3x^2-52x+160\right)$$

وبوضع $V^\backslash=0$

$$\therefore\left(3x^2-52x+160\right)=0$$
$$\therefore(3x-40)(x-4)\quad=0$$
$$\therefore x=4$$

والجواب الآخر مرفوض لأن $x=\dfrac{40}{30}$ لا تقع بداخل الفترة $[0,10]$

∴ هنالك قيمة حرجة وحيدة عندما $x=4$ وهى فى الفترة $[0,10]$

وبإيجاد قيم V عند 4,0,10

$$\therefore V_{(4)}=4(4)^3-104(4)^2+640(4)$$
$$=256-1664+2560$$
$$=1152\quad cm^3$$

$$،V_{(0)}\ =\ 0\ ,\quad V_{(10)}=4(10)^3-104(10)^2+640(10)$$
$$=4000-10400+6400=0$$

∴ أكبر قيمة للحجم عند $(x=4)$ = $1152\ cm^3$

ويمكننا بإيجاد $V^{\backslash\backslash}$ إثبات أن $x\ =\ 4$ تحقق نهاية عظمى ،

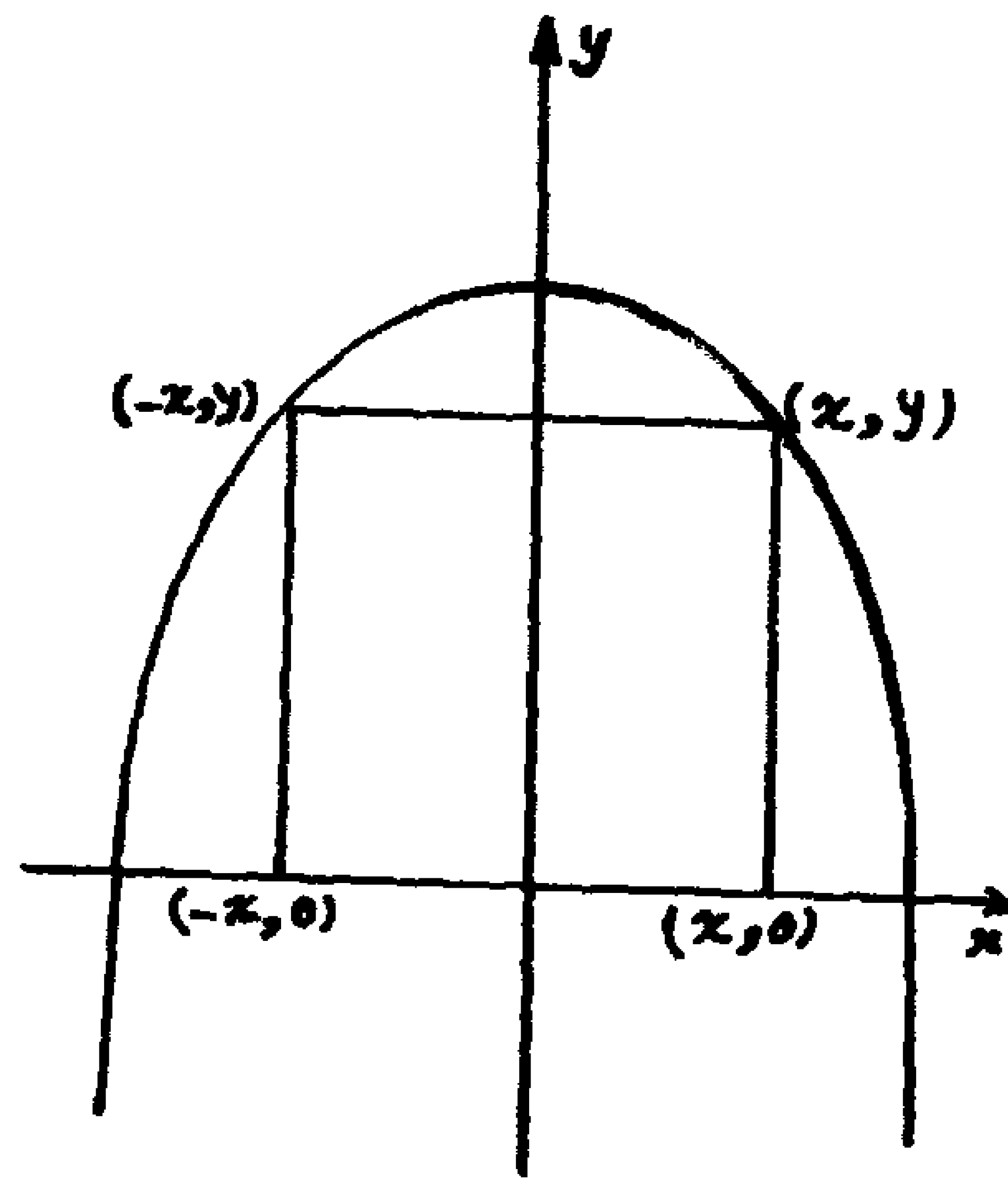
$V'' = 24x - 208$

$= 24 \times 4 - 208 = 96 - 208 = -112 \ (-ve)$

وهى سالبة مما يؤكد وجود نهاية عظمى للحجم عند $x = 4$

(١٨) مستطيل يقع رأسان من رؤسه على المحور الأفقى $x'Ox$ وفى جهتيه بينما يقع الرأسان الآخران على محيط قطع مكافئ معادلته $y = 9 - x^2$ ، أوجد أبعاد أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يحقق الشرط المطلوب (أكبر مساحة) .

الحـــــل :- انظر الرسم شكل (٨ - ١١) .



شكل (٨ - ١١)

واضح أن القطع المكافئ متماثل حول محور الصادات OY كما وأن قيمة y لا تتغير سواء كانت x موجبة أم سالبة

وعليه فإنه إذا كانت إحداثيات أحد الرؤوس الواقعة على المنحنى هى (x, y) فإن إحداثيات الرأس الأخرى هى $(-x, y)$

وعليه فإن إحداثيات الرؤوس الأربعة هى : -

$(-x, 0) \ , \ (x, 0) \ , \ (-x, y) \ , \ (x, y)$

كما هو موضح بالشكل .

ومساحة المستطيل = A فرضاً ، ويجب أن نعبر عنها بدلالة x فقط أو y فقط ثم نحسب قيمة x أو y عندما : -

$$\frac{dA}{dx}=0 \quad or \quad when \quad \frac{dA}{dy}=0$$

$$\because\ A=2x.y=2x\left(9-x^2\right)=2\left(9x-x^3\right) \qquad \text{.........} \ (1)$$

$$\therefore \frac{dA}{dx}=2\left(9-3x^2\right)$$

وعندما $A^{`}=0$

$$\therefore 9-3x^2=0 \qquad \therefore x^2=3 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{3}$$

ثم نوجد $A^{``}$ عند قيمتى x

$$، A^{``}=-12x$$

وسنجد أن $0 > A^{``}$ عند $x = +\sqrt{3}$ ، أى نهاية عظمى .

وبالتعويض فى المعادلة (1) عن قيمة x للحصول على أكبر مساحة : -

$\therefore A=2\left(9\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)=12\sqrt{3}$ وحدة مربعة

وبعداه هما $x=\sqrt{3}$ ، 6

$$as:, y=9-\left(\sqrt{3}\right)^2=6$$

(١٩) حقل مستطيل الشكل يقع على ضفة نهر يراد إحاطته بسور من جميع الجوانب باستثناء الجانب الواقع على النهر . فإذا كانت تكلفة السور 10 جنيهات لكل متر طولى لجانبيه المتعامدين على النهر ، بينما يتكلف المتر الطولى للسور الواقع على الضلع الموازى للنهر من الجهة الأخرى 15 جنيهاً .

فما هى أبعاد قطعة الأرض التى تحقق أكبر مساحة ممكنة وبتكلفة تبلغ 22500 جنيهاً.

الحـــــــل :– لتكن $x\ mt$ هى عرض قطعة الأرض

، لتكن $y\ mt$ هى طول قطعة الأرض الموازية للنهر

، مساحة الحقل بالمتر المربع هى A

(1) .... $\therefore A = x.y(m^2)$

وتكلفة السور لعرض المستطيل = $10x$ جنيهاً

∴ تكلفة السور لكلٍ من عرضى المستطيل = $20\ x$ جنيهاً

وبالمثل تكون تكلفة السور للضلع الثالث للمستطيل (الطول) = $15y$ جنيهاً .

(2) .... $\therefore 20x + 15\ y = 22500$

ويجب هنا أن نعبـر عن A بدلالة متغير واحد سواء x أو y حيث نوجــــد قيمة y بدلالة x من (2) ونعوض بها فى (1)

ومن المعادلة (2) : –

$$15\ y = 22500 - 20x \qquad \therefore y = 1500 - \frac{4}{3}x$$

وبالتعويض بقيمة y هذه فى المعادلة (1)

$$\therefore A = x\left(1500 - \frac{4}{3}x\right)$$

$$= 1500x - \frac{4}{3}x^2$$

ثم نوجد $A`$ ونساويها بالصفر للحصول على القيم الحرجة .

$$\therefore A` = 1500 - \frac{8}{3}x = 0$$

$$\therefore \frac{8}{3}x = 1500 \quad \therefore x = \frac{4500}{8} = 562.5\ mt$$

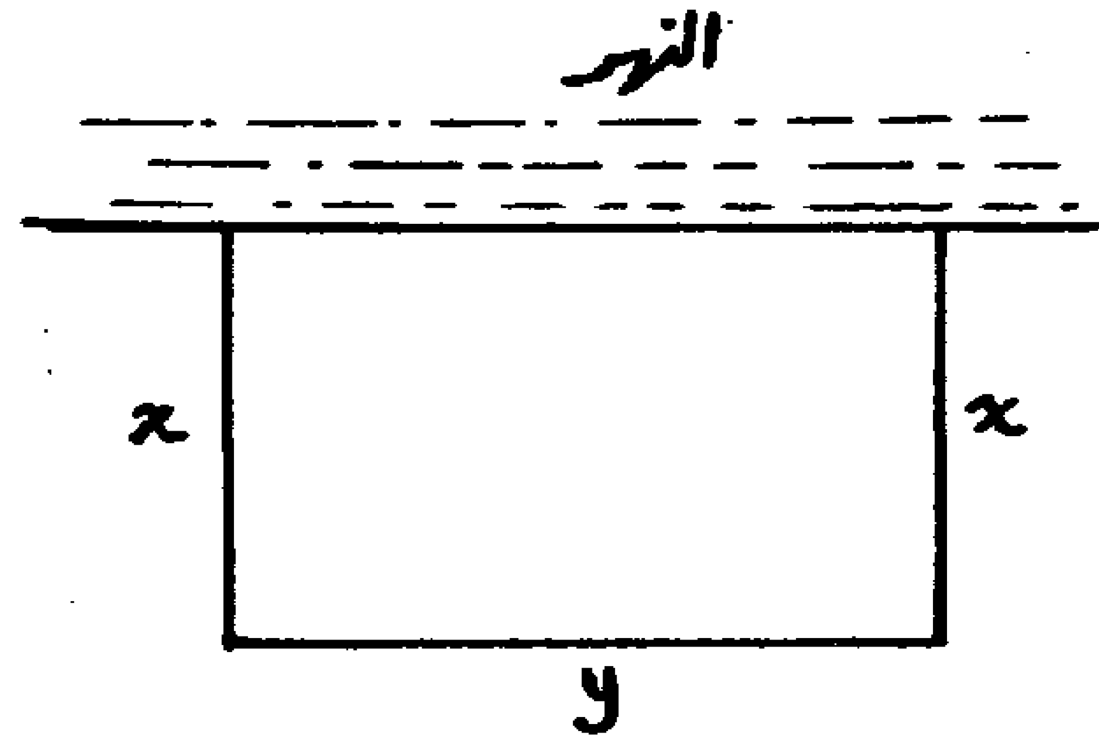
ثم نوجد قيمة y بالتعويض عن قيمة x هذه :

$$y = 1500 - \frac{4}{3} \times 562.5 \quad = 750\ \ mt.$$

وعليه فإن المساحة العظمى التى تحقق الشرط المذكور (تكلفة = 22500) : –

$$A = x.y = 562.5 \times 750 = 421875\ m^2 \cong 4.22\ \ km^2$$

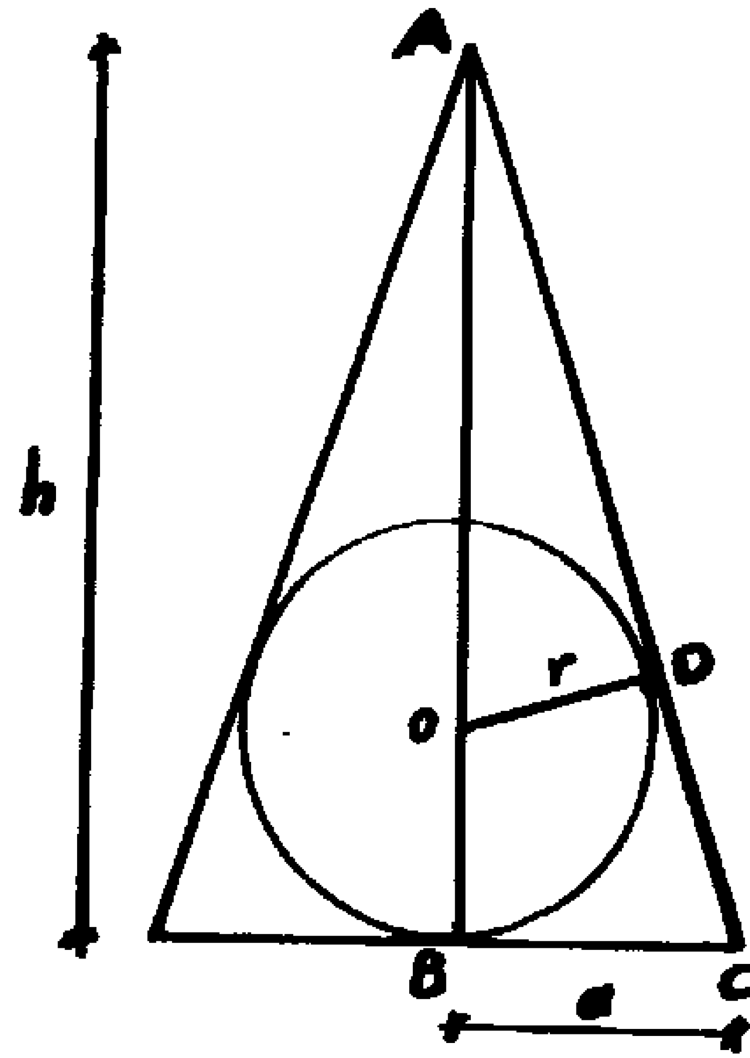
وبطول = $750\ mt$ وعرض = $562.5\ mt$



شكل (٨ - ١٢)

(٢٠) المطلوب حساب أبعاد مخروط دائرى قائم يحتوى بداخله كرة نصف قطرها r بحيث يكون حجمه أقل ما يمكن .

الحـــــل :- انظر الرسم شكل (٨ - ١٣) .



شكل (٨ - ١٣)

حجم المخروط = V

$$,V = \frac{1}{3}\pi\ a^2 h \qquad \text{.......... (1)}$$

وللتعبير عن الحجم بدلالة متغير واحد ، فإنه يلزم إيجاد علاقة بين كل من h, a :

ولدينا :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DO}$$

$$i.e.\frac{\sqrt{h^2+a^2}}{a}=\frac{h-r}{r} \qquad \text{.......... (2)}$$

وبتربيع كل من الطرفين

$$\therefore \frac{h^2+a^2}{a^2}=\frac{h^2-2hr+r^2}{r^2}$$

$$\therefore r^2\left(h^2+a^2\right)=a^2\left(h^2-2hr+r^2\right) \qquad \text{.......... (3)}$$

$$\therefore a^2=\frac{r^2h}{h-2r} \qquad \text{.......... (4)}$$

وبالتعويض عن قيمة $\left(a^2\right)$ فى المعادلة (1)

$$\therefore V=\frac{1}{3}\frac{\pi\ h^2r^2}{(h-2r)} \qquad \text{.......... (5)}$$

ولإيجاد أبعاد المخروط يلزم إيجاد $V^`$ بالنسبة إلى h

$$\therefore V^` =\frac{dv}{dh}=\frac{\pi\ r^2h}{3}\left[\frac{h-4r}{(h-2r)^2}\right] \qquad \text{.......... (6)}$$

وبوضع $V^`=0$ ، نحصل على :

$h=0 \quad , \quad h=4r$

وكل من الدالـــة (V) وتفاضلها $V^`$ تكون لا نهائية عندما $h=2r$ [انظر المعادلتين 5،6]

ولذلك فإنه لا يمكننا أخذ القيمة $h=2r$ ، كما لا يمكننا اعتبار القيمة $h=0$ لأنها غير ذات معنى . والقيمة الحرجة الوحيدة المقبولة هى $h=4r$

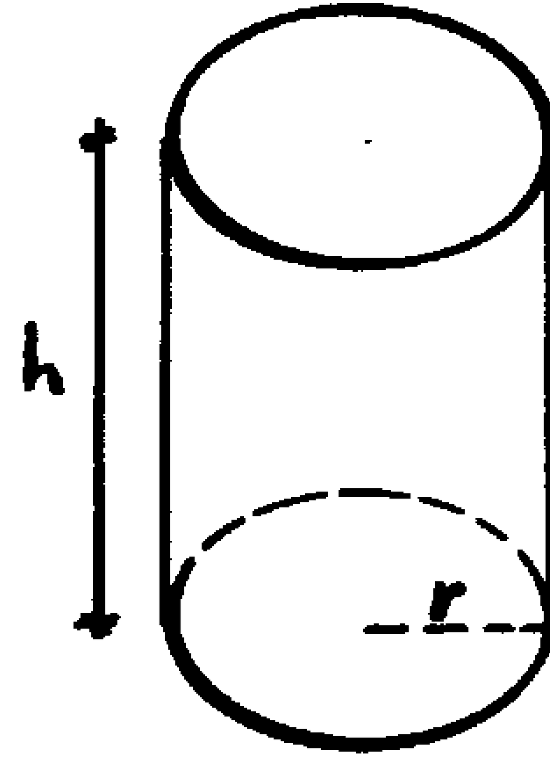
فإذا ما عوضنا بها فى $\frac{dV}{dh}$ سنجد أنها سالبة عندما $h<4r$ وموجبة عندما $h>4r$

وعليه فإن $h=4r$ تجعل الحجم أصغر ما يمكن ،

وعليه تكون أبعاد المخروط هى $h=4a\ ,\ a=r\sqrt{2}$

(٢١) احسب أبعاد علبة اسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى وذات حجم محدد بحيث يتم صنعها بأقل كمية معدن .

الحـــل :- انظر الرسم شكل (٨ - ١٤) .



شكل (٨ - ١٤)

يجب أن نلاحظ فى هذه المسألة أن الحجم ثابت بينما مساحة السطح أقل ما يمكن .

ولنعتبر الحجم $= V$

، مساحة السطح $= A$

، نصف قطر القاعدة $= r$

، الارتفاع $= h$

$$\therefore A = \pi r^2 + 2\pi rh \qquad \text{.......... (1)}$$

فى حين أن كلاً من r , h تربطهما العلاقة :

$$V = \pi r^2 h = \text{constant} \qquad \text{.......... (2)}$$

ومن الأسهل هنا أن نختزل h : -

$$\therefore h = \frac{V}{\pi r^2} \qquad \text{.......... (3)}$$

وبالتعويض فى المعادلة (1) عن قيمة h من (3)

$$\therefore A = \pi r^2 + \frac{2V}{r} \qquad \text{.......... (4)}$$

ولما كان المطلوب أن تكون A نهاية صغرى ، لذلك نوجد $\frac{dA}{dr}$ ونساويها بالصفر

ونحل المعادلة لإيجاد قيم r الحرجة .

$$\therefore \frac{dA}{dr} = 2\pi r - \frac{2V}{r^2}$$

وبالتعويض عن قيمة V من (2) : -

$$\therefore \frac{dA}{dr} = 2\pi r - \frac{2}{r^2} \times \pi r^2 h$$

$$= 2\pi r - 2\pi h = 2\pi (r - h)$$

وبوضع $\frac{dA}{dr}=0$ $\therefore (r-h)=0 \qquad \therefore r=h$

وهى القيمة الحرجة لـ r .

ولمعرفة ما إذا كانت قيمة r هذه تحقق نهاية صغرى للمساحة أم لا ، نستخدم طريقة المشتقة الأولى $\frac{dA}{dr}$ ونوجد قيمتها عندما $r<h$ وعندما $r>h$.

وسوف نجد أنه عندما $r<h$ فإن $\frac{dA}{dr}$ تكون سالبة بينما عندما $r>h$ فإن $\frac{dA}{dr}$ تكون موجبة .

وعليه فإن $\frac{dA}{dr}$ تُغير إشارتها من سالب إلى موجب .

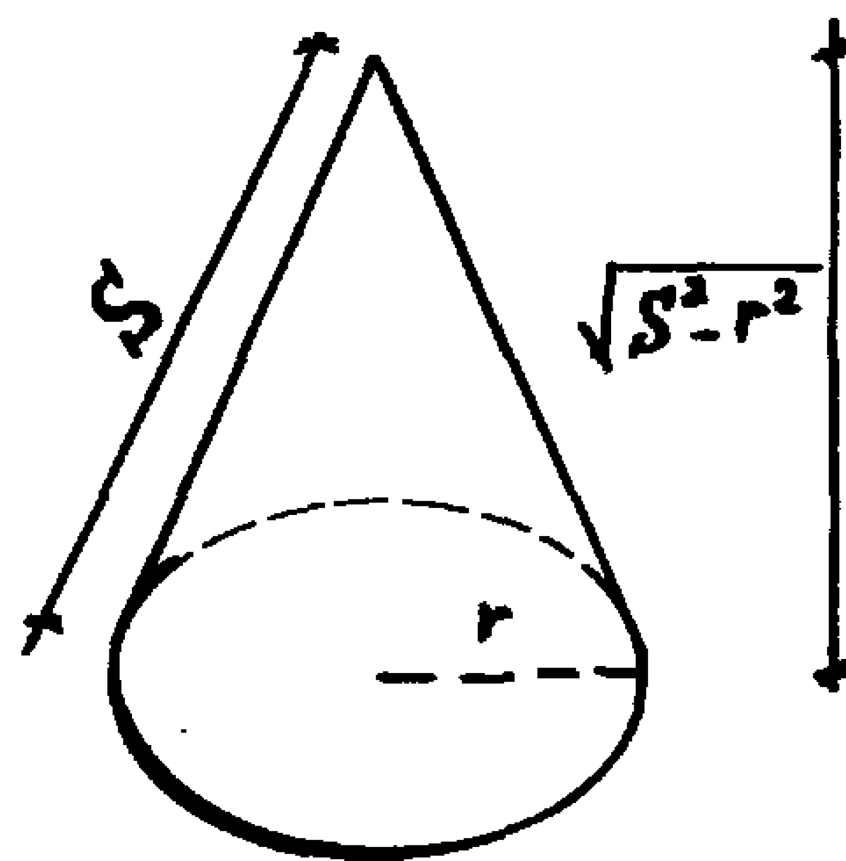
$\therefore r=h$ تحقق النهاية الصغرى

$\therefore$ تكون مساحة السطح أصغر ما يمكن عند ثبوت الحجم عندما يكون ارتفاع الاسطوانة مساوياً لنصف قطرها .

(٢٢) احسب نصف قطر فتحة وعاء مخروطى مفتوح من جهة القاعدة معلوم طول راسمه بحيث يكون ذو أكبر حجم ممكن .

الحـــــل :– انظر الرسم شكل (٨ – ١٥) .

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ × القاعدة × الارتفاع .



شكل (٨ – ١٥)

$$\therefore V=\frac{1}{3}\pi\ r^2\sqrt{S^2-r^2}$$

وفى هذه المسألة مطلوب أن تكون V ذات أكبر حجم ممكن .

ويلزم إيجاد $\frac{dV}{dr}$ ثم نساويها بالصفر ونوجد قيم r الحرجة .

$$\therefore \frac{dV}{dr}=\left[\frac{\pi\ r^2}{3}.\frac{1}{2}\left(s^2-r^2\right)^{\frac{-1}{2}}.(-2r)\right]+\left[\left(S^2-r^2\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{2\pi\ r}{3}\right]$$

$$\therefore \frac{dV}{dr}=-\frac{\pi\ r^3}{3\left(S^2-r^2\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{2\pi\ r}{3}\left(S^2-r^2\right)^{\frac{1}{2}}=0$$

$$\therefore \frac{2\pi r\left(S^2-r^2\right)-\pi\ r^3}{3\left(s^2-r^2\right)^{\frac{1}{2}}}=0$$

$$\therefore 2\pi\ r\left(s^2-r^2\right)-\pi\ r^3=0$$

$$\therefore 2\pi\ rs^2-3\pi\ r^3=0$$

$$\therefore 2\pi\ s^2=3\pi\ r^2$$

$$\therefore r=\pm s\sqrt{\frac{2}{3}}$$

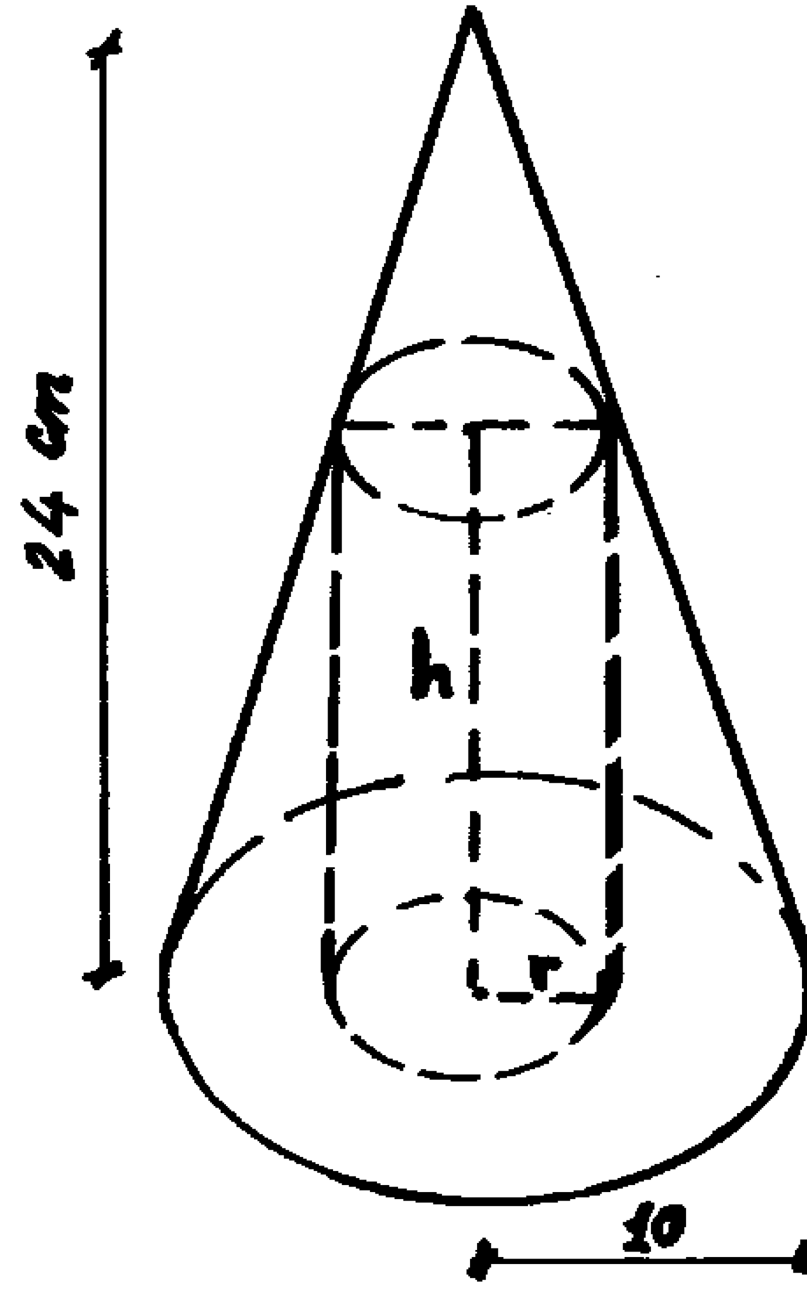
وبالطبع فإن القيمة السالبة مرفوضة .

وعليه فإن $r=S\sqrt{\frac{2}{3}}$ تحقق أكبر حجم .

(٢٣) أوجد أبعاد أكبر إسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها بداخل مخروط دائرى قائم نصف قطر قاعدته = 10 cm وإرتفاعه 24 cm

الحـــــل :-

انظر الرسم شكل (٨ - ١٦) .



شكل (٨ - ١٦)

لنعتبر : نصف قطر قاعدة الإسطوانة = $r \ cm$

، ارتفاع الاسطوانة = $h \ cm$

، حجم الاسطوانة = $V \ cm^3$

ويوضح الشكل (a) الاسطوانة بداخل المخروط بينما يوضح الشكل (b) مقطع طولى فى اتجاه محور المخروط والاسطوانة .

ويمكن تمثيل العلاقة بين كل من الحجم V ، r ، h كالتالى

$$V = \pi \ r^2 h \quad \text{.......... (1)}$$

ويجب البحث عن معادلة أخرى تجمع بين كل من r , h حتى يُصبح لدينا معادلتين فى كل من r , h حتى يمكننا أن نستعيض عن أحدهما بدلالة الآخر وبذلك نحصل على معادلة بين V , r فقط أو V , h فقط .

ومن الشكل (b) نجد أن : -

$$\frac{24-h}{r} = \frac{24}{10}$$

$$\therefore 240 - 10h = 24r$$

$$\therefore h = \frac{240-24r}{10} \quad \text{.......... (2)}$$

وبالتعويض فى المعادلة (1) عن قيمة h من (2)

$$\therefore V=\frac{\pi\ r^2(240-24r)}{10}=\frac{\pi}{10}\left(240r^2-24r^3\right) \qquad \text{..........}\ (3)$$

$$\text{،}\quad \frac{dV}{dr}=V^{`}=\frac{\pi}{10}\left(480r-72r^2\right)=0$$

$$\therefore 24r(20-3r)=0$$

$$\therefore r=0 \quad , \quad r=\frac{20}{3}$$

ثم نوجد قيم الدالة V عند القيم الحرجة لـ r وعند طرفى الفترة $[0, 10]$

$$\text{،}\ V_{(0)}\ =0$$

$$,\ V_{\left(\frac{20}{3}\right)}\cong 1185\,\pi\ \ cm^3$$

$$\text{،}\ V_{(10)}\ =0$$

وعليه فإن أقصى قيمة للحجم تكون عندما $r=\frac{20}{3}$

وتكون h مساوية لـ :

$$h=\frac{240-24\times\frac{20}{3}}{10}=\frac{240-160}{10}=8\ \ cm.$$

وعليه فإن حجم أكبر إسطوانة يمكن وضعها داخل المخروط المُعطى هو :

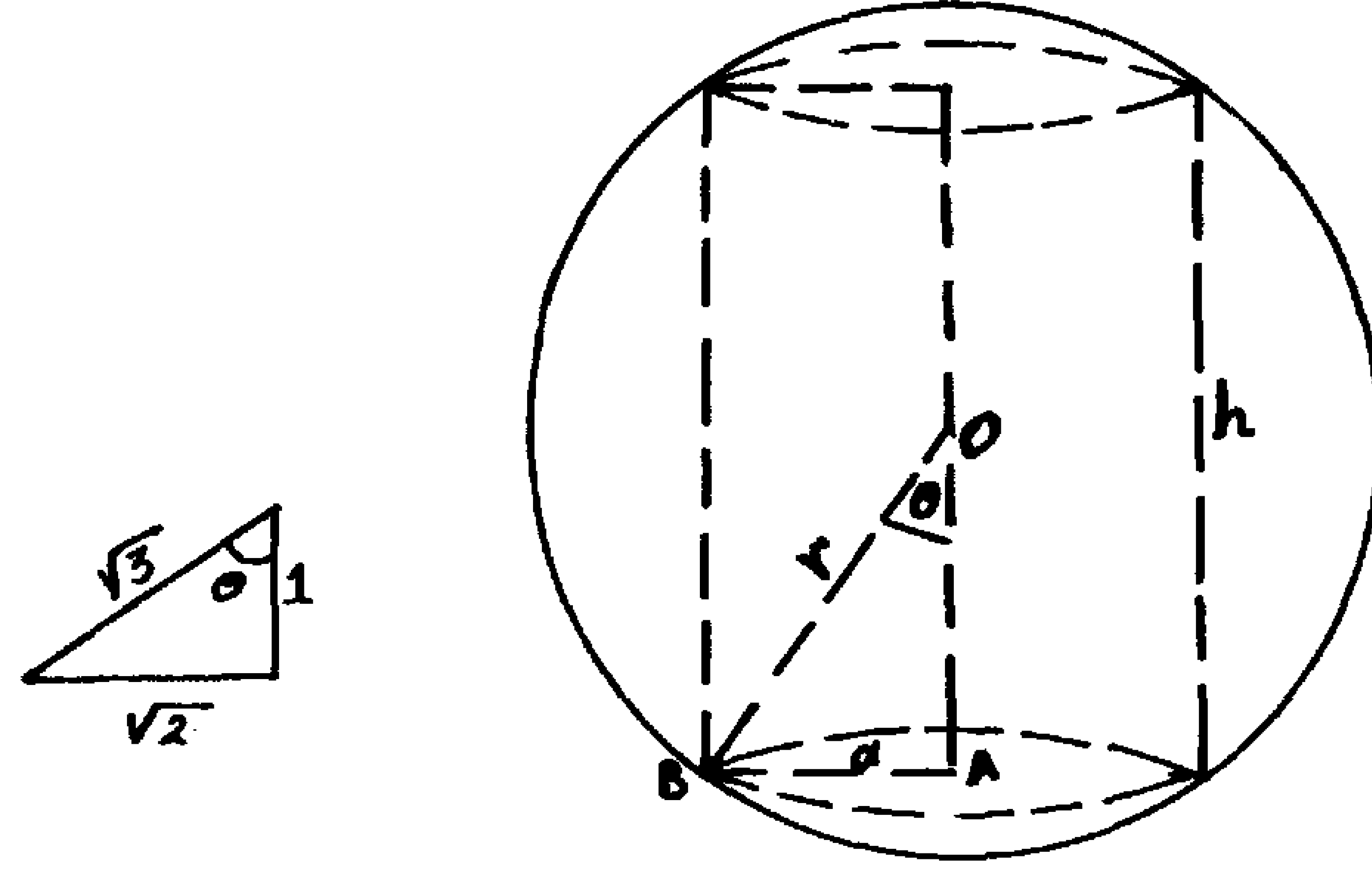
$1185\ \ cm^3$.

وهى تتحقق بنصف قطر قاعدة = $\frac{20}{3}$ وارتفاع = $8\ \ cm$

(٢٤) ما هو أكبر حجم لاسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة نصف قطرها = r .

الحـــــــل :-

انظر الرسم شكل (٨ - ١٧) .



شكل (٨ – ١٧)

لتكن زاوية θ هى الزاوية BOA عند مركز الكرة بين نصف القطر BO ونصف الإرتفاع OA .

ومن المثلث القائم الزاوية OAB :

$$a = r \sin\theta \quad , \quad h = 2r\cos\theta$$

$$V = \pi\ a^2 h = \pi\ .\ r^2 \sin^2\theta\ .\ 2r\cos\theta$$ ،

$$= 2\pi r^3 \sin^2\theta\ \cos\theta$$

وحيث أن :
$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\therefore V = 2\pi r^3 \cos\theta \left(1 - \cos^2\theta\right)$$

$$= 2\pi r^3 \left(\cos\theta - \cos^3\theta\right)$$

ثم نوجد $\frac{dV}{d\theta}$ ونساويها بالصفر ونحل المعادلة لإيجاد قيم θ الحرجة

$$\therefore \frac{dV}{d\theta} = -2\pi r^3 \sin\theta \left(1 - 3\cos^2\theta\right)$$

فإذا ما وضعنا هذا المقدار = صفر فإنه إما :-

$$\sin\theta = 0 \qquad or \qquad \left(1 - 3\cos^2\theta\right) = 0$$

، $\sin\theta = 0$ عندما : $\theta = 0\ ,\ \pi$ والحالتين مرفوضتين لأن ذلك غير منطقى

إما إذا كانت :-

$1-3\cos^2\theta = 0 \qquad \therefore \cos^2\theta = \frac{1}{3}$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$

وهى الزاوية التى تعطى أكبر حجم .

ومن الشكل (b) نجد أن :

$\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$

ثم نوجد قيم a , h كما يلى :

$a = r\sin\theta = \frac{r}{3}\sqrt{6}$

$h = 2r\cos\theta = 2r\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2r}{3}\sqrt{3}$

وبالتعويض مرة ثانية فى معادلة الحجم V

$V = \pi a^2 h = \frac{\pi r^2}{9}(6) \cdot \frac{2}{3}r\sqrt{3} = \pi r^3\frac{4}{9}\sqrt{3}$

(٢٥) إذا كان مجموع حجمى كرة ومكعب ، ثابت ، فبين أن مجموع مساحة سطحيهما تكون أكبر ما يمكن عندما يكون قطر الكرة مساوياً لطول ضلع المكعب

الحـــل :-

حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi r^3$

حجم المكعب = S^3

مساحة سطح الكرة = $4\pi r^2$

مساحة سطح المكعب = $6S^2$

والحجم الكلى = ثابت = $\frac{4}{3}\pi r^3 + S^3 = k$

والمطلوب هو أن يكون الحجم الكلى ، نهاية عظمى .

إلا أن معادلة الحجم الكلى ، تحتوى على متغيرين وهما s , r .

والمطلوب هو معادلة فى متغير واحد .

$$\because \frac{4}{3}\pi\ r^3 + S^3 = k$$ ،

$$\therefore \frac{4}{3}\pi\ r^3 = k - S^3$$ .... (1)

$$\therefore r^3 = \frac{3\left(k-S^3\right)}{4\pi}$$

$$\therefore r = \left[\frac{3\left(k-S^3\right)}{4\pi}\right]^{\frac{1}{3}}$$

، مساحة السطح الكلى :-

$$y = 4\pi\ r^2 + 6S^2$$

وبالتعويض فى هذه المعادلة عن قيمة r :-

$$\therefore y = 4\pi\left[\frac{3\left(k-S^3\right)}{4\pi}\right]^{\frac{2}{3}} + 6S^2$$

$$= (4\pi)^{\frac{1}{3}} \cdot (3)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(k-S^3\right)^{\frac{2}{3}} + 6S^2$$

ولجعل y نهاية عظمى ، نوجد $\frac{dy}{ds}$ ونساويها بالصفر ثم نوجد قيم S الحرجة :-

$$\frac{dy}{ds} = (4\pi)^{\frac{1}{3}} \cdot (3)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{3}\left(k-S^3\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(-3S^2\right) + 12S$$

$$= \frac{(3)^{\frac{2}{3}} \times (4\pi)^{\frac{1}{3}} \times \left(-6S^2\right)}{3\left(k-S^3\right)^{\frac{1}{3}}} + 12S$$

وبمساواة $\frac{dy}{ds}$ بالصفر :-

$$\therefore \frac{(3)^{\frac{2}{3}} \times (4\pi)^{\frac{1}{3}}\left(-6S^2\right) + 12S\left[3\left(k-S^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]}{3\left(k-S^3\right)^{\frac{1}{3}}} = 0$$

$$\therefore (3)^{\frac{2}{3}} \times (4\pi)^{\frac{1}{3}} \times \left(-6S^2\right) = 36\ S\left(k - S^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

وبتكعيب كل من الطرفين : -

$$\therefore 3^2 \times (4\pi) \times (-6)^3 S^6 = (-36)^3 (S)^3 \left(k - S^3\right)$$

$$\therefore 36\pi\ (-216) S^6 = -46656 S^3 \left(k - S^3\right)$$

$$\therefore -7776\pi\ S^6 = -46656 S^3 \left(k - S^3\right)$$

$$\therefore k - S^3 = \frac{\pi\ S^6}{6S^3} = \frac{\pi}{6} S^3 \qquad \text{.......... (2)}$$

وهنا لن نقوم بحل المعادلة فى S ولكن نُعوض من (1) فى المعادلة (2)

$$\therefore \frac{\pi}{6} S^3 = \frac{4}{3}\pi\ r^3$$

$$\therefore S^3 = 8r^3$$

$$\therefore S = 2r$$

وعليه فإن مساحة السطح الكلية تكون أكبر ما يمكن عندما يكون القطر $(2r)$ للكرة مساوياً لطول ضلع المكعب S .

(٢٦) يراد عمل خزان سعة ٤م٣ ، بقاعدة مربعة وبأجناب رأسية متعامدة على القاعدة ، فما هو أنسب شكل اقتصادى (أقل مساحة) ، لتحقيق ذلك .

الحـــل :- لتكن : -

طول أحد ضلعى القاعدة $= x$

ارتفاع الصندوق $= h$

حجم الصندوق (الخزان) $= V$

المساحة الكلية للخزان $= A$

$$, V = hx^2 = 4\ m^3$$

$$\therefore h = \frac{4}{x^2}\ m$$

مساحة القاعدة $= x^2$,

مساحة كل وجه من أوجه الخزان $= hx$

$$, \quad A = x^2 + 4hx = x^2 + \frac{16}{x}$$

والمطلوب هو أن تكون A' نهاية صغرى "لأقل تكلفة" ، نوجد A' ونساويها بالصفر لإيجاد قيم x الحرجة : -

$$A' = 2x - \frac{16}{x^2} = 0$$

$$\therefore \quad 2x = \frac{16}{x^2} \qquad \therefore x^3 = 8 \qquad \therefore x = 2$$

وعندما $x < 2$ نجد أن $A' < 0$ وعندما $x > 2$ نجد أن $A' > 0$ وعليه فإن $x = 2$ تحقق الشرط المطلوب

والمساحة =

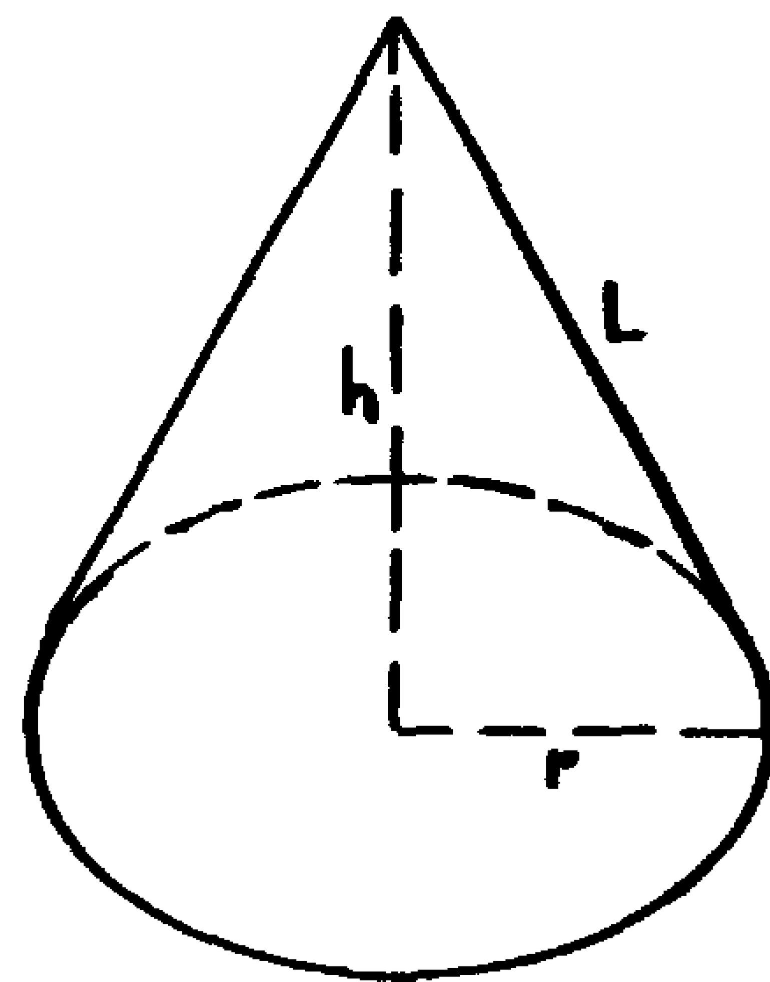
$$A = x^2 + 4hx = x^2 + \frac{16}{x} = 4 + \frac{16}{2} = 12 \quad m^2$$

وعليه فإن الأبعاد المناسبة هى :

$$x = 2 \ m \ , \ h = 1 \ m$$

(٢٧) يراد تصنيع وعاء مخروط الشكل بأقل تكلفة خامات ممكنة ، بحيث يسع حجماً يعادل 150 لتراً ، فما هى أبعاد هذا المخروط الدائرى القائم التى تحقق هذا الشرط .

الحـــــل :- انظر الرسم شكل (٨ – ١٨) .



شكل (٨ – ١٨)

نفترض أن نصف قطر قاعدة المخروط الدائرية $= r$ ، إرتفـاعــه $= h$

، طول الحرف الجانبى (الراسم) $= L$

، حجم المخروط $= V$

، المساحة الجانبية للمخروط $= A$

$$\therefore A = \pi \; rL$$

$$, \; V = \frac{1}{3}\pi \, r^2 h \; = 150$$

ومن هندسة الشكل :

$$\therefore h^2 + r^2 = L^2$$

وباعتبار r هو المتغير المستقل فى العلاقات السابقة : -

$$\therefore A' = \pi \; rL' + \pi \; L \qquad \text{.......... (1)}$$

$$, V' = \frac{1}{3}\pi \; r^2 h' + \frac{2}{3}\pi \; rh = 0 \qquad \text{.......... (2)}$$

$$, 2hh' + 2r = 2LL' \qquad \text{.......... (3)}$$

والمطلوب فى المعادلة (1) أن نجعل A أقل ما يمكن ومن المعادلة (3) : -

$$\therefore L' = \frac{r + hh'}{L} \qquad \text{.......... (4)}$$

ومن المعادلة الثانية (2)

$$\therefore h' = \frac{-2h}{r} \qquad \text{.......... (5)}$$

وبالتعويض من (5) فى (4)

$$\therefore L' = \frac{r + h\left(\frac{-2h}{r}\right)}{r}$$

$$\therefore L' = \frac{r^2 - 2h^2}{rL}$$

$$\therefore A' = \pi \; r\left(\frac{r^2 - 2h^2}{rL}\right) + \pi \; L = 0$$

$$\therefore \frac{r^2 - 2h^2}{L} + L = 0$$

$$\therefore r^2 - 2h^2 + L^2 = 0$$

، $\because L^2 = r^2 + h^2 \quad \therefore h = \pm r\sqrt{2}$

وسوف نعتبر قيمة h الموجبة فقط ،

$$, \ V = \frac{1}{3}\pi\ r^2 h = \frac{1}{3}\pi\ r^2 \times r\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}\ \pi\ r^3}{3} = 150$$

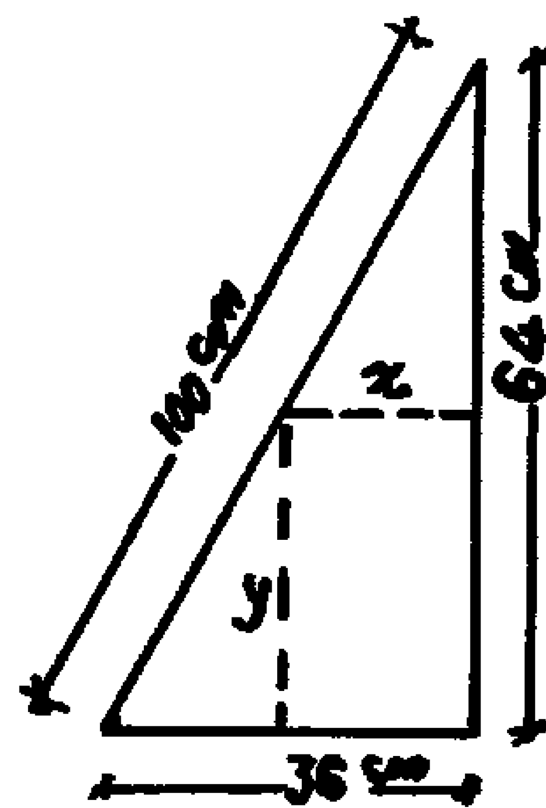
$$\therefore r^3 = \left(\frac{450}{\sqrt{2}\pi}\right) \quad \therefore r = \left(\frac{450}{2^{\frac{1}{2}}.\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$، \ h = \sqrt{2} r = \sqrt{2}\left(\frac{450}{2^{\frac{1}{2}}.\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{450}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{900}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$، \ L = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{450}{\sqrt{2}\pi}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{900}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

(٢٨) قطعة أرض على شكل مثلث قائم الزاوية أبعاده $36,64,100\ mt$ كما بشكل (٨-١٩) ويراد حساب أكبر مستطيل يمكن صنعه بداخل هذه الأرض ، بحيث يكون أحد رؤوس المستطيل على الوتر .

الحـــــل :-



شكل (٨ -١٩)

لتكن أبعاد المستطيل هى x , y كما بالشكل ومساحته A، $A = xy$ ، وللتعبير عـن A بدلالة متغير واحد فقط (أياً من x أو y) ، يجب أن نبحث عن علاقـة أخـرى تجمـع بين كل من y و x ومنها يمكننا إيجاد قيمة متغير بدلالة الآخر

ومن هندسة الشكل (التشابه) ، نجد أن :-

$$\frac{x}{36} = \frac{64-y}{64}$$

$$\therefore 16(x) = 9(64-y) = 576 - 9y$$

$$\therefore 9y = 576 - 16x$$

$$\therefore y = \frac{576-16x}{9}$$

$$\therefore A = xy = \frac{1}{9}\left(576x - 16x^2\right) = \frac{16}{9}\left(36x - x^2\right)$$

$$,0 \le x \le 36$$

$$،\frac{dA}{dx} = A' = 64 - \frac{32}{9}x = 0$$

$$\therefore \frac{32}{9}x = 64$$

$$\therefore x = \frac{9 \times 64}{32} = 18$$

وهى تحقق أكبر مساحة وذلك لأنه باستخدام طريقة المشتقة الثانية : -

أى سالبة $A'' = \frac{-32}{9} < 0 \ -ve$

$$،\because x = 18$$

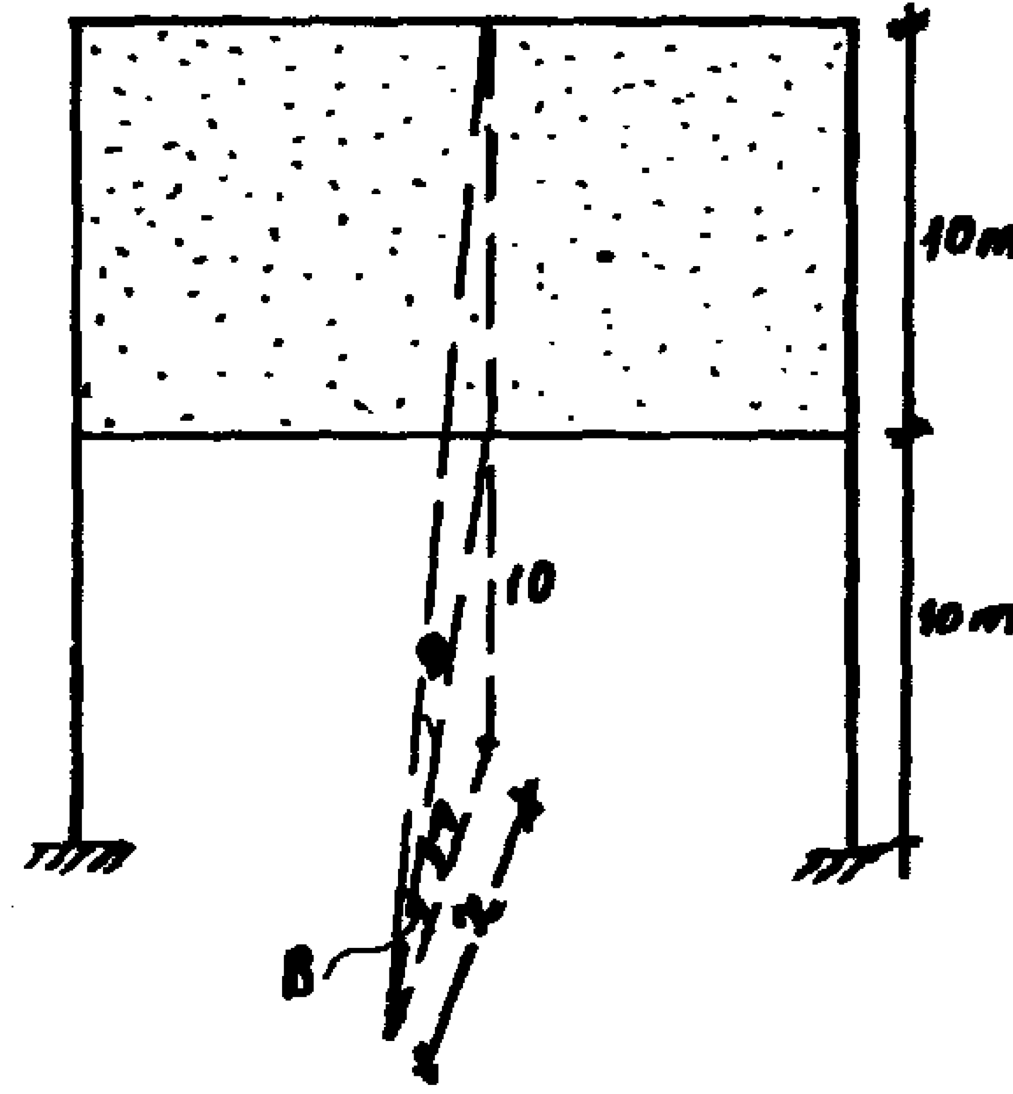
$$\therefore y = \frac{576-16(18)}{9} = \frac{576-288}{9} = \frac{288}{9} = 32\ m.$$

والمساحة A =

$$A = x.y = 18 \times 32 = 576 \quad m^2$$

(٢٩) لوحة إعلانات ودعاية ارتفاعها m 10 وترتفع قاعدتها السفلية عـن الأرض بمقدار m 10 كذلك ، والمطلوب تحديد نقطة على الخط الأفقى فى مقابلـة اللوحـة (على الأرض) بحيث تكون عندها زاوية الرؤية أكبر ما يمكن

الحـــــل :- انظر الرسم شكل (٨ - ٢٠) .



شكل (٨ - ٢٠)

لتكن θ هى الزاوية المطلوبة (زاوية الرؤية) .

$$\therefore \tan B = \frac{10+10}{x} = \frac{20}{x}$$

$$, \tan A = \frac{10}{x} \qquad , \tan\theta = \tan(B-A)$$

$$\because \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}$$

$$\therefore \tan\theta = \tan(B-A) = \frac{\tan B - \tan A}{1+\tan B \tan A}$$

$$= \frac{\frac{20}{x}-\frac{10}{x}}{1+\frac{20}{x}\times\frac{10}{x}} = \frac{\frac{10}{x}}{1+\frac{200}{x^2}} = \frac{\frac{10}{x}}{\left(\frac{x^2+200}{x^2}\right)}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{10x}{\left(x^2+200\right)}$$

$$\frac{d}{dx}\tan\theta = \frac{d}{dx}\frac{10x}{\left(x^2+200\right)}$$

$$\because \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{V}\right)=\frac{V\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\frac{10x}{\left(x^2+200\right)}=\frac{\left(x^2+200\right)\times 10-10x\times 2x}{\left(x^2+200\right)^2}$$

$$=\frac{2000-10x^2}{\left(x^2+200\right)^2}$$

وبوضع $\frac{d}{dx}\tan\theta$ تساوى الصفر

$$\therefore \frac{2000-10x^2}{\left(x^2+200\right)^2}=0$$

$\therefore 2000-10x^2=0 \qquad \therefore x^2=200$

$\therefore x=\pm 10\sqrt{2}$

والإجابه السالبة مرفوضة

$\therefore x=10\sqrt{2}=14.14 \quad mt.$

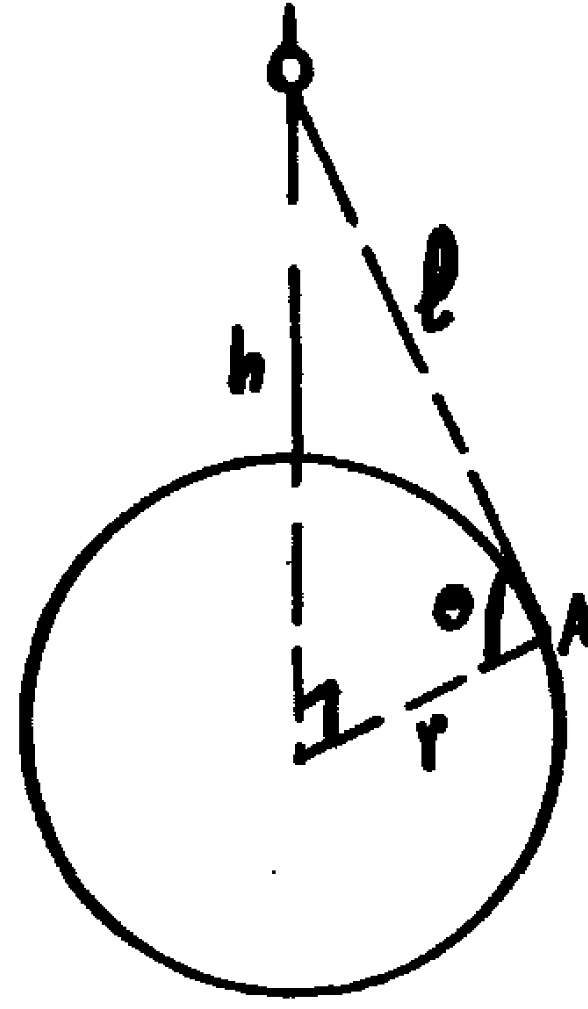
وهى المسافة الواجب أن يقف المشاهد عندها بحيث تكون زاوية الرؤية أكبر ما يمكن .

(٣٠) يُعلق مصباح كهربائى فوق مركز منضدة دائرية ، فعلى أى ارتفاع يجب تثبيت هذا المصباح بحيث نحصل على أسطع إضاءة عند حواف المنضدة .

علماً بأن قوة الإضاءة (I) عند المصباح تتناسب مع جيب الزاوية التى يصنعها الشعاع الضوئى مع حافة المنضدة مقسوماً على مربع المسافة من مركز الضوء للحا

(اعتبر مصدر الضوء ، نقطة وليس جسماً) .

الحـــــل :– انظر الرسم شكل (٨ – ٢١) .



شكل (٨ - ٢١)

من المعطيات فى المسألة : -

قوة الإضاءة عند $A = k\dfrac{\sin\theta}{L^2} = I \propto \dfrac{\sin\theta}{L^2}$

$$,L \quad = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$,\sin\theta \; = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$

$$\therefore I = k . \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} \cdot \frac{1}{\left(h^2 + r^2\right)} = k \frac{h}{\left(h^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

وللحصول على أقصى إضاءة I نوجد $\dfrac{dI}{dh}$ ونساويها بالصفر للحصول على قيم h الحرجة .

$$\therefore \frac{dI}{dh} = k\left[\frac{\left(h^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}} \times 1 - h \times \frac{3}{2} \times \left(h^2 + r^2\right)^{\frac{1}{2}} \times 2h}{\left(h^2 + r^2\right)^3}\right]$$

$$= k\left[\frac{\left(h^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3h^2\left(h^2 + r^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(h^2 + r^2\right)^3}\right]$$

$$= \frac{k(h^2+r^2)^{\frac{1}{2}}\left[(h^2+r^2)-3h^2\right]}{(h^2+r^2)^3} = k\frac{(r^2-2h^2)}{(h^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}$$

وبوضع $\frac{dI}{dh}=0$ ، فإن المقام لا يساوى أبداً الصفر

وبوضع البسط = الصفر

$$\therefore r^2-2h^2=0$$

$$\therefore h^2=\frac{r^2}{2} \qquad \therefore h=\frac{r}{\sqrt{2}}=\frac{r\sqrt{2}}{2}$$

وللتأكد من أن قيمة h هذه تعطى أقصى إضاءة ، نستخدم طريقة المشتقة الثانية : -

$$\therefore \frac{d^2I}{dh^2}=k\left[\frac{(h^2+r^2)^{\frac{5}{2}}\times(-4h)-(r^2-2h^2)^{\frac{5}{2}}(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}(2h)}{\left[(h^2+r^2)^{\frac{5}{2}}\right]^2}\right]$$

وبأخذ $k(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}$ والاختصار :

$$\therefore \frac{d^2I}{dh^2}=\frac{k(6h^3-9hr^2)}{(h^2+r^2)^{\frac{7}{2}}}$$

وبالتعويض عن $h=\frac{r\sqrt{2}}{2}$ فى $\frac{d^2I}{dh^2}$ نحصل على قيمة سالبة .

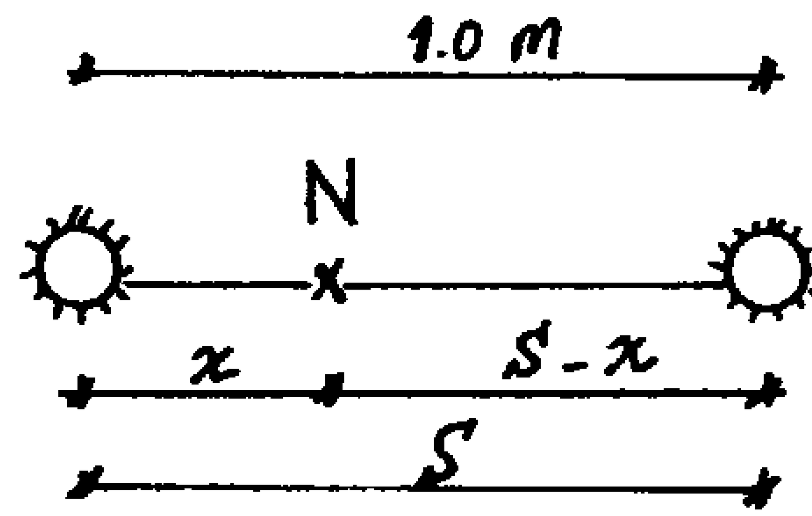
وعليه فإن الارتفاع المناسب للحصول على أقوى إضاءة عند حافة المنضدة عندما تكون

$$h=\frac{r\sqrt{2}}{2}$$

(٣١) مصباحان صغيران شدتهما a,b يبعدان عن بعضهما بمقدار 1 متر فإذا كانت شدة الإضاءة عند أى نقطة والناتجة من مصدر ضوئى تتناسب مباشرة مع شدة المصدر وعكسياً مع مربع المسافة من المصدر .

فاوجد مكان النقطة ذات الأقل إضاءة على الخط الواصل بين مصدرى الضوء .

الحـــــــل :– انظر الرسم شكل (٨ – ٢٢) .



شكل (٨ – ٢٢)

للتبسيط سنعتبر المصباحان فى صورة نقطة ضوئية ولتكــــــن A هى مصدر الضوء ذو الشدة a ، B هى المصدر ذو الشدة b ، N نقطة على AB ، x بعد الـنقطــــة N عن A ، $(S-x)$ بعد النقطة N عن B حيث S بُعد النقطتان A, B

ومن تعريف شدة الإضاءة عند نقطة ، فإن شدة الإضاءة عند نقطة A تساوى $\frac{ka}{x^2}$

وعند B تساوى $\frac{kb}{(S-x)^2}$ حيث k ثابت التناسب

فإذا اعتبرنا أن I هى شدة الإضاءة عند N

$$\therefore I = \frac{ka}{x^2} + \frac{kb}{(S-x)^2} \qquad \text{..........} \quad (1)$$

ومن الواضح أن قيمة I عند أى نقطة تزيد كلما اقتربنا من المصدر الضوئى وتقل كلما بعدنا عنه .

وعليه فإنه عندما تكون N قريبة من أيٍ من المصدرين ، فإنها فى ذات الوقت ستكون بعيدة عن المصدر الآخر وعندما تكون (N) قريبة من A فإن أحد الكسرين سيكون صغيراً (لكبر المقام) فى المعادلة (1) بينما الكسر الآخر يكون كبيراً وحيث أن I تتناقص بالبعد عن أيٍ من المصدرين ، لذلك فإننا نتوقع أن يكون هنالك نقطة ذات أقل إضاءة على الخط AB ولإيجاد النهاية الصغرى للإضاءة (مكانها) فإنه يلزم إيجاد $\frac{dI}{dx}$ ثم نساويها بالصفر ونحل للحصول على قيم x الحرجة .

$$\therefore \frac{dI}{dx} = k\left(\frac{-2a}{x^3} + \frac{2b}{(S-x)^3}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{b}{(S-x)^3} = \frac{a}{x^3}$$

$$\therefore bx^3 = a\,(S-x)^3$$

$$\therefore \sqrt[3]{b}\,(x) = \sqrt[3]{a}\,(S-x)$$

$$\therefore \sqrt[3]{b}\,(x) + \sqrt[3]{a}\,(x) = \sqrt[3]{a}\,(S)$$

$$\therefore x\left(\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a}\right) = \sqrt[3]{a}\,(S)$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt[3]{a}\ S}{\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a}}$$

$$،\ S - x = S - \frac{\sqrt[3]{a}\ S}{\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a}} = \frac{S\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$$

والآن يمكننا إيجاد النسبة بين $(S-x)$, (x)

$$\therefore \frac{S\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} : \frac{S\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$$

$$= S\sqrt[3]{a} : S\sqrt[3]{b}$$

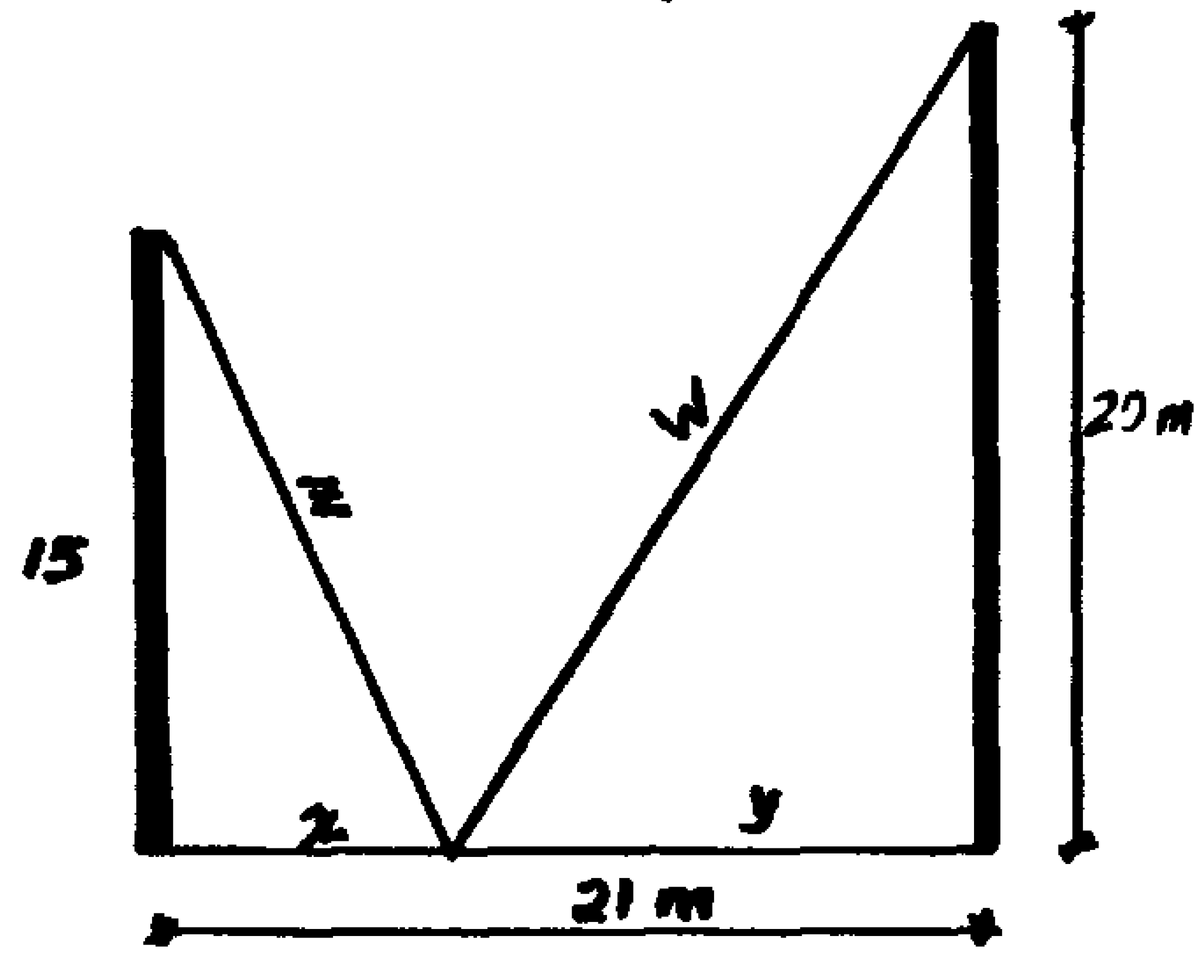
∴ النسبة التى تحقق أقل إضاءة عند N هى :-

$\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$.

(٣٢) قضيبان موضوعان رأسياً فوق الأرض وارتفاعهما $15 , 20\ m$ يراد تثبيتهما جيداً بسلك يتصل بقمة كل منهما وبوتد من الأسفل يقع بين القضيبين ، وعلى الأرض حدد المكان المناسب الذى يجب تثبيت الوتد به بالنسبة لأحد القضيبين ، علماً بأن القضيبين يبعدان $21\ m$ عن بعضهما وبحيث تكون كمية السلك اللازمة أقل ما يمكن .

الحـــل :-

أنظر الرسم شكل (٨-٢٣) .



شكل [٨ – ٢٣]

نفترض أن الطول الكلى للسلك = L

والمطلوب أن تكون L أقل ما يمكن

$$\therefore L = Z + W \qquad , \qquad x + y = 21\ m$$

$$، x^2 + (15)^2 = Z^2 \qquad , \qquad y^2 + (20)^2 = W^2$$

والمطلوب الآن أن تكون L دالة فى أحد المتغيرات ولا يهم هنا اختيار المتغير سواء كـان Z أو W أو Y أو x .

وليكن المتغير المستقل هو x .

$$\therefore L = L(x)\ ,\ Z = Z(x)\ ,\ W = W(x)\ ,\ Y = Y(x)$$

$$، \because L = Z + W$$

$$\therefore L` = Z` + W`$$

وبتفاضل كل من الدوال السابقة بالنسبة إلى x :-

$$\therefore 1 + y` = 0 \qquad , \qquad 2x = 2zz`$$

$$,\ 2yy` = 2ww`$$

ومنهـــا

$$\therefore Z` = \frac{2x}{2z} = \frac{x}{z}$$

$$,\ W` = \frac{2yy`}{2w} = \frac{yy`}{w}$$

، حيث أن $1 + y` = 0$

$\therefore W` = \frac{-y}{w}$ $\qquad$ $\therefore y` = -1$

وبالتعويض فى المعادلة :-

$$L` = z` + w`$$

$$\therefore L` = \frac{x}{z} - \frac{y}{w}$$

وبوضع $L` = 0$:-

$$\therefore \frac{x}{z} = \frac{y}{w} \qquad or \qquad \frac{x}{y} = \frac{z}{w}$$

$$\because y = 21 - x$$

$$, \quad z = \sqrt{x^2 + 225}$$

$$, \quad w = \sqrt{y^2 + 400}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{z}{w} \qquad i.e. \quad \frac{x}{21-x} = \frac{\sqrt{x^2+225}}{\sqrt{y^2+400}}$$

$$\therefore \frac{x^2}{(21-x)^2} = \frac{x^2+225}{y^2+400} = \frac{x^2+225}{(21-x)^2+400}$$

وبالاختصار :-

$$\therefore x^2 + 54x - 567 = 0$$

$$\therefore (x-9)\,(x+63) = 0$$

$$\therefore x = 9 \quad , \quad -63$$

والإجابة السالبة مرفوضة حيث أنها عديمة المعنى .

وعليه فإن $x = 9$ هى القيمة الحرجة الوحيدة .

وللتأكد من أنها تحقق الشرط المطلوب (أقل طول سلك لازم)

، نوجد قيم $L`$ حول $x = 9$ ونُثبت أنها تتغير من سالبة إلى موجبة وحيث أن x تتغير فى الفترة المحدودة $(0 , 21)$

$\therefore$ نوجد قيم L عند حدى الفترة 0 وعند 21

$\because \grave{L} = \frac{x}{z} - \frac{y}{w}$

$\therefore \grave{L} = 0 - \frac{21}{w}$ وهى سالبة .

وعندما $x = 21$

$\therefore \grave{L} = \frac{21}{z} - 0$ وهى موجبة .

$\therefore$ $\grave{L}$ تغير إشارتها من سالب إلى موجب

$\therefore$ فعندما يكون الوتد على بعد $x = 9\ m$ من القضيب المنخفض $(15\ m)$ تكون كمية السلك أقل ما يمكن .

(٣٣) عند التخطيط لأحد المطاعم وُجد أنه إذا كان عـدد المقـاعد يكفـى لعـدد بـين 40 , 80 شخصاً فإن الربح الإسبوعى يكون بما يعادل 8 جنيهاً للمقعد أما إذا ازداد عدد المقاعد أكثر من 80 فإن الربح الإسبوعى لكل مقعد يتناقص بمقـدار 4 قـروش مضروبة فى عدد المقاعد الزائدة عن 80 ،

فما هو عدد المقاعد المناسب لتحقيق أقصى ربح إسبوعى .

الحـــــل :- نعتبر أن عدد المقاعد فى المطعم = x

، الربح الإسبوعى الكلى بالجنيه = p

وواضح أن p تعتمد على x وهى عبارة عن حاصل ضرب x فى ربح المقعد الواحد

وعندما $40 \le x \le 80$ فإن : $p = 8x$

وعندما تزيد x عن 80 $(x > 80)$ فإن ربح المقعد الواحد يساوى :

$[8 - 0.04(x-80)]$

حيث $(x-80)$ هى عدد المقاعد الزائدة عن 80

$$\therefore p = x\,[8 - 0.04\,(x-80)]$$

$$= 11.2\,x - 0.04\,x^2$$

$$\therefore p(x) = \begin{cases} 8x\ldots\ldots\ldots\ldots if \quad 40 \le x \le 80 \\ 11.2\,x - 0.04\,x^2\ldots\ldots\ldots if \quad 80 \le x \le 280 \end{cases}$$

وكيفية الحصول على الرقم 280 تأتى من ملاحظة أن :-

$11.2\ x - 0.04\ x^2 = 0$

عندما تكون $x = 280$ (بحل المعادلة)

وعندما تكون $x > 280$ فإن :

تكون سالبة . $11.2\ x - 0.04\ x^2 < 0$

وباعتبار قيمة x تنحصر فيما بين [280 , 40] وهى الفترة المغلقة

سنجد أن الدالة p متصلة عند $x = 80$ وذلك للآتى :-

$p = 8x = 8 \times 80 = 640$

$\text{،}\ p = (11.2\ x - 0.04\ x^2) = [11.2 \times 80 - 0.04 \times (80)^2] = 640$

وهى نفس النتيجة

مما يدل على أن نهاية المقدار $p(x)$ عندما تؤول x إلى 80

$\lim\limits_{x \to 80} p(x) = 640$

، $p(x)$ دالة متصلة فى الفترة المغلقة [280 , 40]

والمطلوب أن تكون $p(x)$ ذات أقصى قيمة لها لذلك نوجد p' ونساويها بالصفر ونحل المعادلة للحصول على قيم x الحرجة .

وفى هذه المسألة يجب علينا أن نلاحظ p' عند حدود الفترة أى عند : 40 , 80 , 280

أى عندما $4 < x < 80$

، عندما $x = 80$

، عندما $80 < x < 280$

فعندما تكون $40 < x < 80$ فإن : $p'(x) = 8$

وعندما تكون $80 < x < 280$ فإن : $p'(x) = 11.2 - 0.08\ x$

كما أن $p'(80) =$ صفر

وبوضع $p'(x) = 0$

$\therefore 11.2 - 0.08x = 0$

$\therefore x = \frac{11.2}{0.08} = 140$

وعليه فإن القيم الحرجة لـ x هى 140 , 80

وبحساب قيم الدالة $p(x)$ عند النقطتين الحرجتين (140 , 80) وعند طرفى الفترة [280 , 40] سنجد الآتى :-

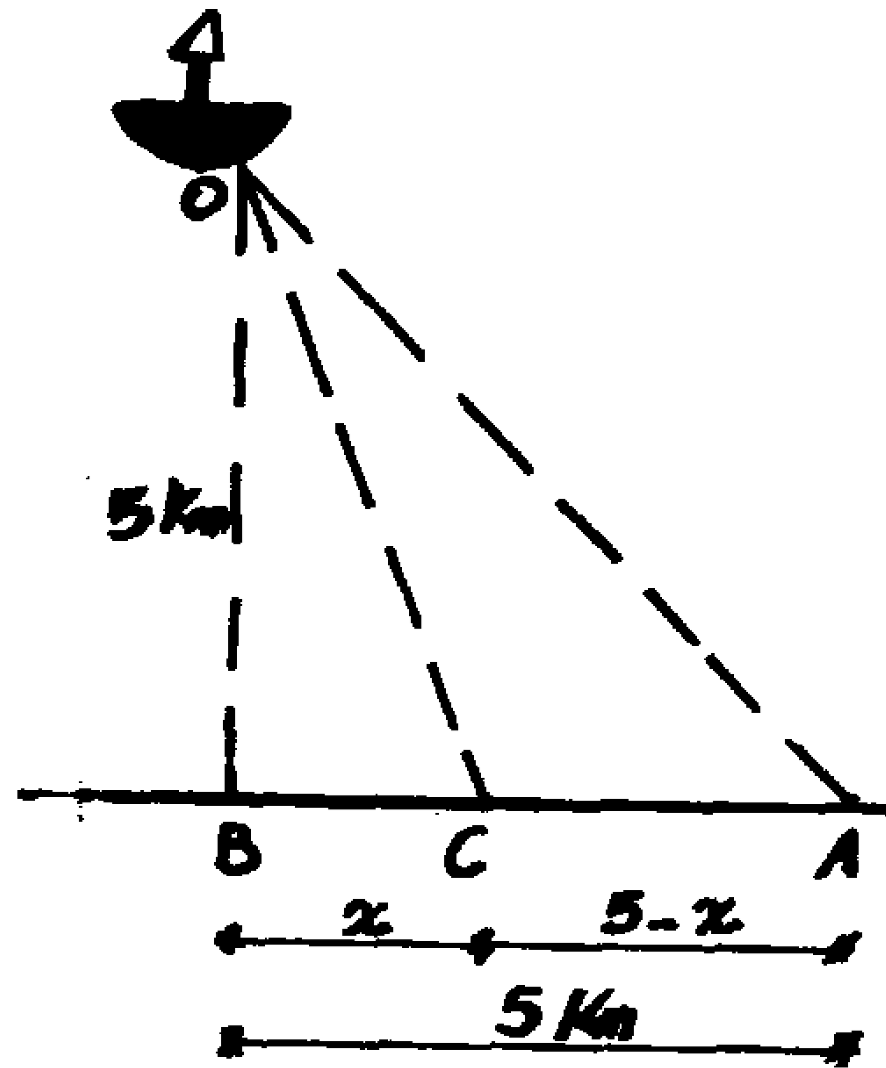
$$p(40) = 320$$
$$p(80) = 640$$
$$p(140) = 784$$
$$p(280) = 0$$

وعليه فإنه عندما يكون عدد المقاعد 140 مقعداً يتحقق أعلى عائد إسبوعى (p) وقدره 784 جنيهاً .

(٣٤) يبحر رجل فى زورق على بعد 5 كيلو متر من أقرب نقطة على الشاطئ المقابل له ، يريد أن يصل إلى نقطة على الشاطئ تبعد بمقدار 5 كيلو متر عن النقطة الأولى فى أقصر وقت ممكن فإذا كان بإمكانه أن يجدف بالزورق بسرعة $4\ km/hr$ فى حين أنه يستطيع أن يجرى بسرعة $6\ km/hr$ على رمال الشاطئ ،

حدد فى أى نقطة على الشاطئ عليه أن يُبحر لها ويكمل باقى المسافة عدواً .

الحـــــل :- أنظر الرسم شكل (٨-٢٤) .



شكل (٨-٢٤)

نعتبر امتداد الشاطئ هو BA وأن أقرب مسافة للقارب على الشاطئ هى B وأن القارب عند O على بعد $5\ km$ وأن النقطة المراد أن يصل لها فى النهاية هى A وأن C هى النقطـــة الواجب أن يُبحر لها بالزورق وعلى بعد x من B، على بعد $(5-x)$ من A ومسافة التجديف (الإبحار) هى OC بينما المسافة التى سيجريها بعد الهبوط من القارب عند C هى CA

ومن المثلث القائم الزاوية CBO يمكن إيجاد مسافة التجديف :-

$$\overline{OC} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{x^2 + 25}$$

وتستغرق هذه المسافة منه زمناً قدره (باعتبار السرعة $4\ km/hr$) :-

$$T_1 = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{\sqrt{x^2+25}}{4}$$

.... (١)

أما المسافة CA فيقطعها عدواً بسرعة $6\ km/hr$ فى زمن قدره :-

$$T_2 = \frac{(5-x)}{6}$$

.... (٢)

وبذلك يصبح الزمن الكلى للرحلة T :

$$T = T_1 + T_2 = \frac{\sqrt{(x^2+25)}}{4} + \frac{(5-x)}{6}$$

.... (٣)

وهى علاقة بين زمن الوصول من o إلى A عبر c ، بين المسافة x ولكى يكون الزمن أقل ما يمكن :-

$$\therefore \frac{dT}{dx} = \left[\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\left(x^2+25\right)^{-\frac{1}{2}} \times 2x\right] + \left[\frac{1}{6}(-1)\right]$$

$$= \frac{2x}{8\left(x^2+25\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{6}$$

وبوضع $\frac{dT}{dx} = 0$

$$\therefore T' = \frac{dT}{dx} = \frac{x}{2\sqrt{x^2+25}} - \frac{1}{3} = 0$$

$$\therefore \frac{x}{\sqrt{x^2+25}}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{x^2}{x^2+25}=\frac{4}{9}$$

$$\therefore 5x^2=100$$

$$\therefore x^2=20$$

$$\therefore x=\pm 2\sqrt{5}$$

$$\therefore x=+2\sqrt{5}=4.472 \quad km$$

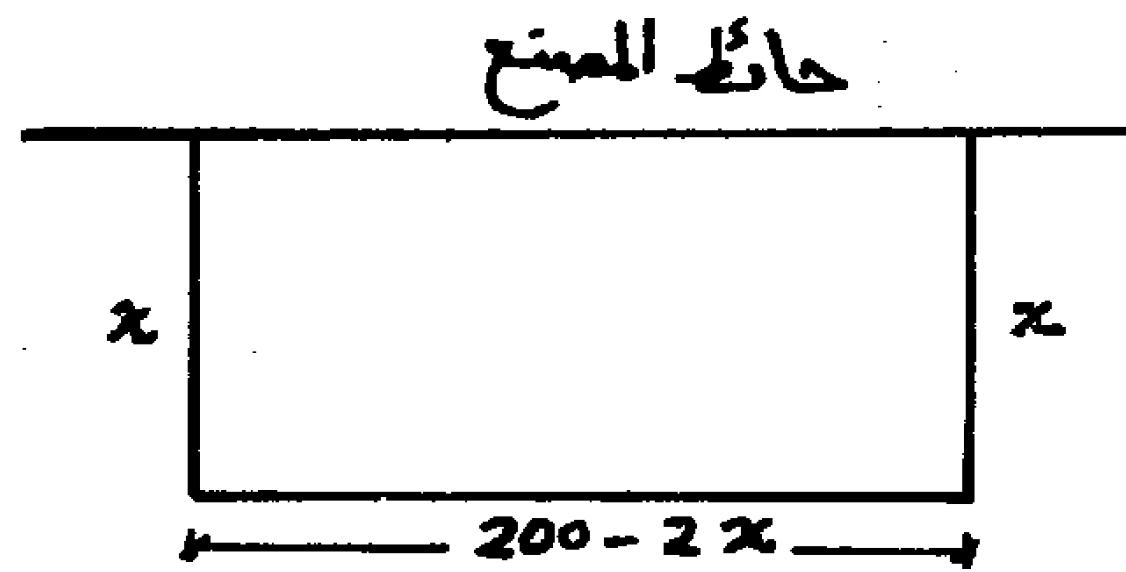
والقيمة السالبة مرفوضة

ويلاحظ أن القيمة السالبة لـ x تعنى أن عليه الإبحار إلى اليسار من نقطة o بمسافة 4.472 وهى بالطبع لا تحقق الزمن الأدنى

وبذلك فإن عليه أن يبحر لنقطة c بالقرب من نقطة A وتبعد عن A بمقدار $(5-4.472)$ أى بمسافة تعادل $0.527\ km$

(٣٥) يمكن صنع سور طوله $200\ m$ من الألواح الخشبية المتوفرة والمطلوب إحاطة فناء مستطيل الشكل بهذا السياج (السور) بحيث تكون مساحة الفناء أكبر ما يمكن مستخدمين عند ذلك جدار مصنع مجاور لقطعة الأرض (الفناء) بمثابة أحد أجناب الفناء .

الحـــل :- انظر الرسم شكل (٨ - ٢٥) .



هنا شكل (٨ - ٢٥)

نرمز لأحد أضلاع الفناء بالرمز x

عندئذ يكون الضلع الآخر للفناء مساوياً $200-2x$

ومساحته تكون $A = x(200-2x)$

$\therefore A = -2x^2 + 200x$

ولكى تكون A قيمة عظمى نوجد $\frac{dA}{dx}$ ونساويها بالصفرونوجد قيم x الحرجة .

$\therefore \frac{dA}{dx} = -4x + 200 = 0$

$\therefore 4x = 200 \qquad \therefore x = 50 \quad m .$

وبذلك فإن طول ضلع الفناء العمودى على جدار المصنع يجب أن يكون طوله $50\ m$

وبذلك فإن الضلع الموازى للجدار يكون طوله : -

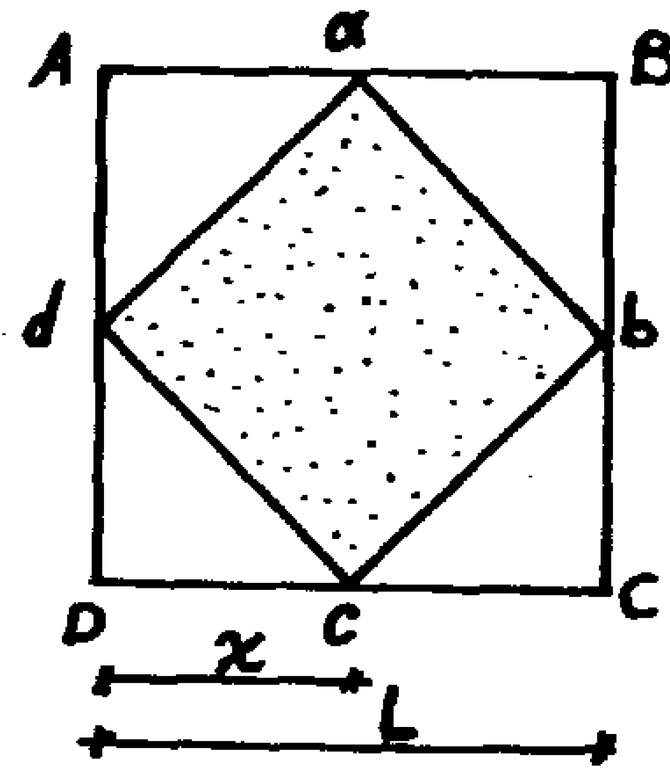
$200 - 2x = 200 - 2 \times 50 = 200 - 100 = 100\ m .$

أى أن الفناء يكون علـى شـكل مستطيل طولـه $100\ m$ وعرضـه $50\ m$ أو علـى شكل نصف مربع طول ضلعه $= 100\ m$

والمساحة حينئذ تبلغ : $A = -2(50)^2 + 200(50) = -5000 + 10000 = 5000\ m^2$

(٣٦) لدينا المربع $ABCD$ ؛ شكل (٨ – ٢٦) رُسمت ابتداء من رؤوسه الأجزاء المتساوية Aa , Bb , Cc , Dd ووصلت النقط a , b , c , d بمستقيمات ، فعند أى قيمة للمستقيم Aa يكون المربع $abcd$ أصغر ما يمكن ؟

الحــــــل :-



شكل (٨ – ٢٦)

إذا اعتبرنا $Aa = x$

فإنه من الواضح أن $aB = L - x$ [حيث L طول ضلع المربع الخارجى]

ومن نظرية فيثاغورث :

$$\overline{ab}^2 = x^2 + (L-x)^2$$
$$= 2x^2 - 2Lx + L^2$$

ولكن مساحة المربع $abcd$ تساوى $\overline{ab}^2$ مما يعنى أن المساحة : -

$$S = 2x^2 - 2Lx + L^2$$

وبتفاضل S بالنسبة إلى x نوجد $\grave{S}$ ونساويها بالصفر

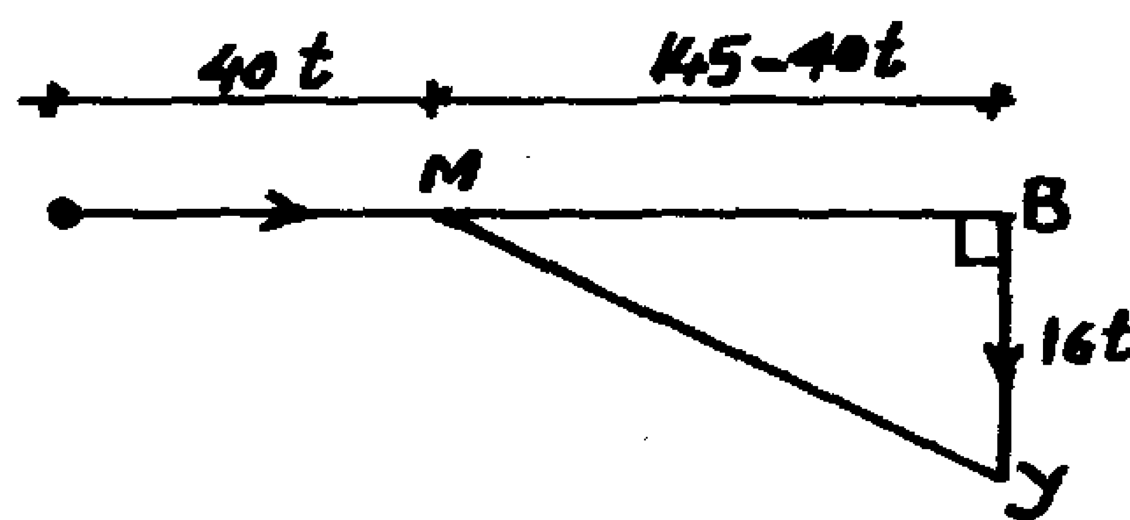
$$\therefore \grave{S} = 4x - 2L = 0$$
$$\therefore x = \frac{L}{2}$$

أى أنه لتحقيق الشرط اللازم فإنه يجب رسم النقاط a , b , c , d فى منتصفات أضلاع المربع الأساسى $ABCD$.

(٣٧) من النقطتين A, B تُبحر فى نفس الوقت فى الاتجاهين المبينين على الرسم بسهمين ، سفينة ويخت وكانت سرعتاهما تساويان على الترتيب $V_m = 40\ km/hr$ ، $V_y = 16\ km/hr$.

فكم من الوقت ينقضى حتى يُصبح البعد بينهما أقصر ما يمكن باعتبار أن $AB = 145\ km$.

الحــل :-



شكل (٨-٢٧)

نرمز بالحرفين M , y إلى وضعى اليخت والسفينة

حيث (M (motorship أى السفينة ، y أى اليخت (yacht) ونرمز بالرمز t إلى عدد الساعات التى تمر بعد إبحارهما من النقطتين B , A وبذلك فإن :-

$$AM = 40\ t\ km$$

$$, BY = 16\ t\ km$$

ومن نظرية فيثاغورث :-

$$\therefore MY = \sqrt{\overline{BM}^2 + \overline{BY}^2} = \sqrt{(145 - 40\ t)^2 + (16\ t)^2}$$

$$MY = \sqrt{1856\ t^2 - 11600\ t + 21025}$$

والمطلوب هو جعل MY أصغر ما يمكن .

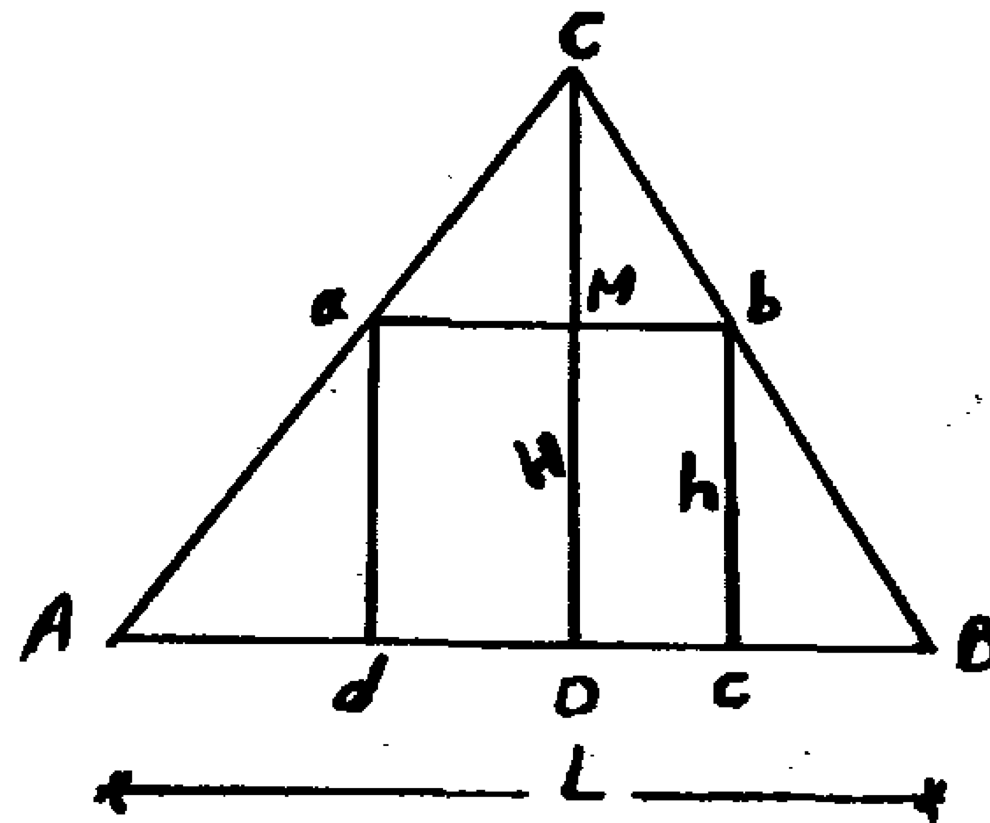
ولكى تكون MY أصغر ما يمكن يجب أن يكون ما تحت الجذر أصغر ما يمكن .

$$\therefore \frac{d}{dt}(1856 t^2 - 11600 t + 21025) = 3712 t - 11600 = 0$$

$$\therefore t = \frac{11600}{3712} = 3\frac{1}{8} = 3.125\ hr$$

(٣٨) فى المثلث ABC الموضح بشكل (٨-٢٨) ، مد المستقيم ab موازياً للقاعدة AB بحيث تُصبح مساحة المستطيل abcd أكبر ما يمكن

الحـــــل :-



شكل (٨-٢٨)

نفترض أن :-

$$AB = L$$
$$, ab = M$$
$$, bc = h$$

ونرمز بالحرف H إلى إرتفاع المثلث ABC وهو CD المقام على القاعدة AB

ومن تشابه المثلثين abc , ABC ينتج التناسب التالى :-

$$\frac{M}{L} = \frac{H-h}{H}$$

$$\therefore M = \frac{L}{H}(H-h)$$

، حيث أن مساحة المستطيل الداخلى abcd تساوى :-

$$S = hM$$

$$\therefore S = \frac{L}{H}h(H-h) = Lh - \frac{L}{H}h^2$$

ثم نوجد $\frac{ds}{dh}$ أى S' ونساويها بالصفر للحصول على قيم h الحرجة :

$$\therefore S' = L - \frac{2Lh}{H} = 0$$

$$\therefore \frac{2Lh}{H} = L \quad \therefore 2h = H \quad \therefore h = \frac{H}{2}$$

وبالتالى فإن أقصى مساحة تكون عندما يكون ارتفاع المستطيل بما يعادل نصف ارتفاع المثلث .

ومما يؤكد صحة الإجابة أن المشتقة الثانية S'' سالبة

سالبة $S'' = 0 - \frac{2L}{H} = -2\frac{L}{H} < 0 \; (-ve)$

(٣٩) بستان من أشجار التفاح يحتوى على 30 شجرة تفاح فإذا كان إنتاج الشجرة الواحدة يعادل 400 تفاحة فى المتوسط فإذا أضفنا شجرة واحدة لهذا البستان فإن متوسط الإنتاج للشجرة الواحدة ينخفض بمعدل 10 تفاحات .

فكم عدد الشجرات اللازم لكى يكون المحصول أكبر ما يمكن .

الحـــــل :-

انظر الرسم شكل (٨-٢٩).

إذا اعتبرنا أن عـدد الأشـجار الجديـدة المزروعـة فـى البسـتان = x فإنـه يكـون هنـالك $30+x$ شجرة فى البستان ويبلغ إنتاجها لكل شجرة $(400-10x)$ تفاحة .

وبذلك يكون إنتاج البستان كله Y يساوى :-

$$Y=(30+x)(400-10x)$$
$$=-10x^2+100x+12000$$
$$\frac{dy}{dx}=-20x+100 \text{،}$$

وبوضع $\frac{dy}{dx}=0$:

$$\therefore -20\ x+100=0$$
$$\therefore x=5$$

وعلى ذلك فإن زرع 5 أشجار جديـدة يعطـى أكبر محصـول ويصبح عـدد الأشـجار الكلى 35 شجرة وإنتاج كل منها يساوى $(400-5\times 10)$ أى 350 تفاحة .

ويكون إنتاج التفاح الكلى من البستان يساوى :-

$$(35\times 350)=12250 \quad appl$$

ويمكن تمثيل ذلك بيانياً كالتالى :-

$$\because Y=12000+100\ x-10x^2$$
$$or \quad x^2-10\ x-1200=\frac{-Y}{10}$$

وبطريقة إكمال المربع (مربع كامل)

$$\therefore x^2-10\ x+25-25-1200=\frac{-y}{10}$$
$$\therefore (x-5)^2-1225=\frac{-y}{10}$$

ومن الأنسب لرسم هذا المنحنى هو تغيير المحاور بحيث تكون

$$Y=\frac{y}{10}\ ,\ X=x-5$$
$$\therefore 1225-X^2=Y$$

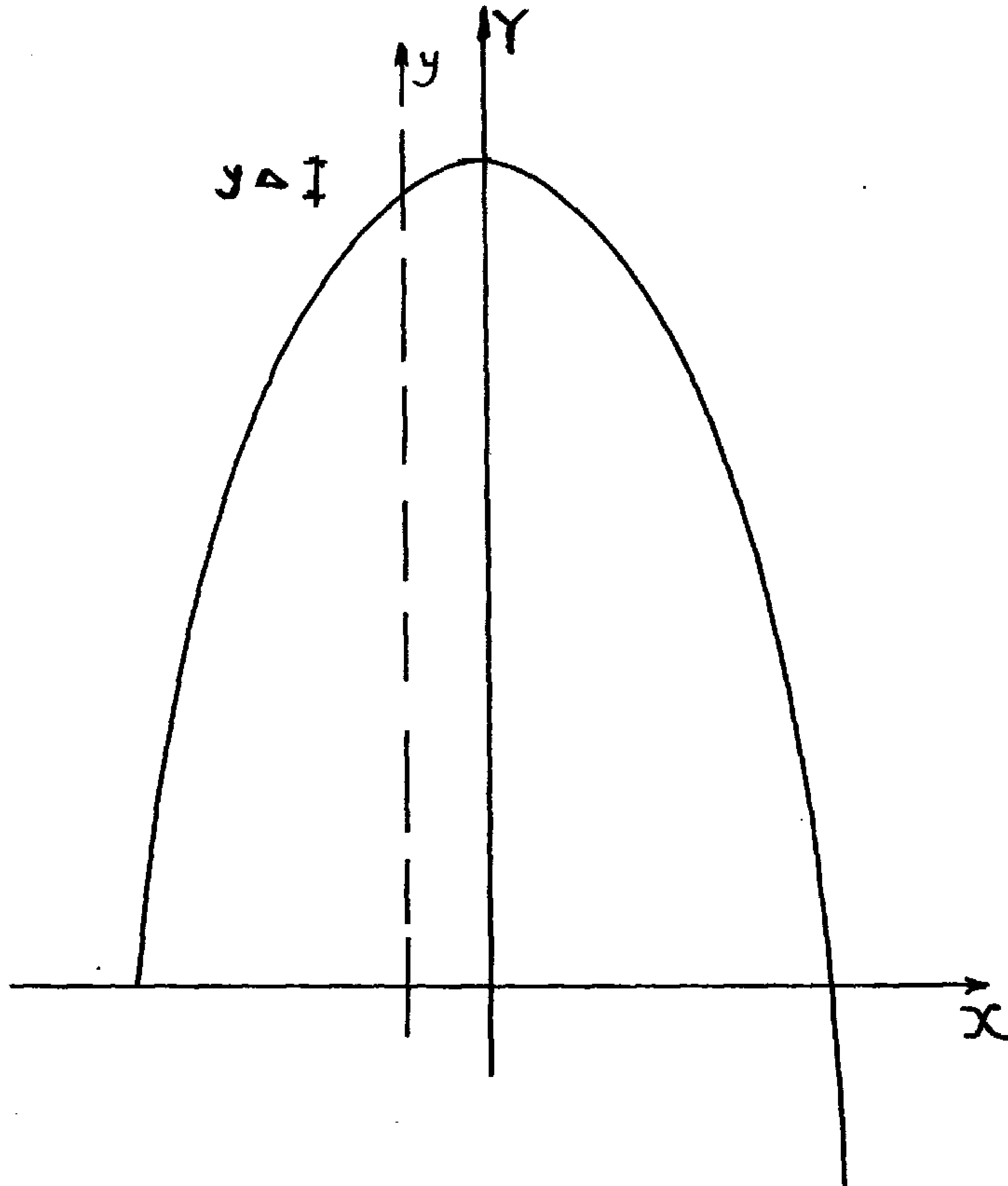
وهى تمثل معادلة قطع مكافئ Parabola وذلك بإزاحة محور OY بمقدار 5 وحدات لليسار وبضرب كل y فى 10

وحيث أن إنتاج البستان الأصلى $12000 = 400 \times 30$

والإنتاج الجديد بزراعة 5 أشجار إضافية = $350 \times 35 = 12250$

فإن الزيادة وقدرها 250 تفاحة تُمثل فى الشكل بالرمز Δy

$\Delta y = 250$



شكل (٨-٢٩)

الباب التاسع

المعدلات الزمنية المرتبطة

Related Rates

٩-١ : عام

عملياً ، فإن الظواهر المختلفة لا تتأثر بعامل متغير واحد فقط ولكنها فى كثير من الحالات تتأثر بعدة عوامل مختلفة .

وعند تمثيل هذه الظاهرة بعلاقة فى صورة دالة فإن المتغير التابع فى هذه الدالة (الظاهرة) يكون دالة فى أكثر من متغير .

وقد درسنا فى الباب السابق الدوال ذات المتغير الواحد وهى فى الواقع مجرد تبسيط للواقع .

وعموماً فإنه يقصد بالمسائل المدرجة تحت هذا العنوان ، بتلك التى تحتوى على الأقل على متغيرين مرتبطين بالزمن ، أى أن كلاً من المتغيرين مرتبط بالزمن .

فإذا ما قمنا بمفاضلة هذه الدالة بالنسبة للزمن فإن الناتج يكون عبارة عن معادلة بين مشتقات هذه المتغيرات بالنسبة للزمن .

ويُطلق حينئذ على معدلات تغير الأزمنة لهذه المتغيرات بأنها مرتبطة .

فمن المعادلة التى تربط بين الظاهرة والمتغيرات المختلفة بها يمكننا إيجاد علاقة بين المعدلات الزمنية المختلفة لكل متغير ، بحيث أنه إذا علمنا أحد هذه المعدلات ، يمكن معرفة المعدل الثانى أو الآخر .

والأمثلة المحلولة التالية توضح هذا الموضوع بمزيد من التفسير مع بيان أهمية ذلك فى مختلف أوجه الحياة العملية خاصة الهندسية والفيزيائية منها .

٩-٢ :- أمثلة محلولة :-

(١) أوجد معدل تغير حجم كرة بالنسبة إلى نصف قطرها " عند تمددها " وذلك باستخدام طريقة Δ - Δ *- process*

الحـــــل :-

حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi\, r^3$ حيث r = نصف قطر الكرة

وحيث أن معدل التغير يمكن تعريفه كالتالى :-

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad , \quad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

لذلك ففى حالتنا هذه يكون معدل التغير كالتالى :-

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} \quad , \quad \Delta v = f(r+\Delta r) - f(r)$$

$$, \because v = \frac{4}{3}\pi\, r^3 \qquad i\,.\,e \quad v = f(x) = v(r)$$

$$, f(r+\Delta r) = \frac{4}{3}\pi\, (r+\Delta r)^3$$

$$\therefore \Delta v = f(r+\Delta r) - f(r)$$

$$= \frac{4}{3}\pi (r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi\, r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi \left[r^3 + 3r^2\,.\,\Delta r + 3r\,.\,(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3\right] - \frac{4}{3}\pi\, r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi \left[3r^2 . \Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3\right]$$

$$\therefore \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{4\pi}{3}\left[3r^2 + 3r\, \Delta r + (\Delta r)^2\right]$$

$$, \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = 4\pi\, r^2$$

وهو معدل تغير حجم الكرة .

(٢) يزيد حجم كرة بمعدل ثابت يبلغ $24\ cm^3/\sec$ ، فاحسب نصف قطرها عندما يكون معدل تغير نصف القطر بالنسبة للزمن مساوياً لثلاثة أضعاف نصف القطر ، وذلك باستخدام طريقة Δ

الحـــــل :-

حجم الكرة :- $V = \frac{4}{3}\pi\, r^3$

ويمكننا إيجاد $\frac{dv}{dr}$ بدلالة r . وبتفاضل هذه المعادلة يمكن إيجاد $\frac{dv}{dt}$ بدلالة r ، $\frac{dr}{dt}$

وذلك لأن :-

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}$$

$$,\because \frac{dv}{dt}=24$$

$\therefore$ نقوم بحساب r عندما $\frac{dr}{dt}=3r$ ،

وباستخدام طريقة Δ :-

$$\frac{dv}{dr}=\frac{f(r+\Delta r)-f(r)}{\Delta r}$$

$$=\frac{\frac{4}{3}\pi\,(r+\Delta r)^3-\frac{4}{3}\pi\ r^3}{\Delta r}$$

$$=\frac{\frac{4\pi}{3}\left[r^3+3r^2\ .\ \Delta r+3r(\Delta r)^2+(\Delta r)^3\right]-\frac{4}{3}\pi\ r^3}{\Delta r}$$

$$=\frac{4\pi\,r^2\ .\ \Delta r+4\ \pi\ r\ .\ (\Delta r)^2+\frac{4}{3}\pi\ (\Delta r)^3}{\Delta r}$$

$$=4\pi\,r^2+4\pi\,r\ .\ \Delta r+\frac{4}{3}\pi\,(\Delta r)^2$$

$$,\frac{dv}{dt}=\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta r}=\lim_{\Delta r\to 0}4\pi\,r^2+4\pi\,r\ .\ \Delta r+\frac{4}{3}\pi\,(\Delta r)^2=4\pi\,r^2$$

$$,\frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=4\pi\,r^2\ .\ \frac{dr}{dt}$$

$$,\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=4\pi\,r^2\ .\ \frac{dr}{dt}$$

وبالتعويض عن قيمة : $\frac{dv}{dt}=24$ ، عن قيمة : $\frac{dr}{dt}=3r$

ثم نحل المعادلة فى r :-

$$24=4\pi\,r^2\ .\ (3r)=12\pi\,r^3$$

$$\therefore r^3=\frac{2}{\pi}$$

$$\therefore r\ =\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$$

(٣) يتم نفخ بالون ، وبزيادة نصف قطره ، يزداد حجمه فاوجد معدل زيادة الحجم عندما $r = 5\ mt$ ، بطريقة Δ

الحـــــل :-

نفترض أن حجم الكرة V

$$,V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

ومعدل تغير حجم البالون (الكرة) :-

$$Lim \frac{\Delta v}{\Delta r} \quad , \quad \Delta v = f(r+\Delta r) - f(r)$$

$$، \; f(r+\Delta r) = \frac{4}{3}\pi\ (r+\Delta r)^3$$

$$\therefore \Delta v = f(r+\Delta r) - f(r)$$

$$= \frac{4}{3}\pi (r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi \left[r^3 + 3r^2 . \Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3\right] - \frac{4\pi\ r^3}{3}$$

$$، \; \frac{\Delta v}{\Delta r} = 4\pi\ r^2 + 4\pi\ r . \Delta r + \frac{4}{3}\pi\ (\Delta r)^2$$

$$, \; \underset{\Delta r \to 0}{Lim} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \underset{\Delta r \to 0}{Lim} \quad 4\pi\ r^2 + 4\pi\ r . \Delta r + \frac{4}{3}\pi . (\Delta r)^2 = 4\pi\ r^2$$

وهذا يمثل معدل زيادة الحجم أى $\left(\frac{dv}{dr} = 4\pi\ r^2\right)$

وعندما يزيد الحجم ويُصبح نصف القطر : $r = 5$

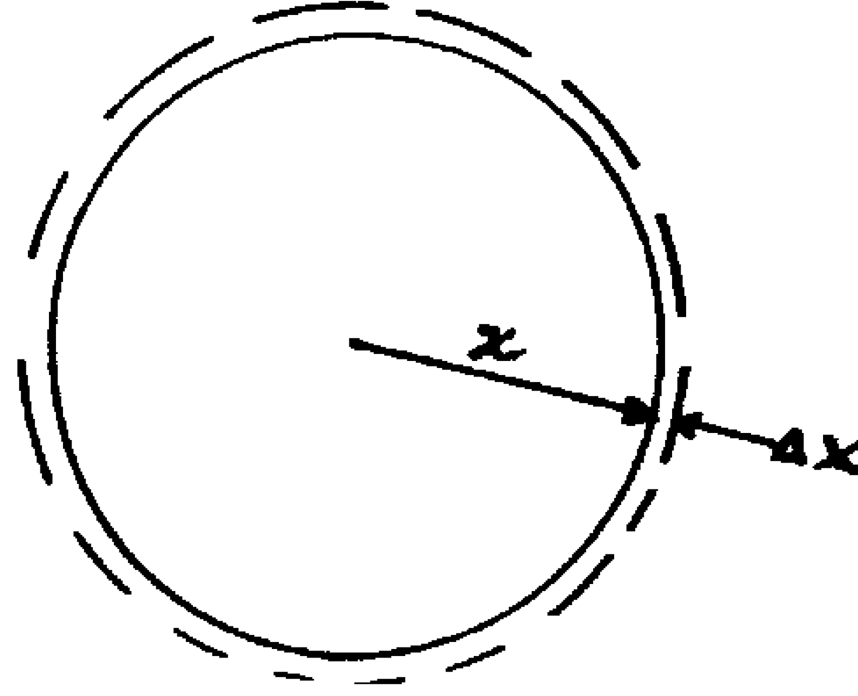
$$\therefore \frac{dv}{dr} = 4\pi\ r^2 = 100\pi\ \ m^3$$

وذلك لكل متر تغير فى نصف القطر .

(٤) صفيحة معدنية دائرية الشكل عُرضت للحرارة فتمــددت بانتظـام بحيث يـزداد نصف قطرها بمعدل $0.025\ cm/\sec$ فكم يبلغ معدل زيـادة المسـاحة عندمـا يكـون نصف القطرُ مساوياً $5\ cm$.

الحـــــل :-

أنظر شكل (٩-١) .



شكل (٩-١)

نفرض أن x هو نصف قطر الصفيحة

، نفرض أن y هى مساحة الصفيحة :

$$\therefore y = \pi x^2$$

$$، \frac{dy}{dt} = 2\pi x \frac{dx}{dt}$$

وعندما $x = 5\ cm$, $\frac{dx}{dt} = 0.025$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = 2\pi \times 5 \times 0.025 = 0.25\pi \quad cm^2/\sec$$

(٥) بالون كروى يتم نفخه بالهواء بمعدل $20\ m^3/\min$ وفى اللحظة التى كان عندها نصف القطر $15\ m$ ، كم يبلغ معدل زيادة مساحة السطح .

الحـــــل :-

ليكن نصف القطر = r

ومساحة السطح = $S = 4\pi r^2$

والحجم = $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\text{،}\ \frac{ds}{dt} = 8\pi\ r \frac{dr}{dt}$$

$$, \frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi\ .\ 3r^2\ \frac{dr}{dt} = 4\pi\ r^2\ \frac{dr}{dt}$$

ومنها :-

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi\ r^2}\ \frac{dv}{dt}$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = 8\pi\ r\ .\ \frac{1}{4\pi\ r^2}\ .\ \frac{dv}{dt} = \frac{2}{r}\ .\ \frac{dv}{dt}$$

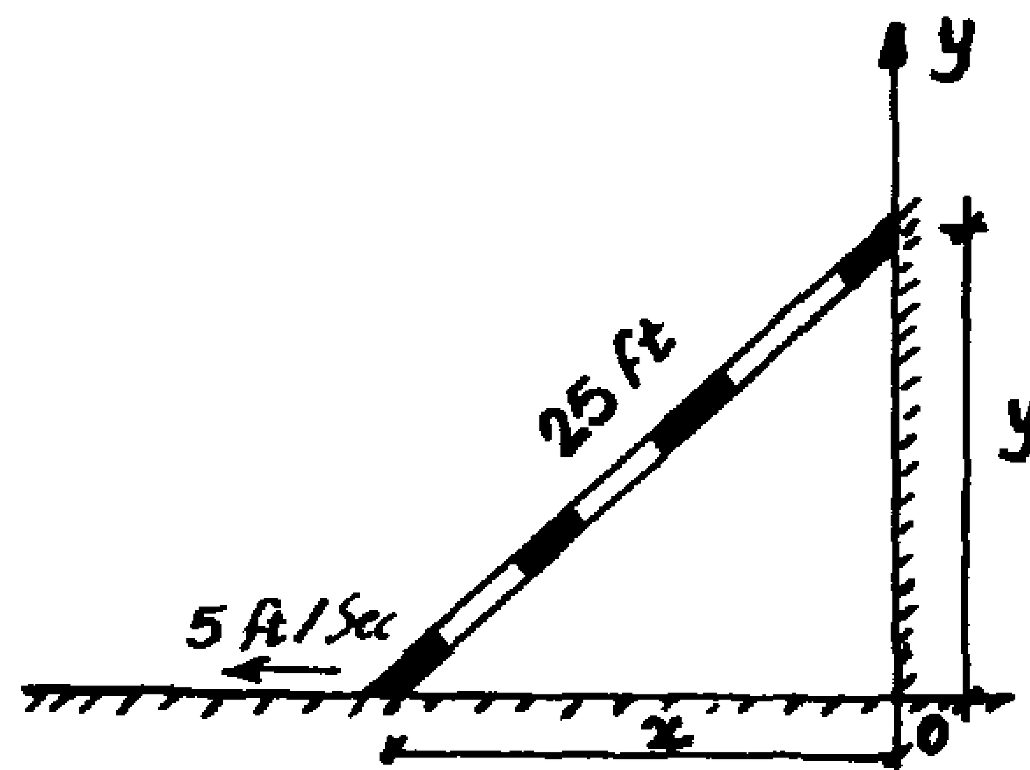
وبالتعويض عن $\frac{dv}{dt} = 20$ ، عن $r = 15$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \frac{2}{15}\ .\ 20 = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

(٦) يرتكز سلم طوله 25 ft من أعلى على حائط رأسي ومن أسفل على الأرض فإذا كانت أسفل نقطة بالسلم تنزلق بمعدل 5 $ft/\min$ فأوجد سرعة أعلى نقطة في السلم على الحائط الرأسي باستخدام طريقة الدالة الضمنية في عملية التفاضل .

الحـــــل :-

أنظر الرسم شكل (٩-٢)



شكل (٩-٢)

من هندسة الشكل :-

$$x^2 + y^2 = \overline{25}^2$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}\left(y^2\right)=\frac{d}{dx}\,(25)^2$$

$$\therefore 2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt} = 0$$ (تفاضل ضمنى بالنسبة إلى t)

$$\because V=\frac{dx}{dt}=5$$

$$\therefore 2x \times 5 + 2y\,\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\therefore 2y\,\frac{dy}{dt} = -10\,x$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{10\,x}{6\,y} = \frac{-5\,x}{3\,y}$$

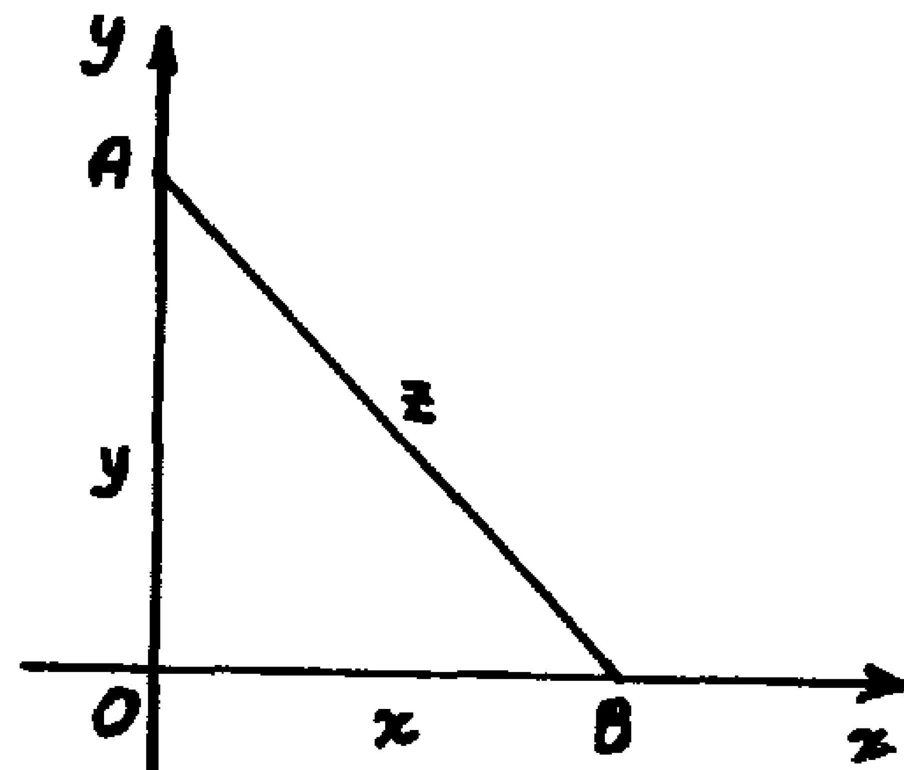
وتعنى إشارة (–) ، أن قمة السلم تنزلق للأسفل على الحائط الرأسى فى اتجاه $YOY^{`}$

(٧) قاربان B , A بدأ كل منهما فى الإبحار مـن نفـس النقطـة متحركـاً بعيـداً عـن الآخر فى اتجاهين متعامدين فإذا كان القـارب A يتحـرك بمعـدل $6\ Km\ /\ h$ بينمـا يتحرك القارب B بسرعة $8\ Km\ /\ h$.

فكم يبلغ معدل ابتعادهما بعد ساعتين من بدء التحرك .

الحـــــل :-

أنظر الرسم شكل (٩–٣)



شكل (٩–٣)

إذا اعتبرنا أن y هى المسافة التى تحركها القارب A

، إذا اعتبرنا أن x هى المسافة التى تحركها القارب B

فإن المسافة بينهما تُصبح مساوية Z :-

$$, Z^2 = x^2 + y^2$$

وبأخذ مشتقة هذه الصيغة (Z^2) بالنسبة للزمن :-

$$\therefore 2Z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \qquad \text{..........} (١)$$

ولما كان القاربان يتحركان بسرعة ثابتة

∴ المسافة التى تحركها القارب A بعد ساعتين :- $x = 6 \times 2 = 12 \ km$

، المسافة التى تحركها القارب B بعد ساعتين :- $y = 8 \times 2 = 16 \ km$

∴ فالمسافة بينهما بعد ساعتين : Z تساوى :-

$$Z = \sqrt{(12)^2 + (16)^2}$$
$$= \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20 \ km$$

وبالتعويض بهذه القيم :- $Z = 20 \ , \ \frac{dy}{dt} = 8 \ , \ y = 16 \ , \ \frac{dx}{dt} = 6 \ , \ x = 12$

فى المعادلة (١) :

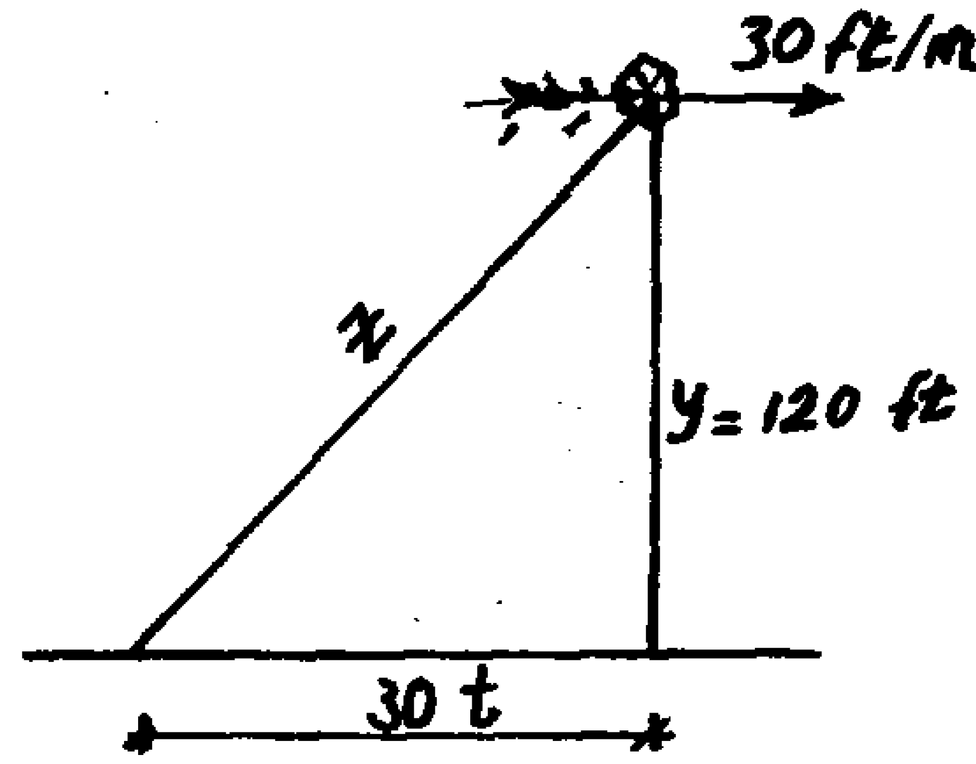
$$\therefore 20 \,.\, \frac{dz}{dt} = 12 \times 6 + 16 \times 8 = 72 + 128 = 200$$

∴ معدل الابتعاد يعادل : $\therefore \frac{dz}{dt} = \frac{200}{20} = 10 \ km/h$

(٨) يقوم غلام باللعب بطائرة ورقية ، فإذا كانت الطائرة فى لحظة ما تطير فوق يده تماماً وعلى ارتفاع 120 ft ، فإذا كانت الرياح تحرك الطائرة أفقياً بسرعة 30 $ft/\min$ ، فكم يبلغ معدل الشد فى الخيط عندما يكون الطول الحر للخيط مساوياً 150 قدماً .

الحـــــل :-

أنظر الرسم شكل (٩-٤) .



شكل (٩-٤)

لدينا :-

$$y = 120 \ \ ft$$

$$\frac{dx}{dt} = 30 \quad , \quad Z = 150$$

والمسافة الأفقية التى تحركتها الطائرة فى زمن " t " = $30\,t$

والمطلوب هو إيجاد : $\frac{dz}{dt}$

وباستخدام نظرية فيثاغورث :-

$$Z^2 = (30\,t)^2 + (120)^2 \qquad \text{.......... (١)}$$

$$\therefore 900t^2 = Z^2 - (120)^2$$

$$\therefore t = \frac{1}{30} \times \sqrt{Z^2 - (120)^2} \qquad \text{.......... (٢)}$$

وبتفاضل المعادلة (١) :-

$$\therefore 2Z\,\frac{dz}{dt} = (30)^2 \times 2t + 0 = 1800\,t$$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = \frac{1800\,t}{2\,z} = \frac{900\,t}{z} \qquad \text{.......... (٣)}$$

وبالتعويض عن قيمة t من (٢) فى المعادلة (٣)

$$\therefore \frac{dz}{dt} = \frac{900\,\sqrt{z^2 - (120)^2}}{30 \times z} = \frac{30}{z}\,\sqrt{z^2 - (120)^2}$$

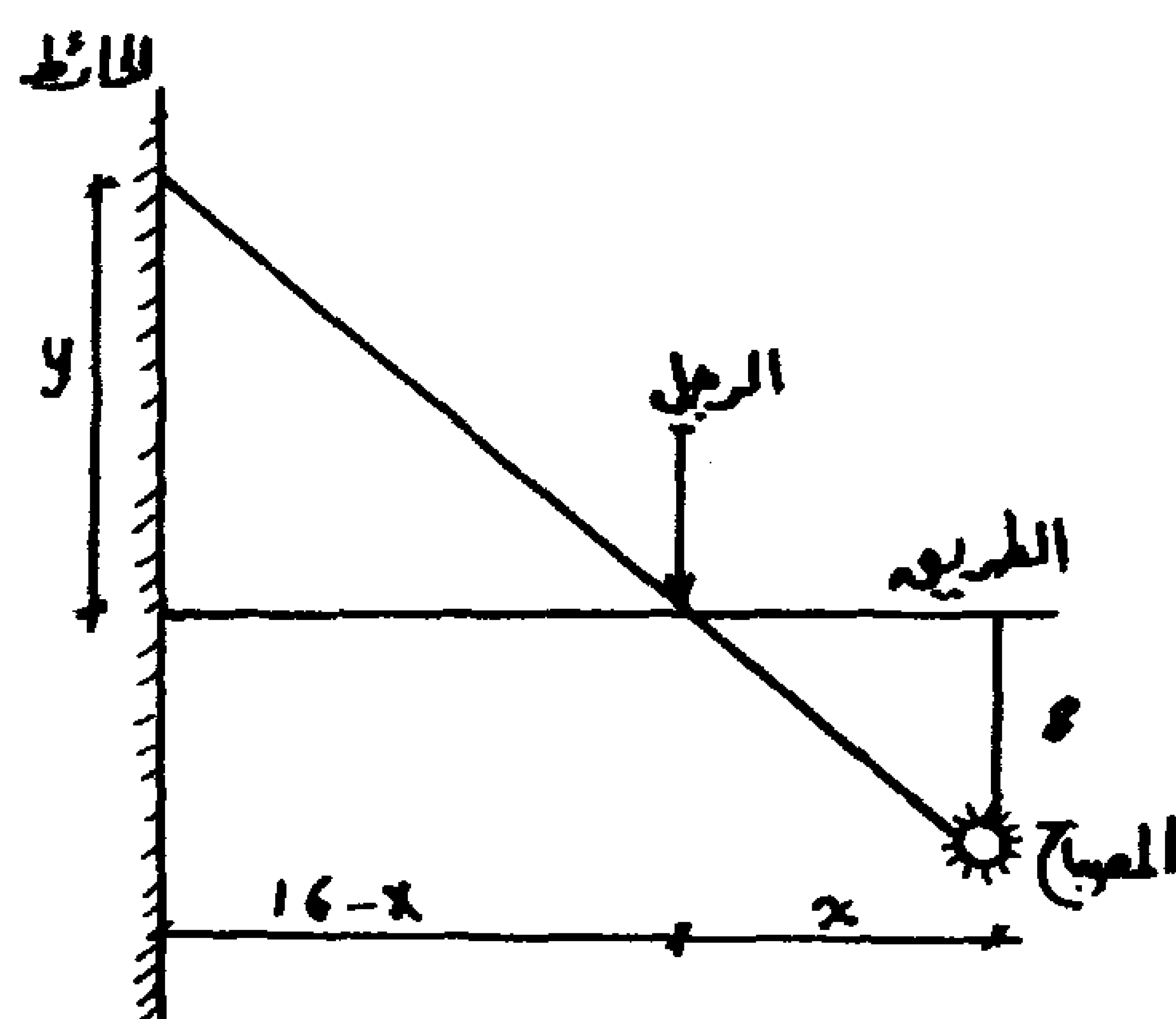
وعندما تكون : $Z = 150 \ ft$ فإن معدل الشد يساوى :-

$$\frac{dz}{dt} = \frac{30}{150}\sqrt{\overline{150}^2 - \overline{120}^2} = \frac{90}{5} = 18\ ft/\min$$

(٩) يسير رجل فى طريق متعامد على حائط ، وفى اتجاه الحائط فإذا كان الرجل يقترب من الحائط بمعدل $5\ m/\min$. فإذا كان هنالك مصباح يبعد $8\ m$ عن الطريق ، $16\ m$ عن الحائط فما هو معدل تحرك ظل الرجل على الحائط فى اللحظة التى يكون فيها الرجل على بعد $8\ m$ من الحائط .

الحـــــل :-

أنظر الرسم شكل (٩-٥) .



شكل (٩-٥)

بالرجوع إلى الشكل سنجد أنه :-

$$\frac{dx}{dt} = 5$$

والمطلوب هو $\frac{dy}{dt}$ فى اللحظة التى تكون فيها $x = 8\ m$

ومن هندسة الشكل :-

$$\frac{x}{8} = \frac{16-8}{y}$$

$$\therefore xy = 128 - 8x$$

وحيث أن كلاً من x , y دالة فى الزمن لذلك يلزم أن نفاضل بالنسبة للزمن .

$$\therefore \frac{d}{dt}(xy) = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = -8\frac{dx}{dt}$$

وعندما تكون $x = 8$, $y = 8$

$$\therefore 8\frac{dy}{dt} + 8 \times 5 = -8 \times 5$$

$$\therefore 8\frac{dy}{dt} = -80$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -10$$

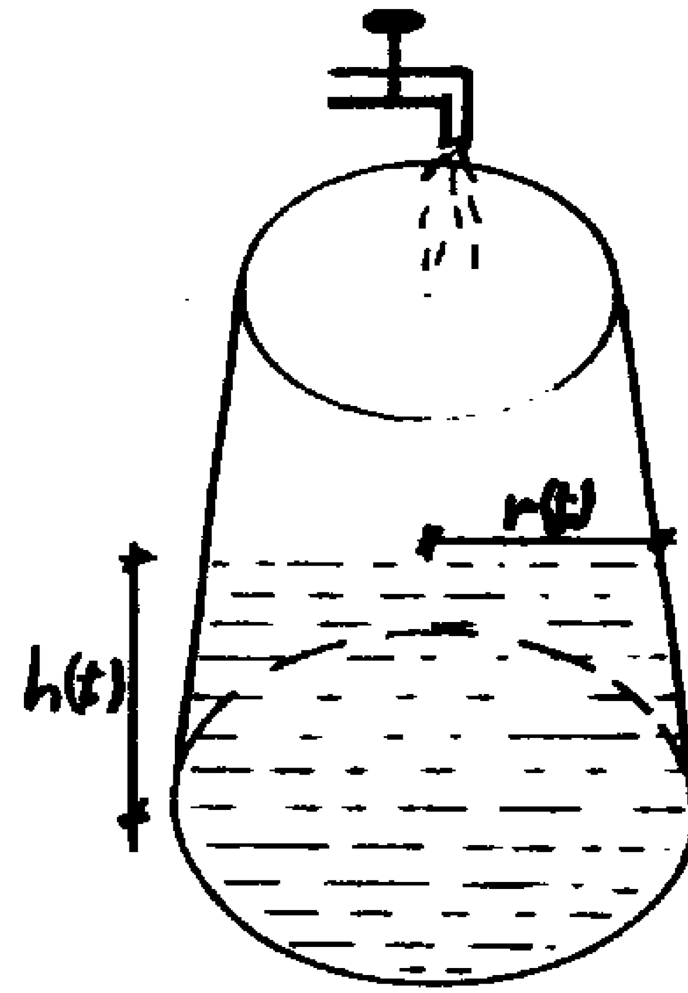
وعليه فإن فى اللحظة المذكورة فإن ظل الرجل يتحرك بمعدل $10\ m/\min$

والإشارة السالبة تعنى أن الظل يتحرك إلى اليمين ويتناقص مع الزمن .

(١٠) ينساب الماء إلى خزان (وعاء) بشكل مخروطى بمعدل $5\ Liter/\min$ فما هو معدل ارتفاع الماء فى الوعاء عند أى لحظة ؟

الحـــــــل :-

أنظر الرسم شكل (٩-٦) .



شكل (٩-٦)

عند أى لحظة ولتكن t دقيقة بعد أن يبدأ الماء فى الانسياب بالوعاء ،

نعتبر أن h (t) هى عمق الماء ، أن r (t) هى نصف قطر سطح الماء فى الوعاء وحيث أن حجم الماء يتغير تبعاً لتغير الوقت .

$$\therefore V(t) = \frac{1}{3}\pi\,[r(t)]^2 \cdot h(t)$$ .... (١)

ومن المعطيات فى المسألة فإن حجم الماء فى الخزان عند أى لحظة (t) يساوى :-

$$V(t) = 5t$$

$$\therefore 5t = \frac{1}{3}\pi\, r^2\, h$$

وللتعبير عن الحجم بدلالة متغير واحد فإنه باستخدام تشابه المثلثات بالشكل نجد أن :-

$$\frac{r}{1.5} = \frac{h}{3} \quad i.e \quad h = 2r. \quad or:- \quad r = \frac{h}{2}$$ .... (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) عن قيمة r :-

$$V(t) = 5t = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 \times h = \frac{\pi\, h^3}{6}$$

$$\therefore 30t = \pi\, h^3 \qquad \therefore h = \sqrt[3]{\frac{30t}{\pi}}$$

$$\therefore h = \left(\frac{30}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \times (t)^{\frac{1}{3}}$$

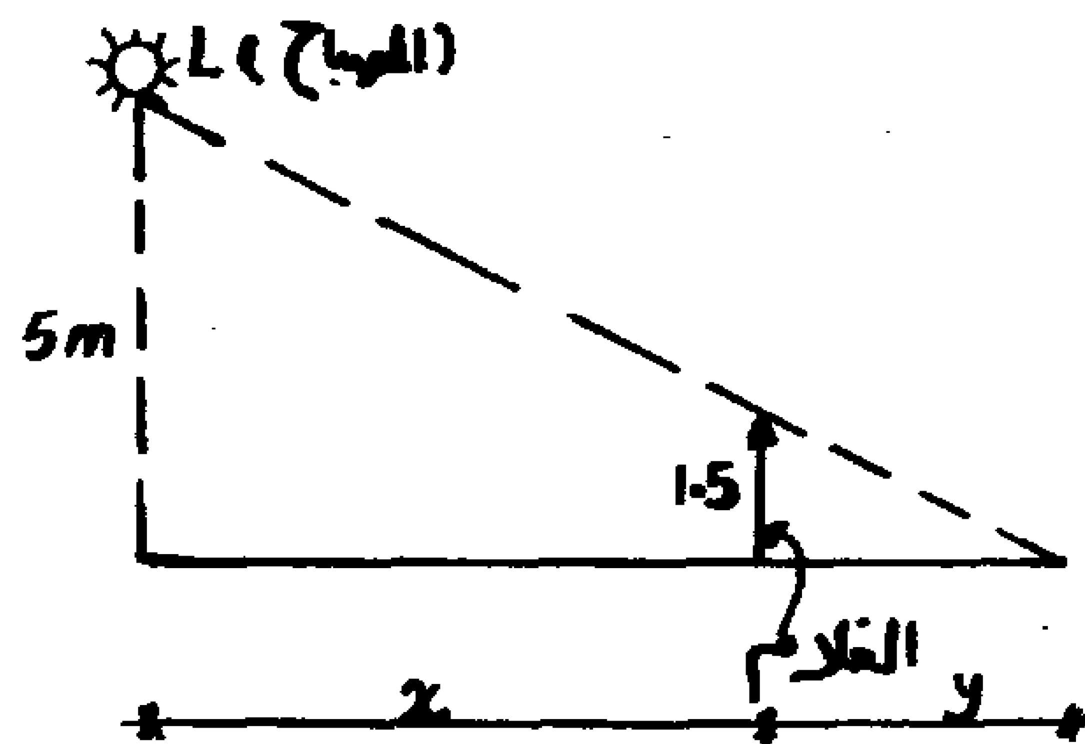
$$\therefore \frac{dh}{dt} = \left(\frac{30}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \times \frac{1}{3}\, t^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{30}{\pi\, t^2}} = \sqrt[3]{\frac{30}{27\pi\, t^2}} = \sqrt[3]{\frac{10}{9\pi\, t^2}}$$

وهو معدل ارتفاع الماء فى الوعاء المخروطى عند أى لحظة t .

(١١) يبتعد غلام طوله $1.5\,m$ من مصباح مُعلق على ارتفاع $5\,m$ احسب معدل تغير طول ظل الغلام ، إذا كان يبتعد بمعدل $56\,m$ لكل دقيقة .

الحـــــل :-

أنظر الرسم شكل (٩-٧) .



شكل (٩-٧)

نفترض x هى المسافة بين الغلام وأسفل المصباح تماماً

ونفترض y هى طول ظل الغلام على الأرض

ومـن الشكل :-

$$\frac{y}{y+x} = \frac{1.5}{5}$$

$$\therefore 5\ y = 1.5\ y + 1.5\ x$$

$$\therefore 3.5\ y = 1.5\ x$$

$$\therefore y = \frac{1.5}{3.5}\ x$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة للزمن :

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{1.5}{3.5}\ \frac{dx}{dt} = \frac{3}{7}\ \frac{dx}{dt}$$

، $\because$ $\frac{dx}{dt}$ تساوى 56 = معدل ابتعاد الغلام

معدل تغير طول الظل $\frac{dy}{dt}$,

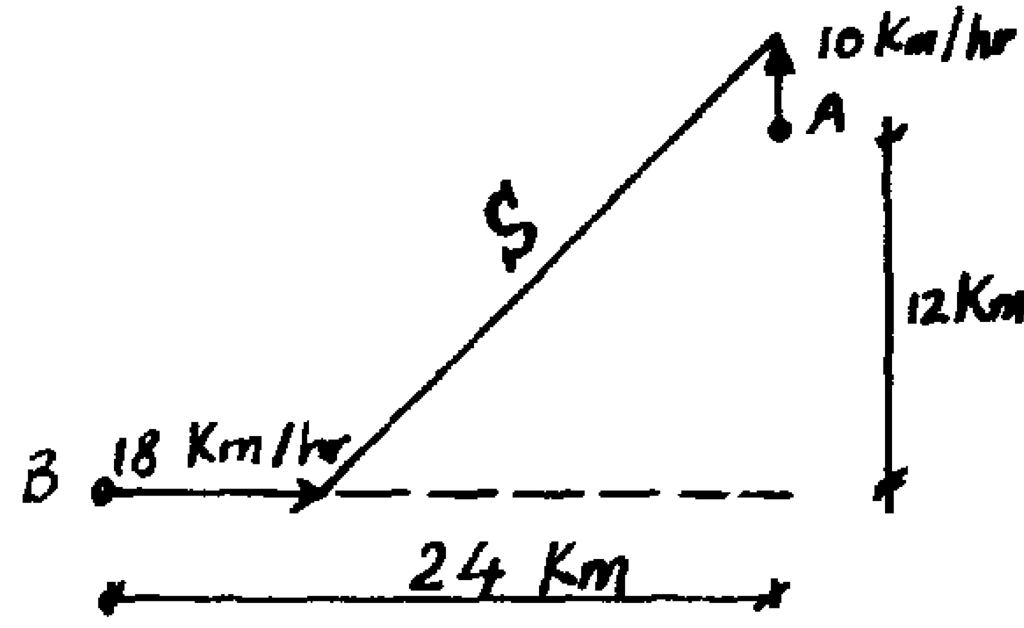
$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{3}{7} \times 56 = 24\ \ m/\min$$

(١٢) سفينتان A , B تُبحر السفينة A إلى الشمال بسرعة $10\ km/hr$ بينما السفينة B والتى تقع إلى جنوب A بمقدار $12\ km$ وإلى غربها بمقدار $24\ km$ ، تبحر إلى الشرق بسرعة $18\ km/hr$

فما هو معدل تغير المسافة بين السفينتين ، وكم تتحرك السفينة B قبل أن تبدأ المسافة بينهما فى التناقص .

الحـــــــل :-

انظر الرسم شكل (٩-٨) .



شكل (٩-٨)

نفترض أن S هى المسافة بين السفينتين بعد تحركهما لمدة t ساعة من موضع البداية .

وعندما $t = 0$ فإن المسافة النسبية بينهما تكون S_0 وتساوى :-

$$S_0 = \sqrt{\overline{24}^2 + \overline{12}^2} = \sqrt{720} = 26.83\ km$$

وبعد فترة زمنية t فإن السفينة B تكون على بعد $(24 - 18\,t)$ من نقطة 0

بينما تكون السفينة A على بُعد $(12 + 10\,t)$ من 0

وبــذلك تكون المسافة الجديدة :-

$$S = \sqrt{(24 - 18\,t)^2 + (12 + 10t)^2}$$

$$= \sqrt{720 - 624\,t + 424\,t^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1 \times (-624 + 848t)}{2\sqrt{720 - 624t + 424t^2}}$$ ،

$$= \frac{-312 + 424\,t}{\sqrt{720 - 624t + 424t^2}}$$

وعند موضع البداية عندما تكون $t = 0$ فإن :-

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-312 + 424 \times 0}{\sqrt{720 - 624 \times 0 + 424 \times 0}} = \frac{-312}{26.83} = -11.63$$

ولما كانت إشارة $\frac{ds}{dt}$ سالبة ، لذلك فإن المســافة بـين الســفينتين تتنــاقص ويقتربــان مــن بعضهما بمعدل $11.63\ km/h$ عند موضع البداية .

وتتوقف المسافة بين السفينتين عن التناقص عندما $\frac{ds}{dt}=0$ والتى تعنى :-

$$\frac{ds}{dt}=\frac{-312+424\,t}{\sqrt{720-624+424\,t^2}}=0$$

$$i.e\ \ -312+424\,t=0$$

وبحل المعادلة لإيجاد قيمة t التى عندها تكون المسافة النسبية ثابتة ثم تبدأ فى الزيادة .

$$\therefore t=\frac{312}{424}=0.736\quad hour$$

وبتعبير آخر فإنه بعد $0.736\ h$ من تحركهما من نقطة البداية تبدأ المسافة بينهما فى الزيادة ، حيث تتحرك السفينة B مسافة قدرها :-

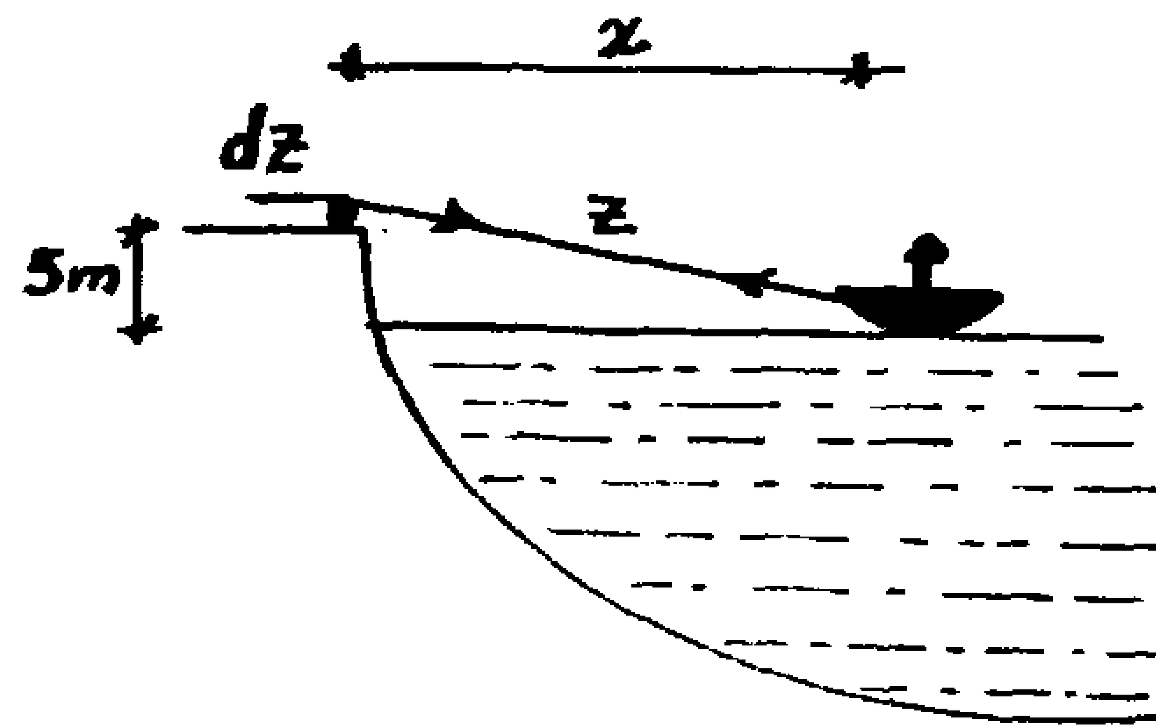
$$0.736\times18=13.25\ km$$

قبل أن تبدأ المسافة فى التزايد .

(١٣) قارب يتم سحبه إلى رصيف الميناء الذى يرتفع 5 أمتار فوق سطح الماء فإذا كان سحب القارب بالحبل يتم بمعدل $2\ m/\sec$. فما هى السرعة التى يقترب بها القارب من قاعدة رصيف الميناء عندما يكون طول الحبل $13\ m$ مع إهمال الارتخاء فى الحبل .

الحـــل :-

أنظر الرسم شكل (٩-٩) .



شكل (٩-٩)

لدينا :

$$\frac{dz}{dt} = 2\ m/\sec$$

$$, Z = 13 \quad mt$$

والمطلوب إيجاد $\frac{dx}{dt}$

وعند أى لحظة t يكون :-

$$5^2 + x^2 = z^2$$

وبالتفاضل بالنسبة للزمن

$$\therefore 0 + 2x\frac{dx}{dt} = 2z\frac{dz}{dt} \qquad \text{........ (١)}$$

وعندما تكون $z = 13\ mt$ فإن x :

$$x = \sqrt{(13)^2 - (5)^2}$$

$$= \sqrt{169 - 25} = 12 \qquad \text{........ (٢)}$$

وبالتعويض عن قيمة $z = 13$ ، x من المعادلة (٢) تساوى 12 فى المعادلة (١)

$$\therefore 2 \times 12\frac{dx}{dt} = 2 \times 13 \times 2$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{52}{24} = 2.17\ \ m/\sec$$

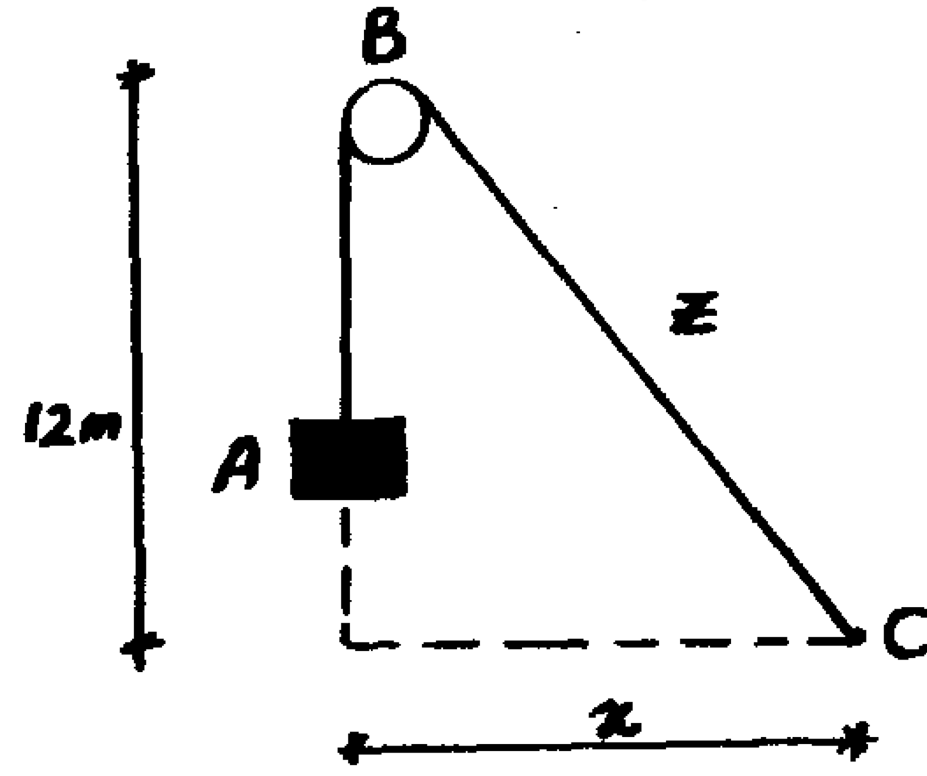
أى أن القارب يقترب من قاعدة الرصيف بمعدل $2.17\ m/\sec$

(١٤) يقوم رجل برفع وعاء من الأسمنت إلى أحد البنايات على ارتفاع $12\ m$ من مستوى يده بواسطة حبل يمر على بكرة فوق سقف البناية .

فإذا كانت يده على ارتفاع ثابت من مستوى الأرض وكان يتحرك بعيداً عن الوعاء بمعدل $1.5\ m/\sec$ ، فما هى سرعة ارتفاع وعاء الأسمنت عندما يكون على بعد $8\ m$ من الوعاء .

الحـــــل :-

أنظر الرسم شكل (٩-١٠) .



شكل (٩-١٠)

الوعاء عند A

مستوى يد الرجل عند C

سقف البناية عند B ومركب عندها بكرة وعلى ارتفاع $12\ m$

والحبل ABC يمر فوق البكرة B

والمطلوب حساب $\frac{dz}{dt}$ (وهى تعادل تماماً سرعة ارتفاع وعاء الأسمنت)

وذلك عندما $\frac{dx}{dt} = 1.5$, $x = 8m$

ومن المثلث القائم الزاوية فى A (BAC) :-

$$x^2 + (12)^2 = z^2$$

$$\therefore z^2 = x^2 + 144$$

$$\therefore z = \sqrt{x^2 + 144} = \left(x^2 + 144\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2}\left(x^2 + 144\right)^{-\frac{1}{2}} \times 2x \times \frac{dx}{dt}$$

وبوضع $\frac{dx}{dt} = 1.5$, $x = 8$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2}(64 + 144)^{-\frac{1}{2}} \times 2 \times 8 \times 1.5$$

$$= 12(208)^{-\frac{1}{2}} = \frac{12}{\sqrt{208}} = \frac{12}{14.422} = 0.832 \ \ m/\sec$$

وذلك عندما يكون الرجل على بعد 8 أمتار من وعاء الأسمنت .

(١٥) بالون كروى يتم نفخه بحيث يزداد نصف قطره بمعدل $5 \ cm/\sec$ فاوجد معدل الزيادة فى مساحة سطح وحجم البالون عندما يصبح نصف قطر البالون $20 \ cm$.

الحـــل :-

S = مساحة سطح الكرة = $4\pi \ r^2$

V = حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi \ r^3$

والمطلوب هو حساب $\frac{dv}{dt}$, $\frac{ds}{dt}$ عندما تكون $r = 20$

وحيث أنه معلوم لدينا $\frac{dr}{dt} = 5 \ cm/\sec$ فإنه يمكن الحصول على المطلوب

بإجراء التفاضل بالنسبة للزمن ووضع $\frac{dr}{dt} = 5$, $r = 20$

$$\because \ S = 4\pi \ r^2$$

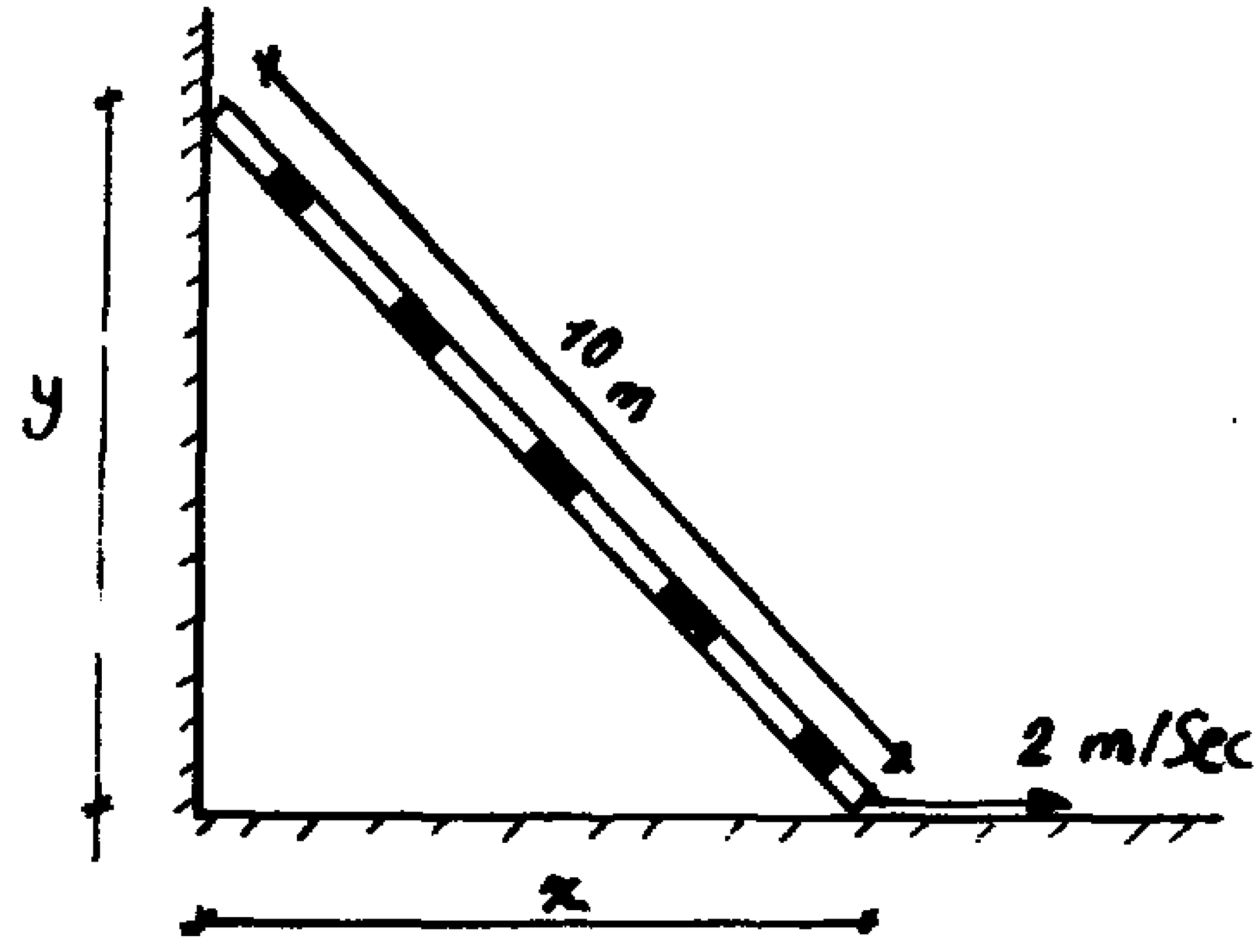
$$\therefore \frac{ds}{dt} = 8\pi \ r\frac{dr}{dt} = 8\,\pi \ . (20)\ (5) = 800\,\pi \quad cm^2/\sec$$

$$, \because V = \frac{4}{3}\,\pi \ r^3$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = 4\,\pi \ r^2 \ \frac{dr}{dt} = 4\,\pi \ (400)\ (5) = 8000\pi \ \ cm^3/\sec$$

(١٦) يستند سلم على حائط رأسى ، طول السلم = $10 \ m$ ، فإذا تحركت نهاية السلم على الأرض بعيداً عن الحائط بمعدل $2 \ m/\sec$ ، فاحسب السرعة التى تنزلق بها قمة السلم على الحائط الرأسى عندما تكون قاعدة السلم على بعد $6 \ m$ من الحائط

الحـــل : – انظر الرسم شكل (٩ – ١١) .



شكل (٩ - ١١)

بالرجوع للشكل :

$$x^2 + y^2 = 100$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة للزمن t

$$\therefore 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{-x}{y}\frac{dx}{dt}$$

وعندما تكون $x = 6\ m$: -

$$\therefore y = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8\ \ m\ .$$

وحيث أن $\frac{dx}{dt} = 2\ m/\sec$: -

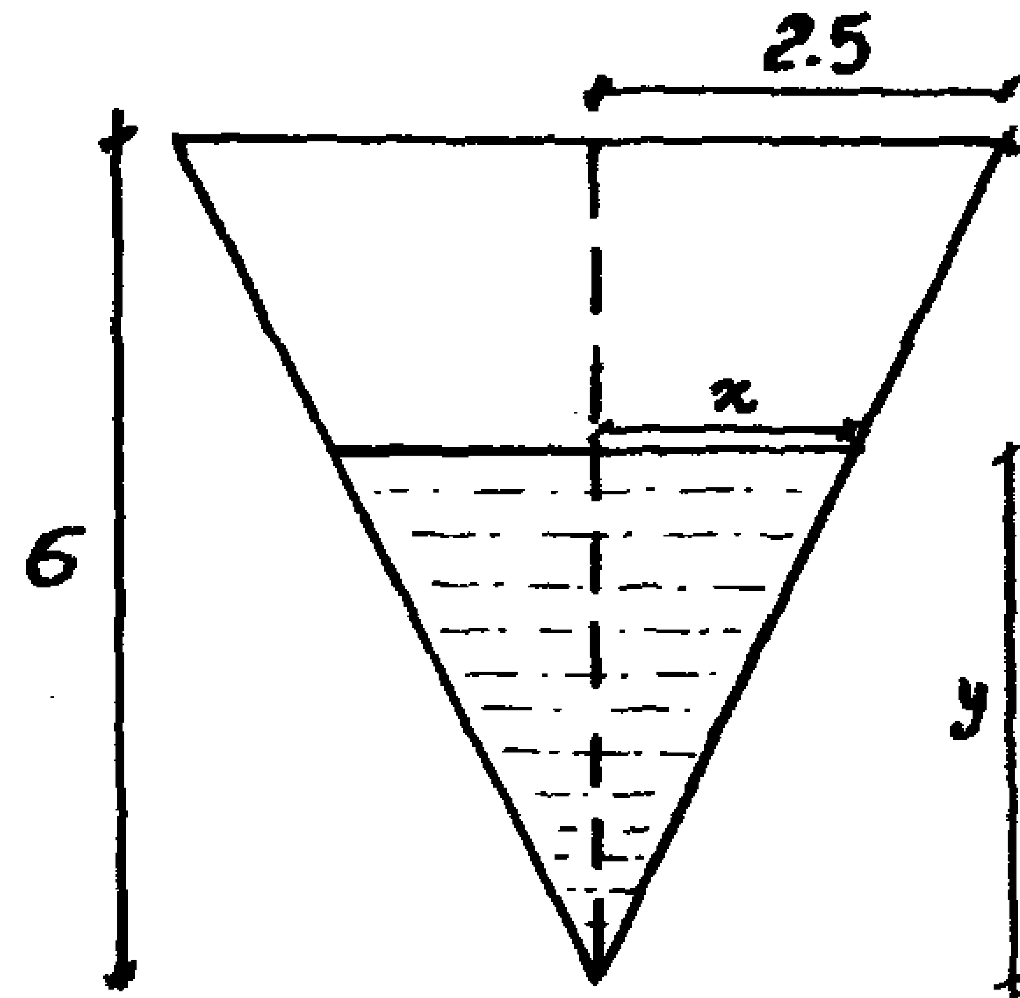
$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} = \frac{-6}{8} \times 2 = -1.5\ \ m/\sec.$$

وتعنى الإشارة السالبة أن قمة السلم تهبط لأسفل .

(١٧) : - يوضح شكل (٩ - ١٢) مقطع طولى ماراً بمحور خزان مخروطى الشكل ارتفاعه الكلى = $6\ m$ ونصف قطر القاعدة العلوية = $2.5\ m$ وينساب الماء للخزان بمعدل $150\ lit/m$.

فاحسب معدل ارتفاع سطح الماء فى الخزان عندما يكون ارتفاع الماء به $1.5\ m$

الحـــل : -



شكل (٩ - ١٢)

نعتبر عمق الماء فى الخزان (ارتفاع الماء) $= y$

، نعتبر نصف قطر سطح الماء $= x$

، نعتبر حجم الماء فى الخزان بعد فترة زمنية $t =$ V

ومن تشابه المثلثات بالشكل .

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{2.5}{6}$$

$$\therefore x = \frac{2.5}{6} y$$

$$\therefore V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2.5}{6} y\right)^2 - y = \frac{2.5\pi}{108} y^3 \ .m^3$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة للزمن t ووضع $\frac{dV}{dt} = 0.15\ m^3 / \min$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{7.5\pi}{108} y^2 \ \frac{dy}{dt}$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{0.15 \times 108}{7.5\pi \ y^2}$$

وعندما تكون $y = 1.5\ m$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{0.15 \times 108}{7.5 \times \pi \times (1.5)^2} = \frac{16.2}{23.56 \times 2.25} = 0.305\ m / \min$$

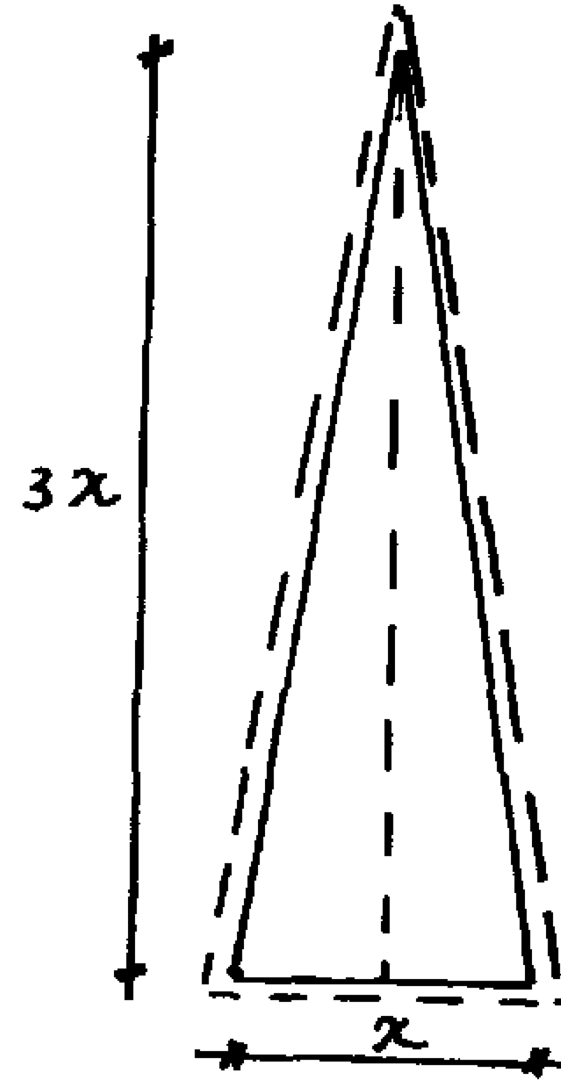
أى أن الماء يرتفع بمعدل $30.5\ cm$ لكل دقيقة تحت نفس الظروف بالمسألة .

(١٨) صفيحة معدنية على شكل مثلث متساوى الساقين ، وارتفاع المثلث يساوى ثلاثة أضعاف طول القاعدة فإذا كانت الصفيحة تتمدد بتأثير حرارة التسخين مما يؤدى لزيادة طول القاعدة بمعدل يبلغ $0.05\ cm / \sec.$

فاوجد معدل التغير في مساحة الصفيحة عندما يكون طول القاعدة $= 16\ cm$

وكذلك معدل التغير فى طول كل من ساقى الصفيحة المثلثة .

الحـــل : – انظر الرسم شكل (٩ – ١٣) .



شكل (٩– ١٣)

نعتبر طول قاعدة الصفيحة $= x\ cm$

وأن ارتفاعها $= 3x\ cm$

وأن مساحتها A :– $A = \frac{x}{2} . 3x\ cm^2$

وأن طول ضلعها : – $y\ \ cm$

$$, \frac{dx}{dt} = 0.05\ cm / \sec.$$

والمطلوب أولا هو إيجاد $\frac{dA}{dt}$ عندما تكون $x = 16\ cm$

$\because \quad A=\frac{x}{2}.3x=\frac{3}{2}x^2$

$\therefore \frac{dA}{dt}=3x\frac{dx}{dt}=3\times\frac{16}{2}\times 0.05=1.2\ cm^2/\sec.$

ولإيجاد المطلوب ثانياً وهو : $\frac{dy}{dt}$ ، من هندسة الشكل

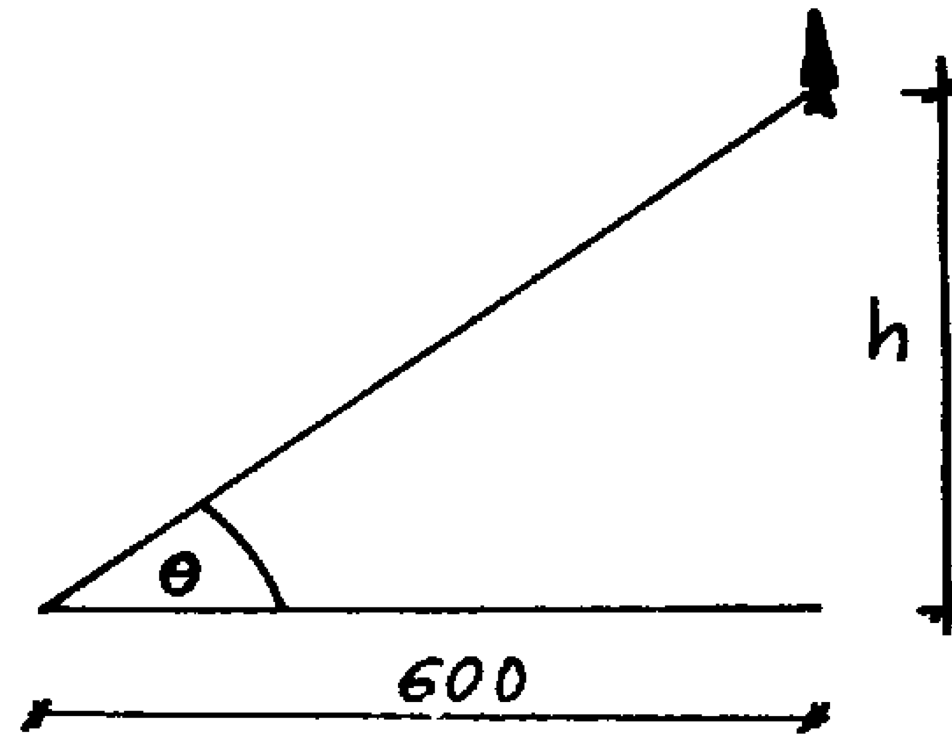
$y^2 \ =(3x)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=9.25\,x^2$

$\therefore y \ =x\sqrt{9.25}$

$\therefore \frac{dy}{dt}=\sqrt{9.25}\ \frac{dx}{dt}\ =\sqrt{9.25}\times.0.05=0.152\quad cm/\sec.$

(١٩) ينطلق صاروخ رأسياً لأعلى من فوق منصة إطلاق تبعد $600\ ft$ عن نقطة مراقبة . فإذا كانت زاوية الارتفاع للصاروخ من نقطة الملاحظة تتغير بمعدل $0.5\ rad./\sec.$ ، فما هى سرعة الصاروخ الرأسية فى اللحظة التى تكون فيها زاوية الارتفاع = $45°$

الحـــــل :- انظر الرسم شكل (٩-١٤) .



شكل (٩-١٤)

نعتبر أن ارتفاع الصاروخ بعد فترة زمنية قدرها t هو h وأن زاوية الارتفاع حينئذ هى θ .

ومن الشكل :-

$$\therefore \frac{h}{600} = \tan\theta \quad or \quad h = 600\tan\theta$$

وبالتفاضل بالنسبة للزمن t :-

$$\therefore \frac{dh}{dt} = 600\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} \quad , \quad \left[\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x\right]$$

وذلك عند أى لحظة t حيث $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

$$\because \frac{d\theta}{dt} = 0.5\ rad./\sec$$

∴ سرعة الصاروخ :-

$$\frac{dh}{dt} = 600\sec^2\theta \times \frac{1}{2} = 300\sec^2\theta$$

وفى اللحظة التى تكون فيها $\theta = \frac{\pi}{4}$ فإن سرعة الصاروخ $\frac{dh}{dt}$:-

$$\frac{dh}{dt} = 300\left(\sqrt{2}\right)^2 = 600\ ft/\sec. \quad \left[\sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} = \frac{1}{\cos\pi/4} = \sqrt{2}\right]$$

ويمكن حل هذه المسألة بمعرفة تفاضل الدوال المثلثية العكسية

حيث أن θ هى الزاوية التى ظلها $\frac{h}{600}$

$$\therefore \theta = arc\tan\frac{h}{600} = \tan^{-1}\frac{h}{600}$$

$$\text{،}\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}$$

$$,\ \frac{d\theta}{dh} = \frac{1}{600}\left[\frac{1}{1+\frac{h^2}{(600)^2}}\right] \quad , \quad \left[\frac{d}{dx}arc\tan x = \frac{1}{1+x^2}\right]$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{600+\frac{h^2}{(600)}} \times \frac{dh}{dt}$$

$$\therefore \frac{dh}{dt} = \left[600 + \frac{h^2}{(600)}\right]\frac{d\theta}{dt}$$

وعندما $\theta = \frac{\pi}{4} \quad , \quad h = 600$

$$\therefore \left[\frac{dh}{dt}\right]_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \left[600 + \frac{(600)^2}{(600)}\right] \times \frac{1}{2} = 600 \ ft/\text{sec.}$$

(٢٠) إذا كانت تكلفة بيع x "من سلعة ما" تعطى بالعلاقة :-

$$c = 500 + x + \frac{1}{x}$$

وعند بيع السلعة رقم 50 ، لوحظ أن معدل البيع هو 20 سلعة في الساعة . فما هو معدل تغير تكلفة البيع عند هذه اللحظة .

الحـــــل :- معدل المبيعات هو التغير فى عدد السلع (x) بالنسبة للزمن

أى :- $\frac{dx}{dt}$ ولدينا $\frac{dx}{dt} = 20$

والمطلوب هو إيجاد معدل تغير التكلفة مع الوقت أى $\frac{dc}{dt}$ فى اللحظة التى يكون فيها $x = 50$

$$, \because c = 500 + x + \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{dc}{dt} = \frac{d}{dt}(500) + \frac{d}{dt}(x) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= 0 + \frac{dx}{dt} + \left(\frac{-1}{x^2}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{dx}{dt} - \frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{dx}{dt}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

وبوضع $x = 50 \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 20$

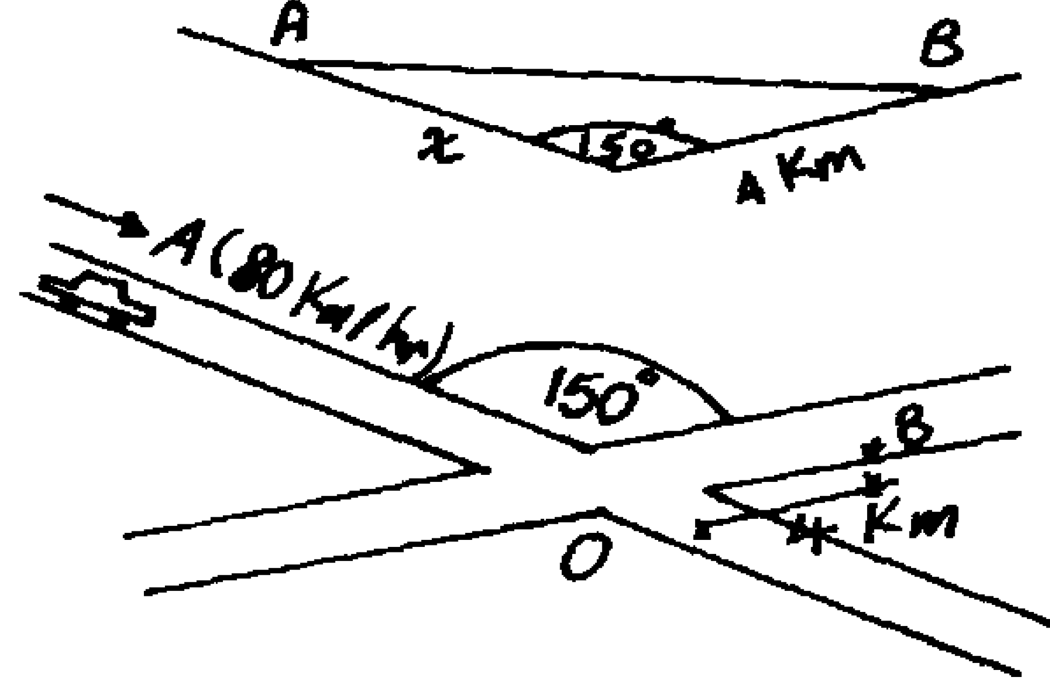
$$\therefore \frac{dc}{dt} = 20\left(1 - \frac{1}{(50)^2}\right) = 20(1 - 0.0004)$$

$$= 20 \times 0.9996 = 19.992$$ وحدة نقدية .

(٢١) طريقان يتلاقيان في رأس زاوية قياسها $150°$ ، تسير سيارة على أحد الطريقين بسرعة قدرها $80 \ km/h$ في اتجاه نقطة التقاطع O ، أوجد معدل اقتراب

السيارة A من النقطة B على الطريق الآخر والتى تبعد عن O بمقدار $4\ km$ ، وذلك فى اللحظة التى تكون فيها السيارة على بعد يعادل $3\ km$ من O .

الحـــــل :- انظر الرسم شكل (٩-١٥) .



شكل (٩-١٥)

نفترض أن بعد السيارة A عن O = $x\ km$

، نفترض أن بعد السيارة A عن B = $y\ km$

، لدينا : $\frac{dx}{dt} = 80\ km/h$

ومن المثلث المنفرج الزاوية AOB فى O :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 - 2AO\,.\,BO\ \cos 150^\circ$$

$$\therefore y^2 = x^2 + 16 - 2 \times x \times 4 \times (-0.866)$$

$$= 16 + x^2 + 6.928\ x$$

$$= x^2 + 6.928\ x + 16$$

$$\therefore 2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 6.928\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{dx}{dt}(2x + 6.928) \qquad \text{.......... (١)}$$

والمسافة y عندما تكون $x = 3$

$$y^2 = 9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \times (-0.866)$$

$$= 25 + 20.784 = 45.784$$

$\therefore y = 6.766\ km$

وبالتعويض فى المعادلة (١)

$$\therefore 2 \times 6.766 \times \frac{dy}{dt} = 80\ (2 \times 3 + 6.928) = 12.928 \times 80$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = 76.43\ \ km/hr$$

وهو معدل اقتراب السيارة A من النقطة B عند اللحظة المذكورة .

(٢٢) اسطوانة دائرية قائمة يبلغ ارتفاعها $\frac{12}{5}$ من نصف قطر قاعدتها . احسب معدل تغير الحجم عندما يكون القطر = [$20\ cm$] ، إذا عُلم أن الارتفاع يتغير بمعدل $0.02\ cm/\sec.$

الحل :- نفرض أن نصف قطر قاعدة الاسطوانة = $r\ cm$

، نفرض أن ارتفاع الاسطوانة = $h\ cm$

، نفرض أن حجم الاسطوانة = $V\ cm^3$

، ∵ ارتفاع الاسطوانة يعادل $\frac{12}{5}$ مرة نصف قطر القاعدة .

$$\therefore h = \frac{12}{5} r \qquad \frac{dh}{dt} = 0.02\ \ cm/\sec$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{12}{5}\frac{dr}{dt}$$

$$\therefore\ 0.02 = \frac{12}{5}\frac{dr}{dt}$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{0.1}{12} = \frac{1}{120}\ \ cm/\sec.$$

$$، \because V = \pi r^2 h \qquad , \qquad h = \frac{12}{5} r$$

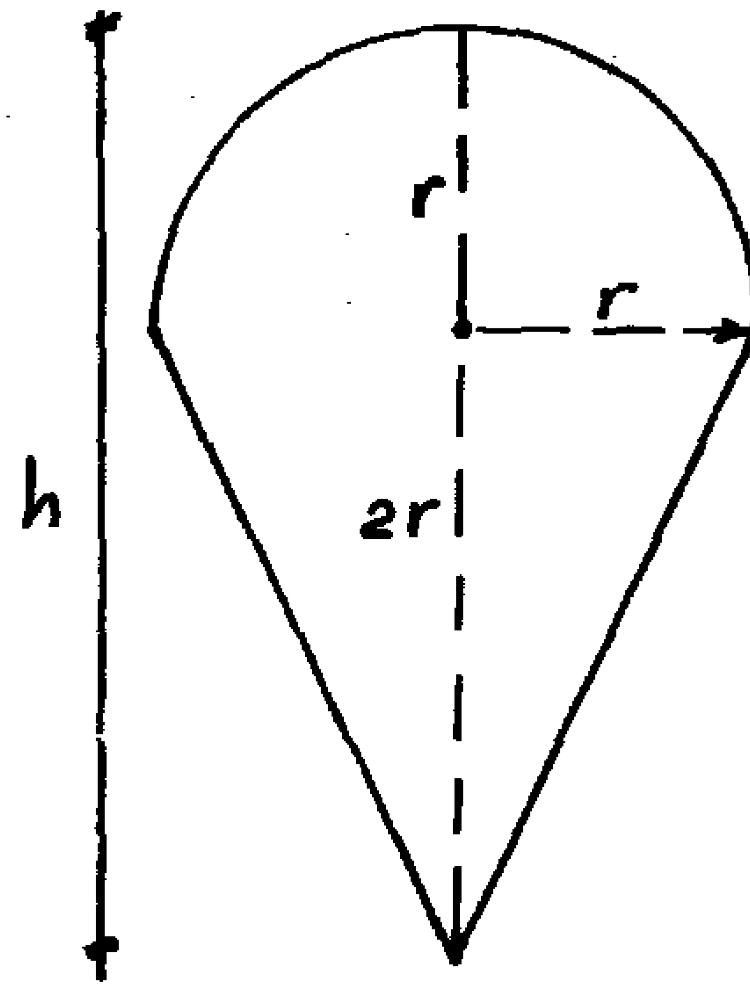
$$\therefore\ \ V = \pi r^2 \times \frac{12}{5} r = \frac{12}{5}\pi r^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{12}{5}\pi \times 3r^2 \frac{dr}{dt} = 7.2\ \pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

وبالتعويض عن $r = 20$ ، $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{120}$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = 7.2\pi \times 400 \times \frac{1}{120} = 75.4\ cm^3 / \sec.$$

(٢٣) بالون على شكل مخروط دائرى قائم تعلوه نصف كرة كما هو موضح بالشكل (٩-١٦) .



شكل (٩-١٦)

فإذا كان قطر القاعدة يعادل ارتفاع المخروط ، احسب معدل تغير الحجم بالنسبة للارتفاع عند نفخ البالون :-

الحـــل :- واضح من الشكل أن $h = 3r$

والمطلوب هو إيجاد $\frac{dV}{dh}$

وعلى ذلك فإنه يلزم أن نوجد علاقة بين h , V

، حجم المخروط = $\frac{1}{3}\pi\ r^2 \times 2r$

، حجم نصف الكرة = $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi\ r^3$

$, r = \frac{h}{3}$

والحجم الكلى = V :- $\frac{2}{3}\pi\ r^3 + \frac{2}{3}\pi\ r^3 = \frac{4}{3}\pi\ r^3$

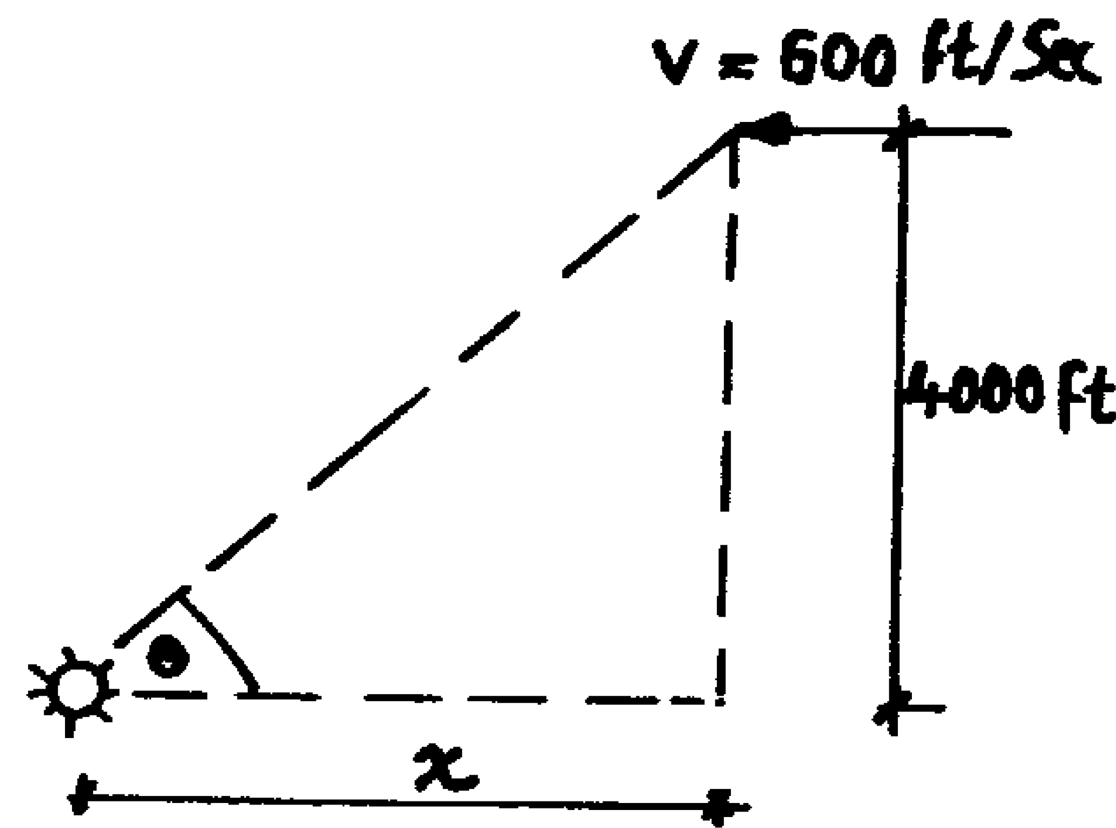
$$\therefore V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{3}\right)^3 = \frac{4\pi}{81}h^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dh} = \frac{4\pi}{27}h^2$$

وبذلك فإن V تتغير بمقدار $\frac{4\pi h^2}{27}$ مرة من h

(٢٤) طائرة على ارتفاع $4000\ ft$ فى اتجاه الغرب بسرعة تعادل $500\ ft/\sec$ فإذا كانت الطائرة يتم تعقبها بضوء كشاف قوى على الأرض وبفرض ثبات الضوء على الطائرة أثناء تحركها ، أوجد معدل التغير فى زاوية ضوء الكشاف عندما تكون الطائرة على بعد أفقى من مصدر الضوء وفى اتجاه الشرق منه بمقدار $2000\ ft.$.

الحـــــل :- انظر الرسم شكل (٩-١٧) .



شكل (٩-١٧)

نعتبر المسافة الأفقية بين الكشاف والطائرة عند لحظة زمنية قدرها t sec من البداية = x ، نعتبر θ بالتقدير الدائرى هى زاوية ارتفاع الطائرة بالنسبة للكشاف عند اللحظة t .

ولدينا $\frac{dx}{dt} = -500$ وتعنى الإشارة السالبة أن x تتناقص مع الزمن والمطلوب هو إيجاد $\frac{d\theta}{dt}$ عندما $x = 2000$

$$\tan\theta = \frac{4000}{x} \quad \text{،} \qquad \dots\dots\dots\dots (١)$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة إلى t فى طرفى المعادلة (١)

$$\therefore \sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{4000}{x^2}\frac{dx}{dt}$$ .... (٢)

[ملحوظة :- $\frac{d}{d\theta}\tan\theta = \sec^2\theta$]

وبوضع $\frac{dx}{dt} = -500$ وبالقسمة على $\sec^2\theta$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{2000000}{x^2 \sec^2\theta}$$

وعندما $x = 2000$ ، [فإن $\tan\theta = \frac{4000}{2000} = 2$]

وبالتعويض بهذه القيم فى المعادلة (٢)

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{2000000}{4000000 \sec^2\theta}$$

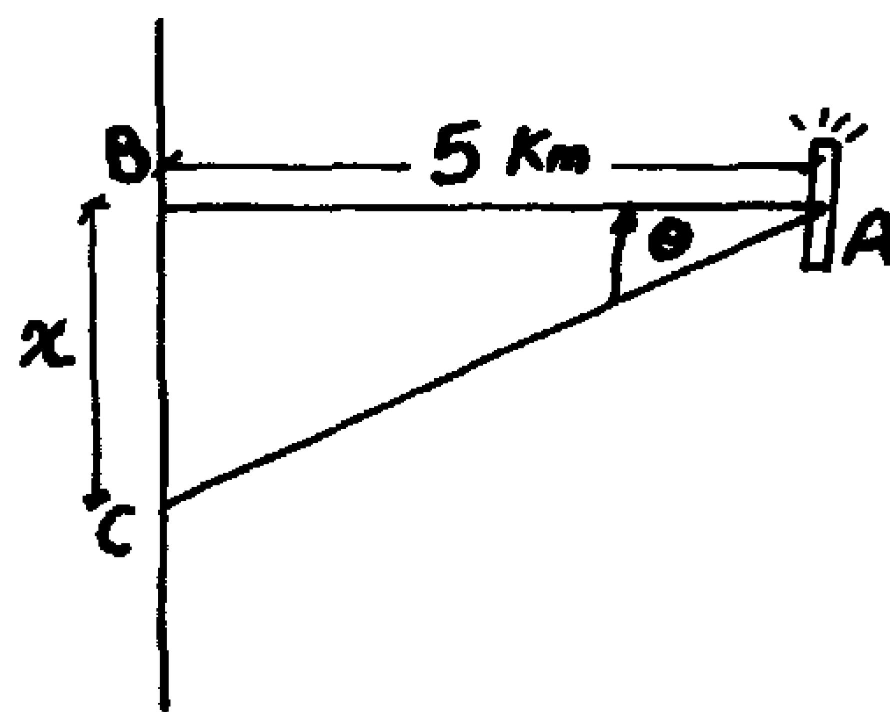
$$\because \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + (2)^2 = 5$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{2000000}{4000000 \times 5} = \frac{1}{10}$$

وعليه فإن فى اللحظة المذكورة فإن زاوية الشعاع تزيد بمعدل $\frac{1}{10}$ *rad.*/sec. .

(٢٥) شعاع كشاف يدور على بعد $5\ km$ من شاطئ فإذا كان الكشاف يدور بسرعة زاوية ثابتة ، فما مقدار السرعة التى يدور بها شعاع الضوء ، إذا كانت حزمة الضوء على الشاطئ تتحرك على امتداده بمعدل $15\ km/\text{min.}$ ، عندما تكون الزاوية التى يصنعها الشعاع $60°$ مع الشاطئ .

الحـــل :- انظر الرسم شكل (٩-١٨) .



شكل (٩-١٨)

من الشكل نجد أن :-

$$\tan\theta = \frac{x}{5}$$

$$\therefore x = 5\tan\theta$$ ....(١)

وبإجراء التفاضل بالنسبة للزمن لطرفى المعادلة (١)

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 5\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$,\because \frac{dx}{dt} = 15\ km/\min.$$

وعندما تكون زاوية $ACB = 60^\circ$ فإن $\theta = 30^\circ$

وبالتعويض بهذه القيم

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 15 = 5\sec^2\frac{d\theta}{dt}$$

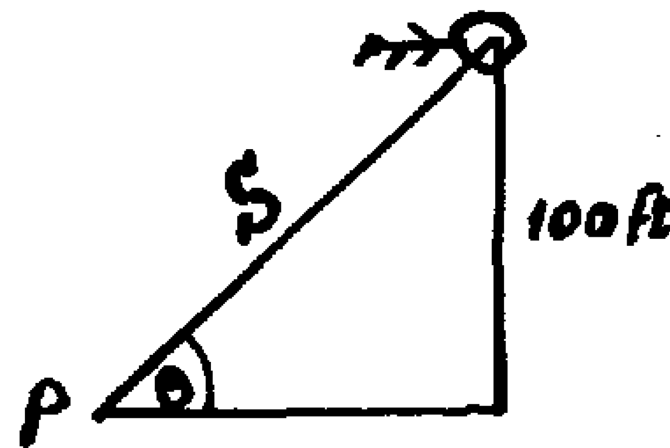
$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{\sec^2\theta} = 3\cos^2\theta = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{9}{4}\ radians/\min. \qquad , \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ معدل دوران ضوء الكشاف = $\frac{9}{4}\ rad./\min.$

(٢٦) يلعب غلام بطائرة ورقية ، ترتفع بمقدار $100\ ft$ عن الأرض فإذا كان الخيط يُسحب من يده بمعدل $10\ ft/\sec.$ نتيجة دفع الريح للطائرة أفقياً على نفس الارتفاع . فما هو معدل تغير زاوية الارتفاع للطائرة عندما تكون الزاوية 30° .

الحـــل :- انظر الرسم شكل (٩-١٩) .



شكل (٩-١٩)

نعتبر θ هى زاوية ارتفاع الطائرة .

$$, \frac{ds}{dt} = 10 \ ft/\sec.$$

$$, \sin\theta = \frac{100}{s}$$

والمطلوب إيجاد $\frac{d\theta}{dt}$ عندما تكون $\theta = 30°$ أى تساوى :- $\frac{\pi}{6}\ rad$

$$\therefore \sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \ \frac{100}{S} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \ S = 200 \ ft$$

$$, \sin\theta = \frac{100}{S} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

وباجراء التفاضل بالنسبة للزمن للمعادلة الأخيرة (١)

$$\therefore \cos\theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{100}{S^2}\ \frac{ds}{dt}$$

وبالتعويض عن قيمة $S = 200$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{ds}{dt} = 10$

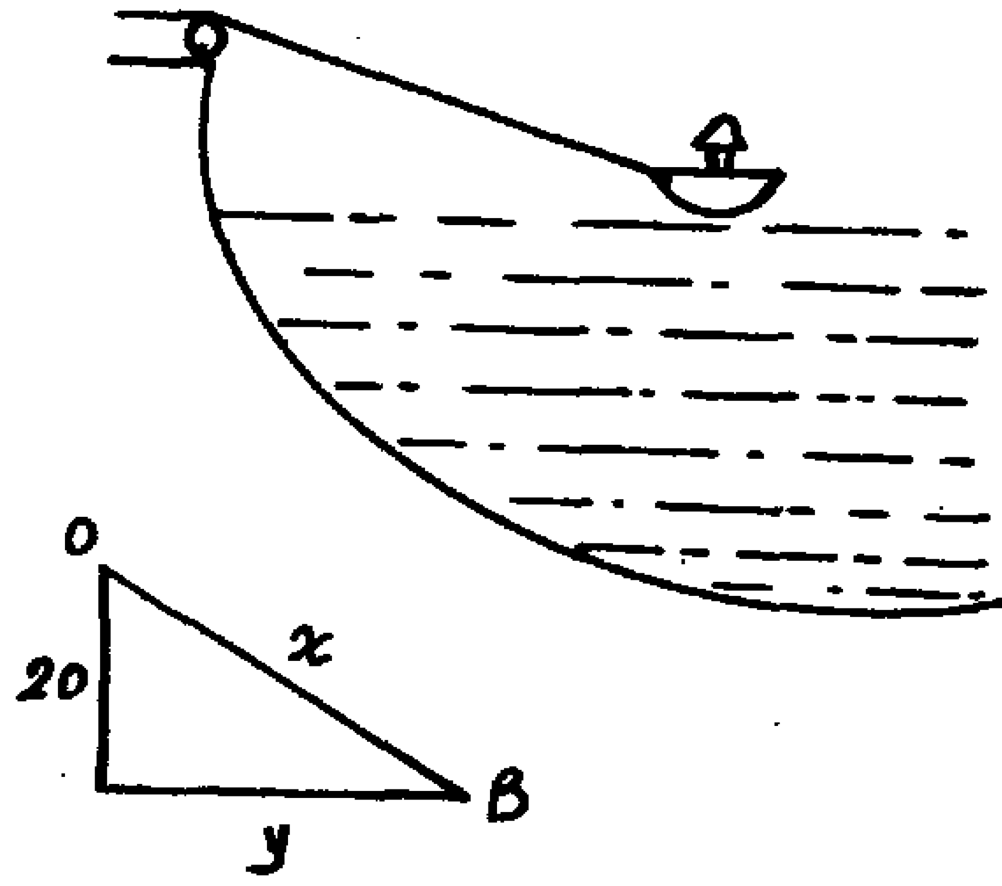
$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{d\theta}{dt} = -\frac{100}{200 \times 200} \times 10$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{20\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{60} \ rad./\sec$$

(٢٧) قارب مشدود بحبل مربوط على الرصيف بالميناء ، فإذا تم سحب القارب بسرعة تعادل $10 \ ft/\sec.$ وكان مستوى الرصيف يرتفع عن سطح الماء بمقدار $20 \ ft$.

احسب السرعة التى يقترب بها القارب من الرصيف إذا كان طول الحبل وقتئذ $= 36 \ ft$.

الحـــــل :- أنظر الرسم شكل (٩-٢٠) .



شكل (٩-٢٠)

OB هو طول الحبل x والقارب عند B

$\frac{dx}{dt} = 10\ ft/\sec$ ،

والمطلوب إيجاد $\frac{dy}{dt}$ عندما $x = 36$

ومن الشكل

$$\overline{20}^2 + y^2 = x^2$$

$$\therefore y = \sqrt{x^2 - 400}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{+1 \times 2x}{2 \times \sqrt{x^2 - 400}} \times \frac{dx}{dt} = \frac{x\,\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2 - 400}},$$

وبوضع $\frac{dx}{dt} = -10$ [علامة − تعنى اقتراب B من O والعكس عند بعدها] وكذلك بوضع $x = 36$

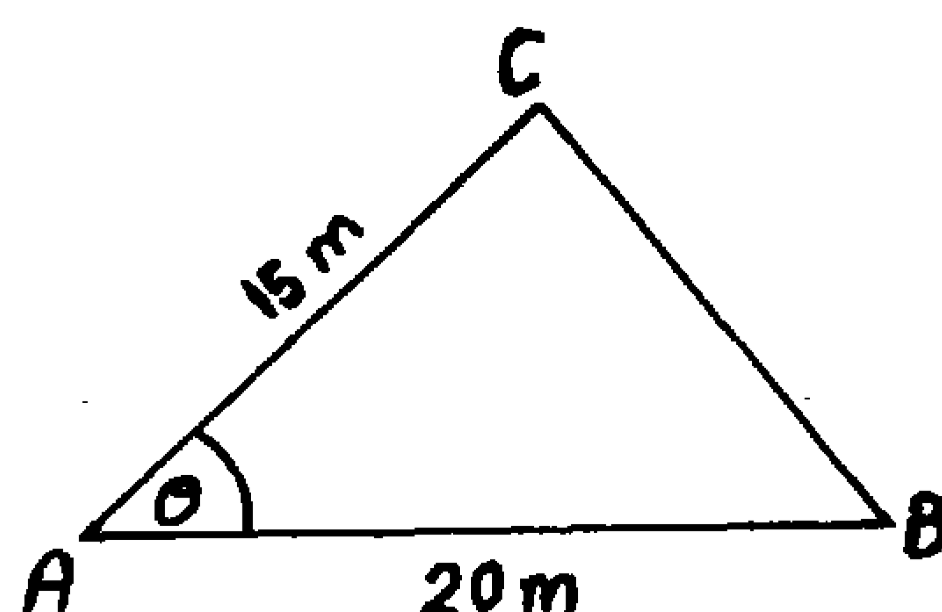
$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{36 \times -10}{\sqrt{36^2 - 400}} = -\frac{360}{\sqrt{896}} = -\frac{8 \times 45}{8\sqrt{14}} = -\frac{45}{\sqrt{14}}$$

أى أنه عندما يكون طول الحبل $36\ ft$ وتحت نفس الظروف فإن القارب يقترب بمعدل $\frac{45}{\sqrt{14}}\ ft/\sec$ من الرصيف (علامة − تعنى الاقتراب من الرصيف)

(٢٨) ضلعى مثلث يحصران بينهما زاوية قدرها θ وطولاهما $15, 20\ m$ ينفرجان للخارج بحيث تزداد الزاوية فيما بينهما ، احسب معدل الزيادة فى طول الضلع

الثالث ، فى اللحظة التى تكون فيها الزاوية بين الضلعين $\theta = 60°$ عِلماً بـأن الزاويـة θ تزداد بمعدل يبلغ $2° / sec.$.

الحـــــــل :- أنظر الرسم شكل (٩-٢١) .



شكل (٩-٢١)

من الشكل ، الضلعان هما $AC = 15\ m$, $AB = 20\ m$ والزاوية بينهما $= \theta$

$\frac{d\theta}{dt} = 2° = \frac{1}{90} . \pi$ ،

والمطلوب هو إيجاد معدل تغير طول الضلع BC أى $\frac{d}{dt}(BC)$ عندما تكون $\theta = 60°$

$$, \overline{BC}^2 = \overline{15}^2 + \overline{20}^2 - 2 \times (15) \times (20) \cos \theta$$

$$\therefore \overline{BC} = 225 + 400 - 600 \cos \theta$$

$$\therefore BC = (625 - 600 \cos \theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(BC) = \frac{1 \times (-600 \times -\sin \theta) \frac{d\theta}{dt}}{2\,(625 - 600 \cos \theta)^{\frac{1}{2}}}$$

وبوضع $\theta = 60$, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{90}$

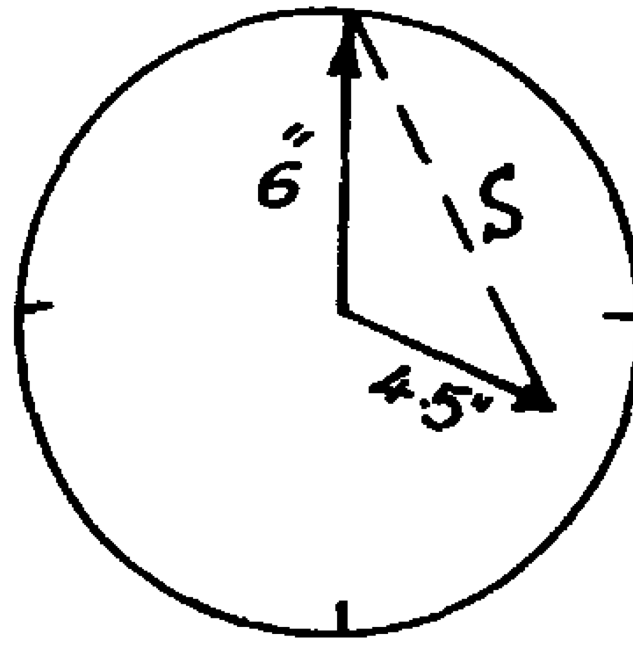
$$\therefore \frac{d}{dt} \overline{BC} = \frac{(600 \sin \theta)\left(\frac{\pi}{90}\right)}{2\left(625 - 600 \times \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{600 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{90}}{2 \times (325)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{150\sqrt{3} \times \pi}{90\sqrt{325}} = \frac{5}{3}\sqrt{3}\,\pi \times \frac{1}{5\sqrt{13}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3\sqrt{13}} \quad m/\text{sec.}$$

(٢٩) عقربى ساعة حائط طولاهما بالبوصات [4.5",6"] فما مقدار السرعة التى يقترب بها نهاية عقرب الدقائق من نهاية عقرب الساعات عند تمام الساعة الرابعة .

الحـــــل :- انظر الرسم شكل (٩-٢٢) .



شكل (٩-٢٢)

نفترض أن S هى المسافة بين عقربى الساعة ، θ هى الزاوية بينهما وباستخدام قانون جيب التمام

$$\therefore S^2 = (6)^2 + (4.5)^2 - 2(6)(4.5) \times \cos\theta$$

$$= 36 + 20.25 - 54\cos\theta$$

$$\therefore 2S\frac{dS}{dt} = 0 - 54 \times \left(-\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = \frac{27\sin\theta}{S}\,\frac{d\theta}{dt}$$

وعند الساعة الرابعة تكون الزاوية بين مؤشرى الساعة :

$$4\left(\frac{360}{12}\right) = 120^0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore S^2 = 36 + 20.25 - 54\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 56.25 - 54 \times -0.5$$
$$= 56.25 + 27 = 83.25$$

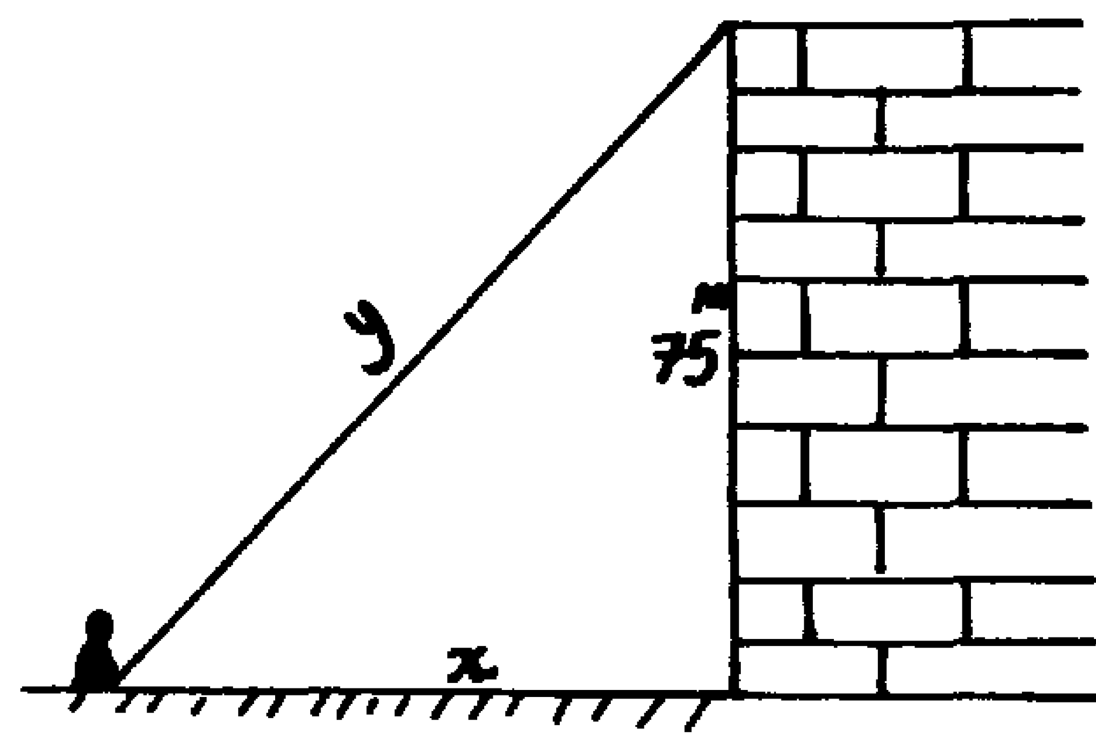
وفى خلال ساعة كاملة يدور عقرب الدقائق دورة كاملة قدرها 2π بينما يتحرك عقرب الساعات فى ساعة واحدة ما مقداره $\frac{2\pi}{12}$ أى $\frac{\pi}{6} rad.$ وبالتالى فإنه يمكننا استنتاج أن θ تتناقص بمعدل يساوى $\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ أى $\frac{11\pi}{6}\ rad.$ كل ساعة .

$$,\frac{d\theta}{dt} = -\frac{11}{6}\left[\frac{rad}{hr}\right] \times \frac{1}{60}\left[\frac{hr.}{\min}\right] = \frac{-11\pi}{360} rad./\min$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \frac{27\sin\theta}{S}\left[\frac{d\theta}{dt}\right]$$
$$= \frac{27 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{83.25}} \times \left[\frac{-11\pi}{360}\right]$$
$$= \frac{27 \times 0.866}{9.124} \times -\frac{34.557}{360}$$
$$\cong 0.246\ inch/\min$$

(٣٠) يقترب رجل من بناية ارتفاعها $75m$، بسرعة تبلغ $3km/hr.$ فكم تبلغ سرعة اقتراب الرجل من قمة البناية عندما يكون على بعد $100m$ منها .

الحـــــل :- انظر الرسم شكل (٩-٢٣) .



شكل (٩-٢٣)

نعتبر x هى المسافة الأفقية التى تُبعد بين الرجل والبناية عند الزمن t بينما المسـافة بـين الرجل وقمة البناية y ؛

$$y^2 = x^2 + (75)^2$$

بالتفاضل بالنسبة للزمن :

$$\therefore 2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\frac{dx}{dt} \qquad \text{..........} \quad (1)$$

وفى اللحظة التى تكون فيها $x = 100$

$$\therefore y = \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{100^2 + 75^2} = \sqrt{16625} = 125\,mt$$

وحيث أن $\frac{dx}{dt}$ تساوى $-3km/hr$ أى :

$$-\frac{3 \times 1000}{60} mt/\min = -50\,mt/\min$$

وبالتعويض فى المعادلة (1)

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\frac{dx}{dt} = -\frac{100}{125} \times 50 = -\frac{5000}{125} = -40\,mt/\min$$

والإشارة السالبة تعنى أن y تتناقص .

Exercise 9

على الأبواب السابع والثامن والتاسع

(١) ارسم المنحنى $y = x^2 - 2x$ ثـم اوجد $\frac{dy}{dx}$ وحدد قيمتها عندما تكون قيم x :- $(-1,0,2,3)$، وتأكد من صحة هذا من الرسم وما هى قيمة x التى يكون عندهـــا نقطة تحول وهل هى عظمى أم صغرى وما هى إشارة $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(٢) أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة : $y = (x+1)(x-2)^2$ وقيم x المناظرة .

(٣) ارسم منحنى الدالة $y = 3x - x^2$ ثـم اوجـــد $\frac{dy}{dx}$ وحـــدد قيمتهـا عند قيم x التالية: $(0,1,2,3)$ وما هى قيمة x التـى تنعـدم عندهـا $\frac{dy}{dx}$ ومـا هـى إشـارة $\frac{d^2y}{dx^2}$ لنفس قيمة x ، وهل الدالة عظمى أم صغرى عند هذه القيمة .

(٤) اوجد القيم العظمى والصغرى لـ : $4x + \frac{1}{x}$.

(٥) اوجد القيم العظمى والصغرى للدوال التالية وحدد قيم x المناظرة : -

a) $x^3 - 12x$

b) $2 - 9x + 6x^2 - x^3$

c) $x^3 - 6x^2 + 12$

d) $2x^3 - 9x^2 + 12x$

e) $4x^3 + 9x^2 - 12x + 13$

(٦) اوجد نقط التحول للدوال التالية ، ثم حدد هل الدالة عظمـى أم صغـرى فـى كـل حالة : -

a) $4x^2 - 2x$

b) $2x^2 + x - 1$

c) $x - 1.5x^2$

d) $x^2 + 4x + 2$

(٧) اوجد نقط النهاية العظمى والصغرى ونقط الانقلاب لكل من المنحنيات التالية :-

$a)\ y = x^3 + 6x^2 - 15x + 20$

$b)\ y = 2x^3 - 15x^2 - 36x + 18$

$c)\ y = 3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x + 17$

$d)\ y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

$e)\ y = 2x - x^2$

$f)\ y = 5 - x - x^2$

(٨) كيف يمكنك تقسيم العدد 10 إلى عددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن؟

(٩) أوجد الإحداثى السينى لنقط النهاية العظمى والصغرى والانقلاب للمنحنى :

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$$

(١٠) أوجد قيمة x عند نقطة الانقلاب للمنحنى :

$$y = 3x^3 - 4x + 5$$

(١١) أوجد القيم العظمى والصغرى لمنحنى الدالة : -

$$y = x^3 - x$$

وأوجد كذلك ميل المنحنى عند نقطة الانقلاب

(١٢) أوجد العددان اللذان مجموعهما 12 وبحيث : -

A) حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

B) مجموع مربعيهما أقل ما يمكن .

C) حاصل ضرب أحدهما فى مربع الآخر أكبر ما يمكن .

D) حاصل ضرب أحدهما فى مكعب الآخر أكبر ما يمكن .

(١٣) ما هو أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة ، نصف قطرها $12\ cm$

(١٤) وضعت اسطوانة دائرية قائمة فى كرة نصف قطرها a فاحسب ارتفاعها إذا أريد أن تكون مساحة سطحها الجانبى أقل ما يمكن .

(١٥) قطعة أرض عبارة عن مستطيل ونصف دائرة ينطبق قطرها على أحد الأضلاع فإذا كانت المساحة الكلية ثابتة ومعلومة ، فاوجد نسبة قطر نصف الدائرة إلى بقية أبعاد

المستطيل بحيث يكون طول السياج اللازم لإحاطتها أقل ما يمكن ، "بطريقة الدالة الضمنية" .

(١٦) قطعة أرض على شكل مستطيل ينقصه نصفى دائرتين منطبق قطر كل منهما على أحد الأجناب المتقابلة فى المستطيل ،

فاوجد نسبة قطر نصف الدائرة إلى بقية أبعاد المستطيل بحيث تكون المساحة ثابتة والمحيط أقل ما يمكن .

(استخدم تفاضل الدالة الضمنية)

(١٧) مثلث متساوى الساقين مرسوم حول دائرة نصف قطرها a فاحسب ارتفاع المثلث بحيث تكون المساحة أصغر ما يمكن .

(١٨) شبه منحرف قاعدته الصغرى وكل من ضلعيه الجانبيين $=10cm$ ، عين قاعدته الكبرى بحيث تكون مساحة شبه المنحرف أكبر ما يمكن .

(١٩) رسم مستطيل مساحته أكبر ما يمكن داخل نصف دائرة ، نصف قطرها R ، احسب أبعاد المستطيل .

(٢٠) يراد تصنيع علبة اسطوانية مُغلقة بحيث يكون حجمها 16π بوصه مكعبة ، فأوجد نصف قطرها وارتفاعها . بحيث تكون المساحة الكلية لسطحها أقل ما يمكن .

(٢١) تبعد سفينة بمقدار $40\ km$ شمال سفينة أخرى فى تمام الساعة 12 ، فإذا كانت تتحرك إلى الجنوب بسرعة $15km/h$ ، بينما تتحرك الأخرى بسرعة $10km/h$ إلى الشرق فما هو معدل تغير المسافة بينهما عند الساعة الواحدة .

(٢٢) يتناقص طول ضلع مكعب بمعدل $0.6cm/\min$ ؛ احسب معدل تناقص مساحة سطح المكعب عندما يكون طوله $12cm$.

(٢٣) تتحرك طائرة ورقية أفقيا على ارتفاع $150m$ فإذا كانت سرعة الطائرة $10m/\sec.$ ، فاحسب معدل ترك الخيط من يد الطفل الذى يلعب بها عندما تكون الطائرة على بعد $250m$ منه .

(٢٤) رسم فى نصف دائره شبه منحرف قاعدته هـى قطر نصف الدائرة عين زاوية قاعدة شبه المنحرف بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن .

(٢٥) صفيحة معدنية مستطيلة الشكل ، أبعادها $24\times30cm$ ، قطعت من أركانها الأربعة بأربعة مربعات متساوية ثم ثنيت حوافها لأعلى لتشكل صندوقاً بدون غطاء ، احسب طول ضلع المربع بحيث يصبح حجم الصندوق أكبر ما يمكن .

(٢٦) يُراد تصنيع خزان مغلق اسطوانى سعته $40m^3$ بحيث يتكلف أقل كمية ممكنه من المواد فما هى نسبة ارتفاعه إلى قطر القاعدة .

(٢٧) ما هو العدد الذى إذا أضيف إلى مقلوبه يعطى أقل مجموع ؟

(٢٨) مستطيل محيطه ثابت فاوجد أبعاده بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن .

(٢٩) صهريج اسطوانى الشكل مفتوح من الأعلى ، له حجم معلوم فاوجد العلاقة بين نصف قطره وارتفاعه بحيث يكون مجموع مساحته الجانبية بالإضافة لمساحة القاع أقل ما يمكن .

(٣٠) بكم مرة يكون حجم الكرة أكبر من حجم أكبر اسطوانة مرسومة فى هذه الكرة.

(٣١) طائرتان تطيران فى مستوى واحد كل منهما فى خط مستقيم بينهما زاوية قدرها $120°$ فإذا كانت سرعتاهما واحدة $V\,km/h$ وفى لحظة ما ، تصل إحداهما إلى نقطة تقاطع خطى الحركة وتكون الطائرة الأُخرى حينئذ على بعد $x\,km$ منها فبعد كم من الزمن يكون البعد بين الطائرتين أقل ما يمكن واحسب هذا البعد .

(٣٢) خزان له قاعدة مربعه وعلى شكل متوازى مستطيلات يُراد أن يكون حجمه $= 8m^3$ فاحسب طول ضلع قاعدته وارتفاعه بحيث يتكلف أقل كمية ممكنة من الخامات .

(٣٣) مربع يزداد طول أضلاعه بمعدل $0.5\ cm/\sec.$ فاحسب معدل زيادة المساحة عندما يبلغ طول كل ضلع من أضلاعه $10\ cm.$.

(٣٤) ينساب الماء إلى وعاء على شكل نصف كرة ، نصف قطرها $6m$ بمعدل $4m^3/\text{min}$ فاحسب معدل ارتفاع سطح الماء عندما يكون عمق الماء مساوياً $4m$.

(٣٥) يسير قطار على طريق مرتفع بمقدار $20\,ft$ عن الأرض متجهاً للشرق بسرعة $22\,ft/\text{sec.}$ وتمر سيارة أسفل طريق القطار مباشرة فى اتجاه الجنوب بسرعة $33\,ft/\text{sec.}$ ، فما هى سرعة تباعدهما بعد 1sec.

(٣٦) طريقان يلتقيان عند نقطة A ويصنعان بينهما زاوية مقدارها $60°$ وتحركت سيارة على أحد الطريقين بسرعة قدرها $40\,km/h$ مبتعدة عن النقطة A .

وبعد عشرة دقائق ، تحركت سيارة أخرى من A وسارت بمعدل $60\,km/h$ على الطريق الآخر .

احسب سرعة تباعد السيارتين بعد 20 دقيقة من تحرك السيارة السريعة (الثانية) .

(٣٧) مصباح إنارة أحد الشوراع على ارتفاع $20\,ft$ من الأرض ، يسير رجل طوله $6\,ft$ متحركاً بعيداً عنه بمعدل $4\,ft/\text{sec.}$ ، فما هى السرعة التى تتحرك بها قمة ظل الرجل على الأرض وما معدل استطالة الظل عندما يكون على بعد 30 قدماً من المصباح .

(٣٨) مخروط دائرى قائم رأسه منكس للأسفل ، يُصب فيه الماء بمعدل $10\,ft^3/\text{min}$ فإذا كان نصف قطر قاعدة المخروط يساوى ارتفاع المخروط ، احسب معدل ارتفاع الماء فى المخروط عندما يكون ارتفاع الماء مساوياً 6 أقدام .

(٣٩) ممران عرضهما $2.4m$،$1.6m$ يتقاطعان فى زاوية قائمة ، عين أكبر طول للسلم الذى يمكن نقله (أفقياً) من ممر لآخر .

(٤٠) عين أبعاد حمام سباحة مفتوح وذو قاع مربع ، حجمه $32m^3$ بحيث يستهلك أقل كمية ممكنه من البلاط لتبليط قاعه وجدرانه .

(٤١) خزان مياه مستطيل الشكل ومفتوح وله قاعدة مربعه فإذا كان الخزان يتسع $108\,ft^3$ من المياه ، فاوجد أبعاد القاعدة بحيث يتكلف أقل كمية ممكنة من الخامات اللازمة لتبطين القاعدة .

(٤٢) مثلث قائم الزاوية طول وتره $8cm$ وزاويته $60°$ ، رسم مستطيل بحيث تكون قاعدته على الوتر ، فما هى أبعاد المستطيل بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن .

(٤٣) النقطتان $A(0,3)$، $B(4,5)$ ، عين على المحور $X'OX$ نقطة C بحيث تكون المسافة $x = AC + CB$ أقل ما يمكن .

(٤٤) مزارع لديه 600 قطعة عمود لغرزها حول الأرض لعمل سياج أو سور فإذا كانت الأرض المراد إحاطتها بسور مستطيلة الشكل ويراد تقسيمها إلى جزئين متساويين بعمل سياج بداخلها يوزاى ضلعين متوازيين من أضلاعها

فاوجد أبعاد قطعة الأرض بحيث تحتوى على أكبر مساحة داخلية .

(٤٥) أوجد نقطة على القطع المكافئ $y^2 = 8x$ بحيث تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(5,0)$.

(٤٦) يبحر رجل فى زورق على بعد $5mile.$ من أقرب نقطة على الشاطئ المقابل له (A) ويريد أن يصل إلى نقطة على الشاطئ تبعد بمقدار $6mile$ عن (A) فى أقل زمن ممكن فإذا كان معدل تجديفه بالزورق $= 2mile/h$ فى حين أنه يستطيع أن يسير على رمال الشاطئ بسرعة قدرها $3mile/h$ فعند أى نقطة على الشاطئ عليه أن يبحر لها ويكمل باقى المسافة سيراً على الأقدام .

(٤٧) يُراد طباعة كتاب بحيث تكون أحبار الطباعة فى مساحة لا تتجاوز 36 بوصة مربعة على أن يترك هامش أعلى وأسفل الصفحة قدره $1\frac{1}{2}$ بوصة ومن الجانبين هامش قدره 1 بوصة فاوجد أبعاد الصفحة لأقل مساحة ممكنة .

(٤٨) قطاع دائرى زاويته α مقطوع من دائرة ، لف هذا القطاع ليتحول إلى مخروط فعند أى قيمة للزاوية α يُصبح حجم المخروط أكبر ما يمكن .

(٤٩) نفق مقطعه مستطيل ينتهى بنصف دائرة فإذا كان محيط المقطع 18 متراً فعند أى نصف قطر للدائرة تكون مساحة المقطع أكبر ما يمكن .

(٥٠) يقع مصدرا ضوء على بعد $30m$ عن بعضهما ، فحدد نقطة على المستقيم الواصل بينهما تكون أقل النقط إضاءة ، علماً بأن نسبة قوتى إضاءة المصدرين هى $27:8$

(٥١) رسم مخروط نصف قطر قاعدته $40cm$ وارتفاعه $60cm$ ، رسمت بداخله اسطوانة حجمها أكبر ما يمكن ، عين هذا الحجم .

(٥٢) مصنع A ، يمر بجواره خط سكة حديد فى خط مستقيم إلى مدينة B فبأية زاوية α على هذا المستقيم يجب مد طريق مُعبد من المصنع لكى يكون نقل البضائع من A إلى B أرخص ما يمكن ، إذا كان نقل الطن لكيلو متر واحد على الطريق المُعبد ، أغلى بمقدار m مرة من نقله بالسكة الحديد .

الباب العاشر

تطبيقات على المشتقة الأولى

تطبيقات هندسية ، وتطبيقات على السرعة والعجلة

١٠ - ١ : - موجز لأساسيات الهندسة التحليلية : -

(١) ميل المستقيم هو ظل الزاوية التى يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

$$m=\tan\theta$$

(٢) ميل المستقيم بدلالة نقطتين عليه إحداثياتهما $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

(٣) يمكن إيجاد ميل المستقيم إذا كانت معادلته فى الصورة : -

$$ax+by+c=0$$

$$\therefore m=-\frac{b}{a}$$

(٤) معادلة المستقيم بدلالة ميله m ونقطة معلوم إحداثياتها (x_1,y_1) تقع عليه : -

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

(٥) معادلة المستقيم بدلالة نقطتين معلومتين واقعتين عليه $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$: -

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

(٦) تكون النقطة واقعة على المستقيم أو المنحنى إذا حققت معادلته .

(٧) للحصول على نقطة تقاطع مستقيمين نحلهما معا أما نقطة أو نقط تقاطع منحنيين فتكون بحل معادلتهما آنياً .

(٨) المقصود بميل منحنى عند نقطة ما هو ميل المماس لهذا المنحنى عند هذه النقطة .

(٩) زاوية تقاطع مستقيم ومنحنى عند نقطة ما هى الزاوية بين المستقيم والمماس للمنحنى عند نقطة التقاطع .

(١٠) زاوية التقاطع بين منحنيين هى الزاوية بين مماسى المنحنيين عند نقطة تقاطعهما .

(١١) المستقيم العمودى على منحنى ما عند نقطة معلومة عليه هو المستقيم الذى يكـون عموديا على مماس المنحنى عند هذه النقطة .

(١٢) إذا تعامد مستقيمان فإن حاصل ضرب ميلهما = -1 .

وقد عرفنا فيما سبق من أبواب أنه إذا كانت $y=f(x)$ فإن المشتقة الأولى لهـذه الدالـة $y^{`}\, or\, f^{`}(x)$ تعطينا ميل المماس لهذا المنحنى عند أى نقطة (x_1 , y_1) تقع عليه .

$$\therefore y^{`}=f^{`}(x)=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x_1 , y_1}=\tan\theta$$

وباستخدام المشتقة الأولى يمكننا وبالرجوع إلى النقاط السابقة ، أن نستخدمها وبسهولة فى إيجاد الميل عند أى نقطة كما يلى : -

(١٣) معادلة المماس للمنحنى $y=f(x)$ عند النقطة (x_1 , y_1) : -

$$y-y_1=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x_1 , y_1}\times(x-x_1)$$

(١٤) معادلة العمودى على المنحنى $y=f(x)$ عند النقطة (x_1 , y_1) : -

$$y-y_1=\frac{-1}{\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x_1 , y_1}}\times(x-x_1)$$

١٠ - ٢ : - أمثلة محلولة على التطبيقات الهندسية للمشتقة الأولى

(١) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة :

$$f(x)=x^3-4x^2+3x$$

عند كل نقط تقاطعه مع محور السينات $X^{`}OX$

الحـــــل : -

عند نقط التقاطع مع محور السينات تكون $y=f(x)=0$

$$,\because f(x)=x^3-4x^2+3x=0$$

$$\therefore x(x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=0 , x=1 , x=3$$

هى نقط التقاطع مع محور السينات .

، ميل المماس عند أى نقطة = $f`(x) = \frac{dy}{dx}$ ،

$$, f`(x) = 3x^2 - 8x + 3$$
$$،[f`(x)]_{x=0} = 3\times0 - 8\times0 + 3 = 3$$
$$،[f`(x)]_{x=1} = 3\times1 - 8\times1 + 3 = -2$$
$$،[f`(x)]_{x=3} = 3\times3^2 - 8\times3 + 3 = 6$$

(٢) أوجد ميل منحنى الدالة : -

$$y = 4x^2 - 8x + 5$$

عند نقط تقاطعه مع المستقيم $y = 1$

الحــــــل : - لإيجاد نقط تقاطع المستقيم مع منحنى الدالة نحل معادلتهما سويا وذلــك بوضع $y = 1$ فى معادلة الدالة .

$$\therefore 1 = 4x^2 - 8x + 5$$
$$\therefore 4x^2 - 8x + 4 = 0$$
$$\therefore x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$\therefore (x-1)^2 = 0$$

∴ هنالك نقطة تقاطع وحيدة عندما $x = 1$ ويمكن معرفة إحداثيها الصادى (y)

بالتعويض بقيمة $x = 1$ فى معادلة المنحنى الأصلى :

$$y = 4\times1^2 - 8\times1 + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$$

∴ نقطة التقاطع هى $(1,1)$ وواضح من معادلة المستقيم القاطع $y = 1$ أنه يمس المنحنــى عند هذه النقطة $(1,1)$.

والميل : $\frac{dy}{dx}$: -

$$\frac{dy}{dx} = 8x - 8$$

∴ ميل المماس عند النقطة $x = 1$

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = 8\times1 - 8 = 0$$

أى أن المماس يوازى محور السينات وهو نفسه المستقيم $y=1$

(٣) إذا كان المماس للمنحنى :

$$y=x(a-x^3)$$

عند نقطة الأصل يصنع زاوية قياسها $45°$ مع الاتجاه الموجب لمحور OX فاحسب قيمة a العددية

الحـــــل : -

$\because y=ax-x^4$

$\therefore \frac{dy}{dx}=a-4x^3=$ ميل المماس

ولما كان ميل المماس $(\tan\theta = \tan 45=1)$

$\therefore a-4x^3 = 1$

وحيث أن المماس يمر بنقطة الأصل حيث $x=0$

$\therefore a - 4\times 0 = 1$

$\therefore a = 1$

وبذلك فإن معادلة المنحنى هى .

$y=x(1-x^3)$

(٤) أوجد نقطة على المنحنى $f(x)$: $f(x)=x^3-27x+60$

يكون عندها المماس موازيا محور السينات .

الحـــــل : -

عندما يوازى المماس محور السينات فإن :

$\frac{dy}{dx}= 0$

$,\frac{dy}{dx}=3x^2-27=0$

$\therefore 3x^2=27 \quad \therefore x^2=9 \quad \therefore x=\pm 3$

وبالتعويض فى $f(x)$ بقيم x

$\therefore f(3)=27-27\times 3+60=6$

$،f(-3)=-27+81+60 =114$

$\therefore$ المماس لهذا المنحنى يكون موازيا محور السينات عند النقطتين .

$(3,6),(-3,114)$

(٥) أوجد معادلة المماس والعمودى للمنحنى $f(x)$: -

$$y = f(x) = x^2 - 3x + 1$$

عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $y = x + 2$

الحـــــل : -

$$y = x + 2 = x^2 - 3x + 1$$
$$\therefore x^2 - 2x - 1 = 0$$
$$\therefore (x-1)^2 = 0 \qquad \therefore x = 1$$

وبالتعويض عن $x = 1$ فى معادلة المنحنى

$$\therefore y = x^2 - 3x + 1$$
$$= 1 - 3\times 1 + 1 = -1$$

∴ نقطة تقاطع المستقيم مع المنحنى هى $(1,-1)$

$$\text{،}\ \frac{dy}{dx} = 2x - 3$$

، معادلة المماس عند $(1,-1)$:

$$y - y_1 = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x_1, y_1} \times (x - x_1)$$
$$\therefore y - (-1) = (2x-3)_{(1,-1)} \times [x - (1)]$$
$$\therefore y + 1 = (2\times 1 - 3)\times(x-1)$$
$$\therefore y + 1 = -1(x-1)$$
$$\therefore y + 1 = -x + 1$$
$$\therefore y = -x \quad i.e \quad -x - y = 0 \qquad \text{..........} (١)$$

وميل هذا المستقيم = $\dfrac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \dfrac{-(-1)}{-1} = -1$

∴ ميل العمودى عليه = $\dfrac{-1}{-1} = +1$

ومعادلة العمودى عليه :

$$y - y_1 = \frac{-1}{\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x_1 y_1}} \times (x - x_1)$$

$$y - 1 = 1 \times (x - 1)$$

$$\therefore y = x$$

(٦) أوجد الآتى بالنسبة للمنحنى $y^2 = 2x$ عن النقطة $x = 1$: −

أ) طول المماس للمنحنى

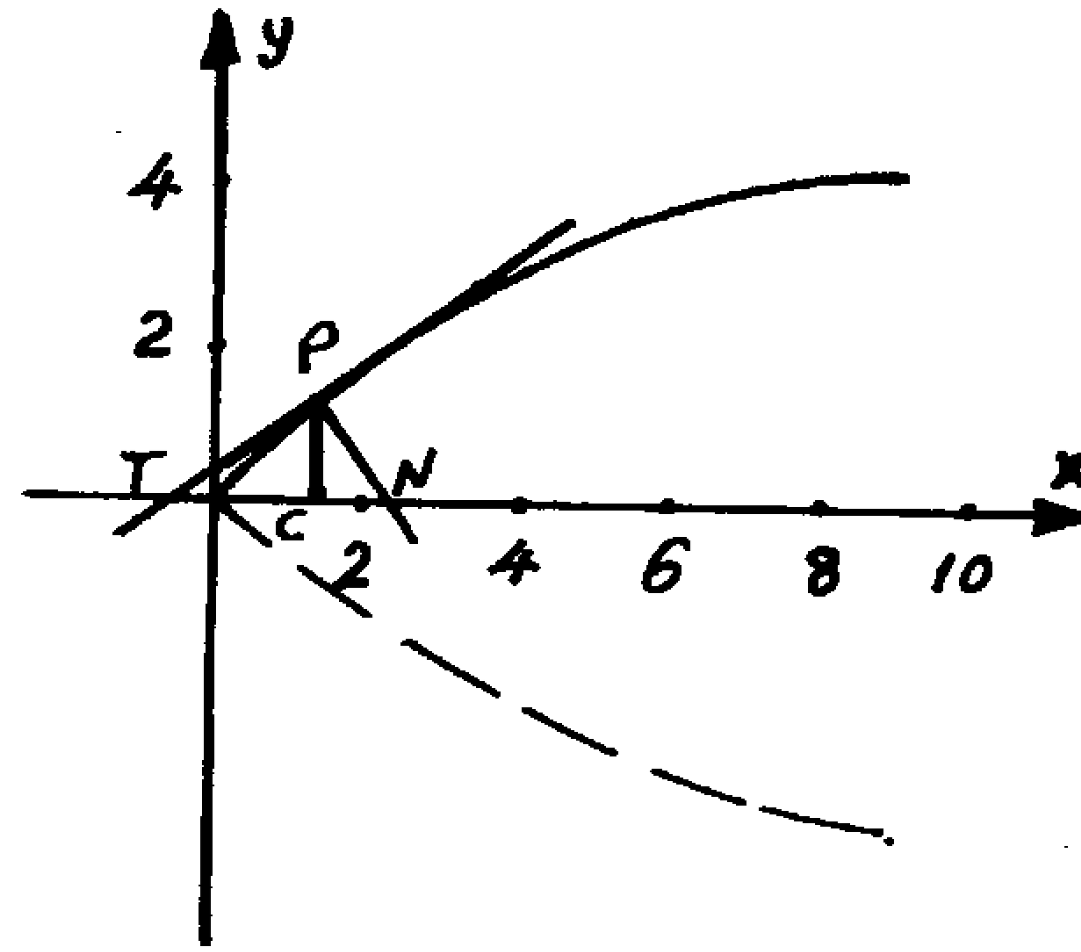
ب) طول العمودى

جـ) طول تحت المماس subtangent

ء) طول تحت العمودى subnormal

الحـــــل : −

انظر الرسم شكل (١٠ − ١) .



شكل (١٠ − ١)

(a) طول المماس TP كما يتضح من الرسم هو المسافة بين نقطة التماس (P) وبـين نقطة تقاطع المماس مع محور ox (T)

ولدينا : طول المماس $= TP = \dfrac{PC}{\sin\theta}$

$$\therefore TP = PC.\text{cosec}\,\theta$$

ولكن $cpc = y_1$

$\therefore TP = y_1 \operatorname{cosec}\theta$

$, \because \operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

$$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{1+\cot^2\theta} = \sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\theta}} = \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$$

$, \because \tan\theta = \frac{dy}{dx} =$ الميل

$$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

$$\therefore TP = y_1 \operatorname{cosec}\theta = y_1 \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

وهى الصيغة العامة لطول المماس .

وبوضع الميل $m = \frac{dy}{dx}$

$$\therefore TP = y_1 \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} \quad \text{.......... (1)}$$

وبذلك فإنه يلزمنا إيجاد m, y_1 ولإيجاد y_1 نعوض فى المعادلة $y^2 = 2x$ بقيمة $x = 1$

$\therefore y_1^2 = 2 \times 1 = 2$

$$\therefore y_1 = \sqrt{2} \quad at\ x = 1 \quad \text{.......... (2)}$$

ولإيجاد m نفاضل الدالة الضمنية الأصلية :

$y^2 = 2x$

$\therefore 2y\frac{dy}{dx} = 2 \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = m = \frac{1}{y}$

وبالتعويض عن $y = \sqrt{2}$ (عند $x = 1$)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} = m \quad \text{.......... (3)}$$

وبالتعويض عن قيمة y_1 ، m من المعادلتين (3) , (2) فى المعادلة (1)

$$\therefore TP = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 2.45$$

(*b*) من الشكل ، طول العمودى = PN وهو المسافة بين نقطة التماس وحتى نقطة تقاطع العمودى مع محور $X\grave{}OX$

PN = طول العمودى $= \frac{PC}{\cos\theta} = PC\sec\theta$ ،

ولكن $PC = y_1$

$$\therefore PN = y_1 \sec \theta .$$

$$\because \sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta}, \tan\theta = \frac{dy}{dx} = m$$

$$\therefore \sec \theta = \sqrt{1+m^2}$$ ،

$$\therefore PN = y_1 \sec \theta = y_1\sqrt{1+m^2}$$

وبالتعويض عن قيم $y_1 = \sqrt{2}$ ، $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore PN = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{3} = 1.732$$

(*c*) ومن الشكل فإن طول ما تحت المماس = TC وهو عبارة عن مسقط المماس TP على المحور $X\grave{}OX$

TC = طول تحت المماس $= \frac{PC}{\tan\theta} = PC \cot \theta$ ،

وحيث أن : $PC = y_1$ ، $\frac{dy}{dx} = \tan \theta = m$ ،

$$\therefore TC = \frac{y_1}{m} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 2$$

(*d*) ومن الشكل فإن طول ما تحت العمودى = CN

$\therefore CN =$ طول ما تحت العمودى

$$= PC \tan \theta \ = y_1 \tan \theta \ = y_1 m$$
$$= \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

(٧) اوجد الزاوية بين نقط تقاطع الدائرتين : -

$x^2 + y^2 - 4x = 1$ .... (A)

$, x^2 + y^2 - 2y = 9$ .... (B)

الحـــــل : - المقصود بزاوية التقاطع بين الدائرتين ، أنها الزاوية بـين المماسـات لكـل من الدائرتين عند نقط التقاطع

$$\because \tan \theta \ = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

حيث : -

ميل المماس للدائرة A عند (x, y) $= m_1$

ميل المماس للدائرة B عند (x, y) $= m_2$,

ولإيجاد نقط تقاطع الدائرتين تحلهما معا آنيا فنحصل على نقاط التقـاطع وهـى $(3,2), (1,-2)$

ولإيجاد ميل المماسات عند هذه النقط فإننا يجب أن نحصل على $\frac{dy}{dx}$ لكل من المنحنيين

وبالنسبة للدائرة الأولى A : -

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{2 - x}{y}\right).$$

، بالنسبة للدائرة الثانية B : -

$$\therefore m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{1 - y}$$

وبالتعويض عن إحداثيات النقطة الأولى $(3,2)$ أى :

$$x = 3, y = 2$$

وهو ميل المماس للمنحنى A عند $(3,2)$. $\therefore m_1 = \frac{2 - 3}{2} = -0.5$

وهو ميل المماس للدائرة B عند $(3,2)$. $, m_2 = \frac{3}{1 - 2} \ = -3$

$$, \because \tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\frac{-1}{2} + 3}{1 + \frac{3}{2}} = 1 \qquad \therefore \theta = 45^\circ$$

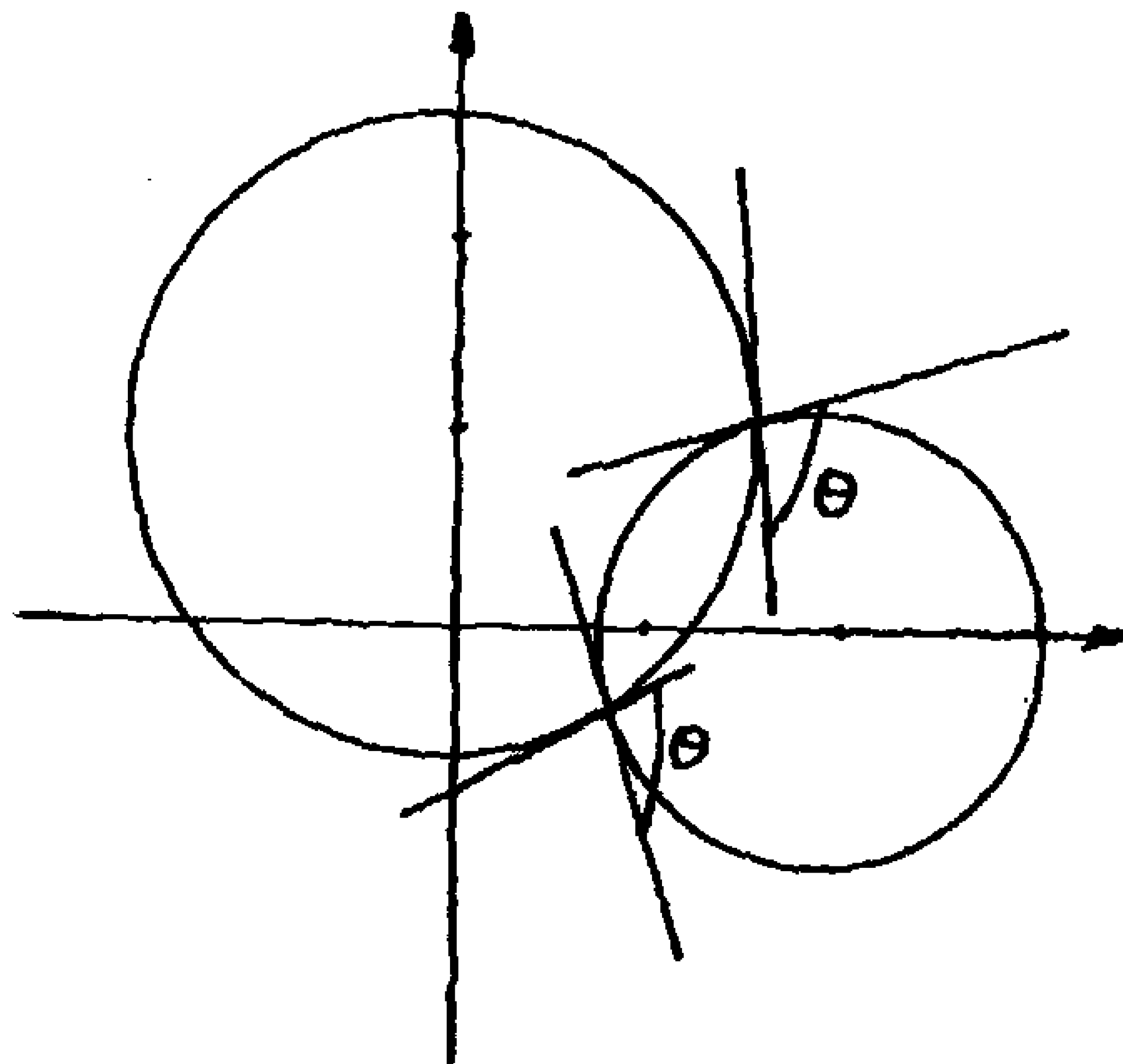
فإذا ما حسبنا زاوية التقاطع عند النقطة $(1,-2)$: -

$$m_1 = \frac{-1}{2} \quad , \quad m_2 = \frac{1}{3}$$

$$, \tan\theta = \frac{\frac{-1}{2} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = -1 \qquad \therefore \theta = 135^\circ = 45^\circ$$

وهى نفس الزاوية السابقة .

انظر الرسم شكل (١٠ - ٢) .



شكل (١٠ - ٢)

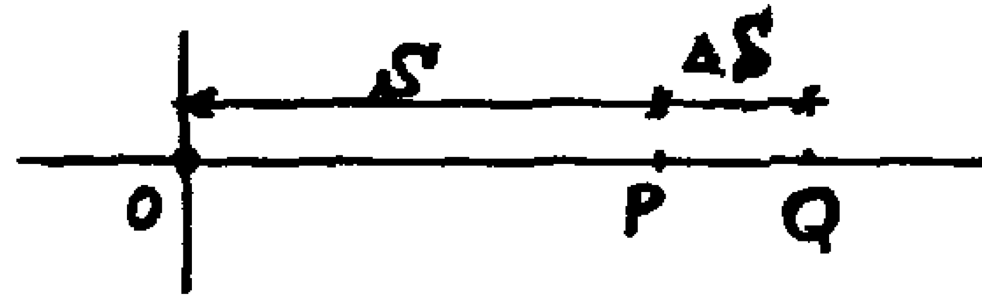
١٠ - ٣ : - السرعة والعجلة : -

هنالك العديد من التطبيقات التى تكون فيها الدوال المختلفة ، دوال فى الزمن بمعنى أن الزمن هو المتغير المستقل بها وسوف نقدم هذا النوع من الأمثلة عن السرعة والعجلة كأحد النماذج للدوال التى تعتمد على الزمن .

فإذا اعتبرنا أن لدينا جسيم يتحرك فى خط مستقيم (rectilinear motion) واعتبرنا أبسط أنواع هذه الحركة (فى خط مستقيم) ، أى عندما يتحرك الجسيم مسافات متساوية وفى نفس الاتجاه وفى فترات زمنية متساوية . ففى مثل هذه الحركة فإن عدد وحدات المسافة المقطوعة فى وحدة الزمن تُعرف بالسرعة .

ويُطلق على السرعة فى هذه الحالة بالسرعة الثابتة أو المنتظمة constant or uniform فإذا اعتبرنا الجسيم يتحرك من نقطة البداية 0 فى الاتجاه الموجب لمحور السينات وأن S هى المسافة المقطوعة للجسيم من نقطة البداية عند الزمن t ، فإن موضع الجسيم يكون دالة فى الزمن أى : $S = f(t)$

أنظر الرسم شكل (١٠ - ٣) .



شكل (١٠ - ٣)

والآن لنفترض أن الجسيم تحرك مسافة Δs من p إلى Q فى فترة زمنية قدرها Δt فإن وضع الجسيم عند الزمن (t) وعند الزمن $(t+\Delta t)$ يكون $f(t)$ ، $f(t+\Delta t)$

$$\therefore \Delta s = f(t+\Delta t) - f(t)$$

وبالقسمة على Δt

$$\therefore \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

ويُطلق على هذه النسبة بالسرعة المتوسطة للجسيم عند انتقاله من P إلى Q وعموماً فإن هذه النسبة ، ليست متساوية لمختلف قيم Δt مما لا يساعد على تفهم الحركة بوضوح. إلا أن نهاية هذه النسبة عندما تقترب Δt من الصفر ، تكون أكثر إيضاحاً وتحديداً للحركة .

تعـريف : إذا كان وضع جسيم متحرك يتحدد بالعلاقة $S = f(t)$ فإن السرعة V عند أى لحظة t تُعرف بالآتى :-

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$\therefore V = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

أى أن السرعة هى مشتقة المسافة بالنسبة للزمن وهى تُفيد كثيراً فى تفهم طبيعة الحركة ، فعند أى لحظة t ، فـإن $f'(t)$ تبين لنا السرعة اللحظية instantaneous velocity وتحدد إشارة المشتقة اتجاه الحركة .

غير أن القيمة المطلقة للمشتقة $f'(t)$ تمثل السرعة اللحظية .

وعليه فـإن S تزداد عندما $f'(t) > 0$ وتتناقص عندما $f'(t) < 0$ ويمكننا كتابة الآتى:-

(١) عندما $f'(t) > 0$ ، فإن الحركة تكون فى الاتجاه الموجب .

(٢) عندما $f'(t) < 0$ ، فإن الحركة تكون فى الاتجاه السالب .

(٣) عندما $f'(t) = 0$ ، فإن الجسم يكون ساكناً (السرعة = صفر) .

١٠ – ٤ أمثلة على السرعة والعجلة .

(١) العلاقة التالية تبين وضع جسيم متحرك فى خط مستقيم :

$$S = t^2 + 1$$

فأوجد مكان وسرعة الجسيم عندما : $t = 0$, $t = 2$, $t = 5$

الحـــل :- بأخذ مشتقة الدالة نحصل على السرعة (وهى دالة فى الزمن أيضاً) :-

$$\therefore V = \frac{ds}{dt} = 2t$$

ثم نعوض بقيمة t المختلفة فى كل من علاقتى المسافة والسـرعة للحصول على موضع وسرعة الجسيم ، كما هو موضح بالجدول التالى : (١٠-١)

t	0	2	5
s	1	5	26
V	0	4	10

جدول (١٠-١)

وكما يتضح من الجدول فإنه عند الزمن $t = 0$ ، الجسم ساكن $V = 0$ فإن $S = 1$ وهذا يعنى أنه عند بداية الحركة كان الجسم يبعد بمقدار وحدة مسافة عن نقطة البداية . ثم بدأ الجسم حركته فى الاتجاه الموجب للحركة بحيث أن السرعة تزداد وبحيث تكون دائماً مساوية لضعف الزمن المنقضى فى الحركة .

$$[(0 , 0) , (2 , 4) , (5 , 10)]$$

(٢) يسقط جسم من عُلُوّ طبقاً للعلاقة :-

$$S = -16\, t^2$$

حيث t مقاسة بالثوانى ، s بالأقدام ، فإذا وصل الجسم إلى الأرض فى 5 ثوانٍ فاحسب الارتفاع الذى سقط منه الجسم وكذلك السرعة التى يصطدم بها بالأرض .

الحـــــل :- يلاحظ هنا أن نقطة البداية هى نقطة سقوط الجسم وأن الإشارة السالبة فى معادلة الهبوط تعنى أن المسافة مقاسة فى اتجاه الصعود (أى الاتجاه الموجب هو الصعود لأعلى) .

وبوضع $t = 5$ فى المعادلة $S = f\,(t)$

$$\therefore S = -16\,(5)^2 = -400\ ft$$

كما وأن السرعة عند أى لحظة أثناء الهبوط :

$$V = \frac{ds}{dt} = -32\, t$$

فعندما $t = 5$ تكون السرعة V

$$V = -32 \times 5 = -160\ \ m/\sec$$

أى أن الجسم يسقط من ارتفاع $400\ ft$ ويصل للأرض بسرعة تبلغ $160\ ft/\sec$.

(٣) صف حركة نقطة تتحرك فى خط مستقيم طبقاً للعلاقة :-

$$S = 3\, t^2 - 18\, t$$

الحـــــل :- يمكن إيجاد اتجاه الحركة عند أى زمن عن طريق دالة السرعة .

$$V = \frac{ds}{dt} = 6\,t - 18 = 6\,(t - 3)$$

ويـــلاحظ الآتى :-

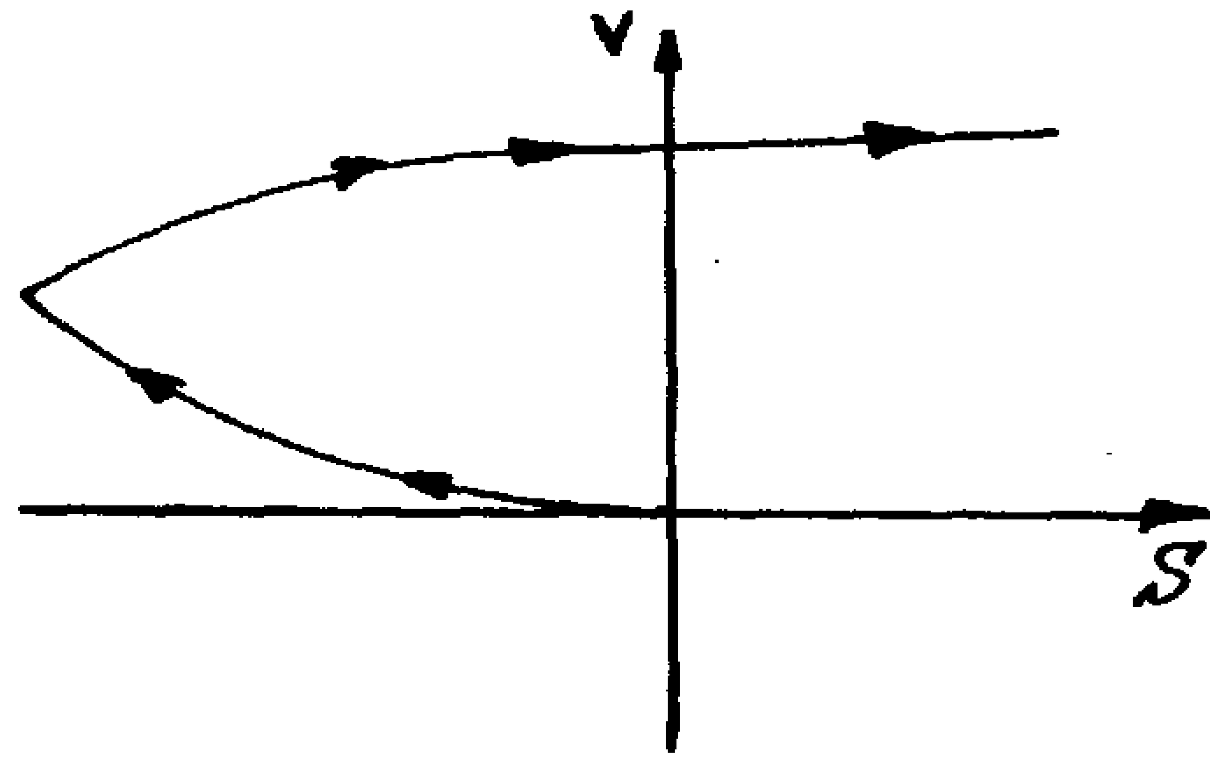
١) $V < 0$ عندما $0 < t < 3$

٢) $V = 0$ عندما $t = 3$

٣) $V > 0$ عندما $t > 3$

وبذلك فإن النقطة تتحرك لليسار أثناء الثلاث ثوانى الأولى (باعتبار الحركة لليمين هـى الموجبة) ، ثم تسكن عندما $t = 3$ ثم تصبح السرعة موجبة أى أنها تتحرك بعد الثلاث ثوانى فى الاتجاه الموجب أى لليمين وبذلك فهى تعكس حركتها ويكـون وضـع النقطـة عند $t = 0$ وعند $t = 3$ على الترتيب 0 , -27 والأسهم على الشـكل توضـح الحركـة لليسار ثم لليمين فى خط مستقيم .

أنظر الرسم شكل (١٠-٤) .



شكل (١٠-٤)

وقد تعرضنا فى وصف حركة النقطة ، إلى حســاب الفـترات الموجبـة والسـالبة للسـرعة والوضع الابتدائى للنقطة ووضع النقطة عند السرعة = صفر .

إلا أنه يمكننا الحصول على وصف أدق لطبيعة حركة النقطة الســابقة باعتبـار وحسـاب معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن وهو ما يدعونا إلى التحدث عن العجلة .

تعـــريف :- تُعرف العجلة بأنها مشـتقة السرعة بالنسـبة لـلزمن وبذلـك فـإن تعريـف العجلة acceleration هو :-

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

كما أنه إذا كانت $V = f\ (S)$:-

$$\therefore a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \times \frac{ds}{dt} = v\ \frac{dv}{ds}$$

ولتوضيح ذلك نعتبر جسماً يتحرك فى خط مستقيم طبقاً للعلاقة :-

$$S = 3\,t\ + 4$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = V = 3 \qquad , \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3) = a = 0$$

ويلاحظ أن السرعة لا تتغير فمقدارها $= 3$ ولذلك فإن العجلة وهى معدل تغير السر(الثابته) = صفر

وعند $t = 0$ فى وضع البداية فإن $S = 4$ تعنى أن الجسم يبعد بمقدار 4 وحدات مسا من نقطة القياس ، كما أنه يتحرك فى الاتجـاه الموجـب حيـث أن $V = 3 > 0$ بسر ثابتة قدرها $V = 3$ (3 وحدات مسافة لكل وحدة زمن)

وفيما يلى يمكننا إيضاح ، فـى أى وقـت مـن الحركـة تكـون العجلـة ثابتـة ولا تسـاو الصفر وهو ما يعرف بالعجلة المنتظمة uniformaly accelerated .

فمثـلاً إذا كانت

$$S = 3\,t^2 + 4\,t - 1$$

$$\therefore V = 6\,t + 4 \qquad , \qquad a = 6\ (> 0)$$

وتعنى العجلة 6 بأن السرعة تزداد بمقدار 6 وحدات سرعة لكل وحدة زمن فإذا كـا وحـدة السـرعة $m/\sec$ فـإن السـرعة تـزداد بمقـدار $6\ m/\sec$ كـل ثانيـة أو العجا تساوى $6\ m/\sec/\sec$

وباختصار تكتب العجلة a تساوى :-

$$a = 6\ m/\sec^2$$

وللعجلة المنتظمة أهمية كبيرة عند دراسة جسم يتحرك رأسياً (بالقرب)من سطح الكرة الأرضية . حيث تكون العجلة والناشئة من الجاذبية الأرضية (gravity) ، وبإهمال مقاومة الهواء ، عند التحرك رأسياً فإن :-

$$S = V_0\ t + \frac{1}{2}\ g\ t^2$$

حيث V_0 هى السرعة الإبتدائية ، g عجلة الجاذبية الأرضية

فإذا اعتبرنا الوحدات بالمتر والثانية وأن الاتجاه الموجب للحركة هو للأعلى فإن قيمة g تقريباً تعادل :-

$$g = -9.8\ \ m/\sec^2\ \left(-32\ \ ft/\sec^2\right)$$

(٤) قذف جسم إلى أعلى بسرعة ابتدائية $98\ m/\sec$ ، احسب زمن الصعود وأقصى ارتفاع يصل له الجسم

الحـــل :- حيث أن :-

$$S = V_0 t + \frac{1}{2}\ g t^2$$

وباعتبار $V_0 = 98$

$$\therefore S = 98t - \frac{1}{2}\times 9.8t^2 = 98t - 4.9t^2$$

$$\therefore\ V = \frac{ds}{dt} = 98\ -\ 9.8\ t$$

وتكون السرعة مساوية للصفر $V = 0$ عندما :-

$$98\ -\ 9.8\ t = 0 \qquad \therefore\ t = \frac{98}{9.8} \cong 10\ \text{sec}$$

وهو زمن الوصول لأقصى ارتفاع ولحساب أقصى ارتفاع ، نعوض بقيمة الزمن $t = 10$ فى معادلة المسافة :-

$$\begin{aligned} S &= 98\ t\ -\ 4.9\ t^2 \\ &= 98\times 10 - 4.9\times 100 \\ &= 980\ -\ 490 = 490\ \ mt\ . \end{aligned}$$

وعليه فإن زمن الصعود $t = 10$ sec وأقصى ارتفاع $S = 490\ \ mt$

(٥) تتحرك نقطة فى خط مستقيم بحيث أن المسافة بالأقدام مقاسة من نقطة البداية عند أى لحظة يمكن تمثيلها بالعلاقة :

$$S = t^3 - 6t^2 + 9t$$

صف الحركة أثناء الأربع ثوانى الأولى من الحركة .

الحـــــل :-

$$\because \quad S = t^3 - 6t^2 + 9t \qquad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\therefore\ V = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3) \qquad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

$$,\ a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 12 = 6\,(t-2) \qquad \ldots\ldots\ldots\ (3)$$

ويلاحظ من العلاقة (٢) أنه عندما تكون $1 > t > 0$ أى فى خلال الثانية الأولى فإن :-

$$V = 3\ (t-1)\ (t-3)$$

أى موجبة $\therefore V = 3\,(-ve)\,(-ve) = +ve$

بينما عندما $3 > t > 1$ أى فى خلال الثانيتين الثانية والثالثة فإن :

أى سالبة $V = 3\,(+ve)\,(-ve) = -ve$

أما عندما تكون $t \geq 3$ أى خلال الثانية الرابعة (فأكثر) فإن :-

أى موجبة $V = 3\,(+ve)\,(+ve) = +ve$

أى أن النقطة تتحرك أولاً لليمين ثم لليسار ثم لليمين ثانية ومن علاقة العجلة :-

$$a = 6\,(t-2)$$

فإنه عندما تكون $2 > t > 0$ فإن :

أى سالبة $a = 6\,(-ve) = -\ ve$

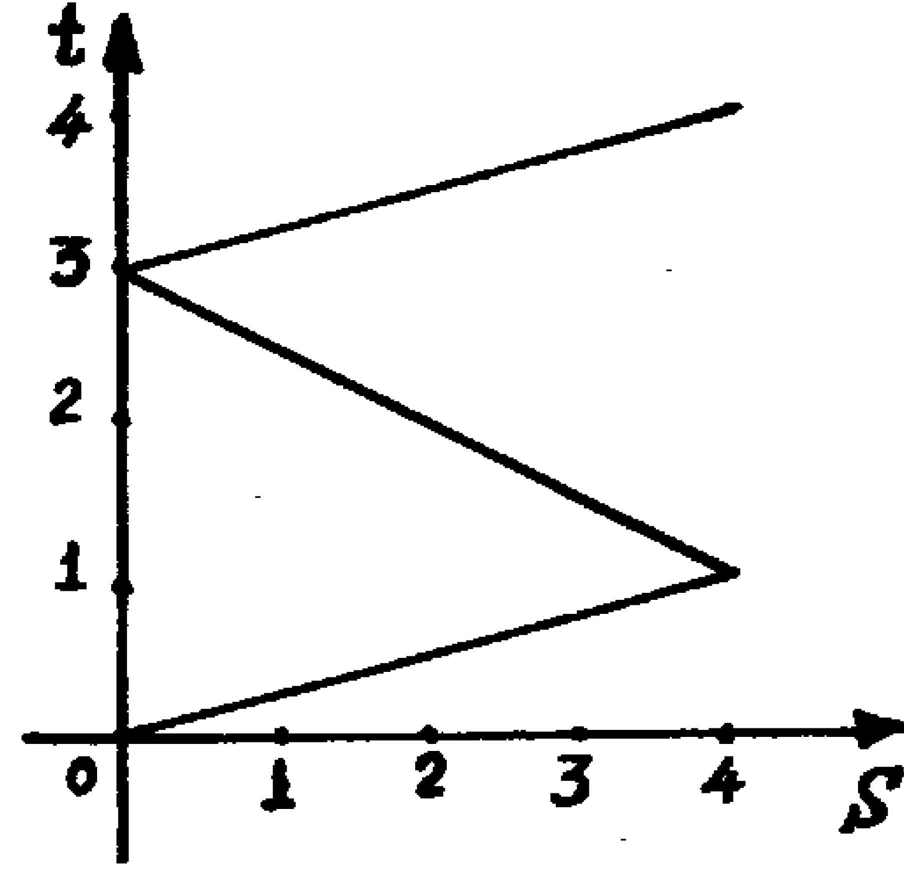
أى أن السرعة تتناقص (عجلة تقصيرية) .

بينما عندما تكون $4 \geq t > 2$ فإن :

أى موجبة $a = 6\,(+ve) = +ve$

أى أن السرعة تتزايد (عجلة تزايدية)

والشكل (١٠-٥) يوضح ذلك .



شكل (١٠ – ٥)

Exercise 10

(١) حدد زاوية تقاطع المنحنيين :-

$$x^2 + y^2 = 5 \qquad , \qquad y^2 = 4x$$

(٢) احسب الزاوية التى يقطع بها المستقيم : $2y = 1$ ؛ المنحنى ؛ $y = \cos x$

(٣) أوجد معادلتى المماس للمنحنى $y^2 = 8x$ المارين بالنقطة $(-2\ ,\ 0)$ واثبت أنهما مُتعامدان .

(٤) حدد النقطة التى يكون فيها مماس المنحنى $y = x^2 + 4x$ موازياً للمحور $X`OX$

(٥) أوجد معادلة المماس والعمودى للمنحنى $y = 3x^2$ عند النقطة $x = 3$

(٦) أوجد معادلة المماس للمنحنى $x^2 - y^2 = 16$ والذى يمر بالنقطة $(2,-2)$

(٧) أوجد معادلة المماس والعمودى للمنحنى $y = x^2 + 4x + 2$ عند النقطة التى يكون عندها المماس عمودياً على المستقيم :- $2x - 4y + 5 = 0$

(٨) حدد زاوية تقاطع المنحنيين :-

$$y = \frac{x^2}{2} \qquad , \qquad y = 4 - \frac{x^2}{2}$$

(٩) حدد الزاوية التى يقطع بها المنحنى $y = \sin x$ ، والمحور $X`OX$

(١٠) اكتب معادلتى مماس المنحنى $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ فى نقطتى تقاطعه مع المحور $Y`OY$

(١١) أوجد مساحة المثلث الذى أضلاعه محور OX والمماس العمودى فى النقطة $(1\ ,-4)$ للمنحنى :- $4x^2 + y^2 = 20$

(١٢) أوجد النقطة الواقعة على المنحنى $y = 4x^3 - 21x^2 + 30x$ والتى يكون عندها المماس للمنحنى موازياً لمحور $X`OX$ ثم أوجد معادلة العمودى للمنحنى عند كل نقطة من هذه النقط .

(١٣) أوجد معادلة المماس للقطع الناقص : $4x^2 + 9y^2 = 40$ عند النقطة $(1\ ,\ 2)$

(١٤) فى معادلة القطع المكافئ $y = x^2 + bx + c$ ، حدد الثابتين b,c علماً بأن المستقيم $y = x$ يمس القطع المكافئ عند النقطة $x = 2$

(١٥) أوجد معادلة المماس للمنحنى $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ عند النقطة (x_1 , y_1) .

(١٦) عين y'' عند النقطة $(0 , b)$ فى المعادلة بطريقة مشتقة الدالة الضمنية :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(١٧) اكتب معادلتى مماس الدائرة :- $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$

فى نقطتى تقاطعها مع محور $X`OX$ ثم ارسم الدائرة والمماسات .

(١٨) أوجد ميل المماس للمنحنى $y = x^3 + x^2 - 6x$ عند كل نقطة من نقط تقاطعه مع محور $X`OX$

(١٩) أوجد معادلة المماس للمنحنى $2x^2 + y^2 + 2xy = 5$ عند النقطة $(1 , 1)$

(٢٠) أوجد معادلة المماس للمنحنى : $e^x + \cos y - 2 = 0$

عند النقطة $\left(0 , \frac{\pi}{3}\right)$

(٢١) أوجد معادلات المماس والعمودى للمنحنى : $y = x^2 - x + 3$

عند النقطة $(2 , 5)$.

(٢٢) عين ميل القطع المكافئ : $y = x^2$ عند النقطتين $x = \pm 2$.

(٢٣) اكتب معادلتى المماسين للقطع الزائد $yx = 4$ عند النقطتين $x_1 = 1$ ، $x_2 = -4$, وحدد الزاوية بينهما ومن ثم ارسم المنحنى ومماسيه .

(٢٤) اكتب معادلة المماس للقطع الناقص $x^2 + 4y^2 = 16$ فى النقطة التى تنصف جزء المماس المقطوع بمحورى الإحداثيات وتقع فى الربع الإحداثى الأول .

(٢٥) ما هى النقط التى يكون عندها المماس لمنحنى $y = \cos \theta$ ، أفقياً .

(٢٦) اكتب معادلتى المماس والعمودى للقطع المكافئ $y = 4 - x^2$ عند نقطة تقاطع القطع المكافئ مع المحور OX (عندما $x > 0$) ثم ارسم القطع والمماس والعمودى .

(٢٧) باستخدام طريقة Δ أوجد النقط التى على المنحنى :- $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$

والتى يكون عندها المماس أفقياً .

(٢٨) بين أن المنحنى $y = x^2 + 3x - 4$ ، ليس له مماساً أفقياً باستخدام طريقة Δ

أوجد زاوية التقاطع لأقرب درجة ، لأزواج المنحنيات التالية :-

(٢٩) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 5 \\ , 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$

(٣٠) $\begin{cases} y = x^2 - 6 \\ y = x \end{cases}$

(٣١) $\begin{cases} y = x^3 - x \\ , y = x^2 - 1 \end{cases}$

(٣٢) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$

فى الثلاث مسائل التالية اكتب معادلات مماسات المنحنيات ثم ارسم المنحنيات ومماساتها :-

(٣٣) $y = 4x - x^2$ فى نقط التقاطع مع المحور OX

(٣٤) $y = \sqrt{4 - x}$ فى نقط التقاطع مع المحور OY

(٣٥) $y^2 = (4 + x)^3$ فى نقط التقاطع مع كل من المحورين OY , OX

فى الأربعة مسائل التالية ، اكتب معادلات المماس للمنحنيات التالية ثم ارسمها وارسم مماساتها :-

(٣٦) المنحنى $y = \sin x$ عند النقطة $x = \pi$

(٣٧) المنحنى $y = \dfrac{x^3}{3}$ عند النقطة $x = -1$

(٣٨) المنحنى $y = \dfrac{8}{4 + x^2}$ عند النقطة $x = 2$

(٣٩) المنحنى $y^2 = x^3$ عند النقطتين $x_1 = 0 \;,\; x_2 = 1$

أوجد معادلات المماس والعمودى لكل من المنحنيات التالية عند النقط الموضحة أمام كل منها :-

(٤٠) $x^2 - 3xy + y^2 = 19$ عند $(-3,1)$

(٤١) $y = 4x - x^2$ عند $(4,0)$

(٤٢) $(x-1)^2 + y^2 = 13$ عند $\left.\begin{matrix}(-2,-2)\\(-3,1)\end{matrix}\right\}$

(٤٣) $y = x^3 + 2x^2 + x$ عند $(1,4)$

فى كل من المسائل التالية ، نقطة تتحرك فى خط مستقيم وكانت المسافة S مقاسة بالقدم من نقطة البداية ، الزمن عند أية نقطة = t ثانية وكانت المعادلات التالية تربط بين كل من S,t فأوجد : -

المسافة والسرعة والعجلة عندما $t=0$، $V=0$ [عندما $t \neq 0$]

(٤٤) $S = t + 3$

(٤٥) $S = t^2 + 6t - 7$

(٤٦) $S = t^2 + 2t - 3$

(٤٧) $S = t^3 - 3t^2 + 3t - 5$

(٤٨) $S = 80t - 16t^2$

(٤٩) قذف جسم بزاوية مقدارها θ على الأفقى وبسرعة ابتدائية u فإذا كان المدى (المسافة الأفقية التى يقطعها الجسم) = x والارتفاع = y مرتبطين بالعلاقة : -

$$y = x \tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2\theta}$$

فما هو أقصى ارتفاع يصل له المقذوف وما المدى المقطوع حينئذ

(g = عجلة الجاذبية الأرضية = ثابت) .

(٥٠) تحرك جسم من السكون ثم عاد للسكون مرة أخرى وكانت العلاقة بين سرعته V بالمتر /ث والزمن t بالثانية كالتالى : -

$$V = 2t - 5t^2$$

فاحسب الزمن الذى استغرقه بين لحظتى السكون ، ثم أوجد فترات تزايد وتناقص كل من السرعة والعجلة .

(٥١) تتحرك نقطة مادية فى خط مستقيم فإذا كان بعدها S بالمتر عن نقطة ثابتة " O " عند الزمن t يتحدد من العلاقة : -

$$S = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$$

فبين أن النقطة ، تتوقف عن الحركة ، لحظيا مرتين ، ثم أوجد المسافة بين فترتى السكون .

(٥٢) قذفت كرة لأعلى بسرعة ابتدائية قدرها $64\ ft/\sec$ ، فاحسب زمن صعودها وهبوطها وأقصى ارتفاع تصل إليه ؟

(٥٣) إذا كانت المسافة S التى يقطعها جسم مقذوف رأسيا لأعلى فى الزمن t تُعطى بالعلاقة التقريبية التالية : -

$$S = 120t - 4.9t^2$$

فأوجد أقصى ارتفاع يصل له الجسم والزمن اللازم لذلك .

(٥٤) إذا كانت $S = 3 + 3t^2 - t^3$ تُمثل العلاقة بين المسافة S والزمن t لجسم متحرك فى خط مستقيم ، فأوجد السرعة عندما تنعدم العجلة

(٥٥) تحركت نقطة مادية فى خط مستقيم وكانت العلاقة بين S بالمتر ، t بالثانية :-

$$S = (3t - 2)^2$$

فاوجد سرعتها المتوسطة خلال الثانية السادسة ، ثم اوجد سرعتها وعجلتها عندما $t = 4$

(٥٦) سقطت نقطة مادية من ارتفاع ما فوصلت الأرض بعد ثلاث ثوانى فاوجد الارتفاع الذى سقطت منه وسرعة اصطدامها بالأرض

تحركت نقطة مادية فى خط مستقيم وكانت المسافة S بالمتر والزمن t بالثانية مرتبطان بالمعادلات المبينة فيما يلى ، احسب السرعة والعجلة بعد ٣ ثوان : -

(٥٧) $S = 2t^2 + 2\sqrt{t}$

(٥٨) $S = 2t^3 + 6t^2 - 3t + 1$

(٥٩) $S = 3t + \dfrac{4}{t-2}$

(٦٠) $S = 3t^3 - 5t^2 + 2t$

(٦١) $S = t^4 - 4t^3 + 4t^2$

(٦٢) إذا كانت $S = 6 + 12t - t^3$ هى العلاقة بين S بـالمتر ، t بالثانيـة لنقطـة تتحرك فى خط مستقيم فأوجد متى يغير الجسم حركته وكم تبلغ العجلة عندئذ ؟

(٦٣) تتحرك نقطة مادية فى خط مستقيم بحيث أن المسافة S بالمتر بعد t ثانيـة تُعطى بالعلاقة : –

$$S = 3t^4 - 16t^3 + 6t^2 - 48t$$

فبين أن سرعة النقطـة ، لا تسـاوى صفـراً إلا مـرة واحـدة فقـط خـلال حركتهـا ، ثـم احسب السرعة عندما تكون العجلة = $5m/\sec^2$.

الباب الحادى عشر

تفاضل الدوال المتسامية

Differentiation of transcendental function

١١ -١ عام : -

درسنا فيما سبق الدوال الجبرية ، أما الدوال غير الجبرية فتُعرف بالدوال المتسامية وأشهر أنواع هذه الدوال والتى سوف ندرسها فيما يلى من أبواب هذا الكتاب ، الدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية والدوال الزائدية والزائدية العكسية والدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية .

وهذه الدوال ذات أهمية كبيرة وتستخدم بكثرة فى الفيزياء والهندسة والاحتمالات وفى مجالات علمية وتطبيقية متعددة .

١١ - ٢ : - تفاضل الدوال المثلثية

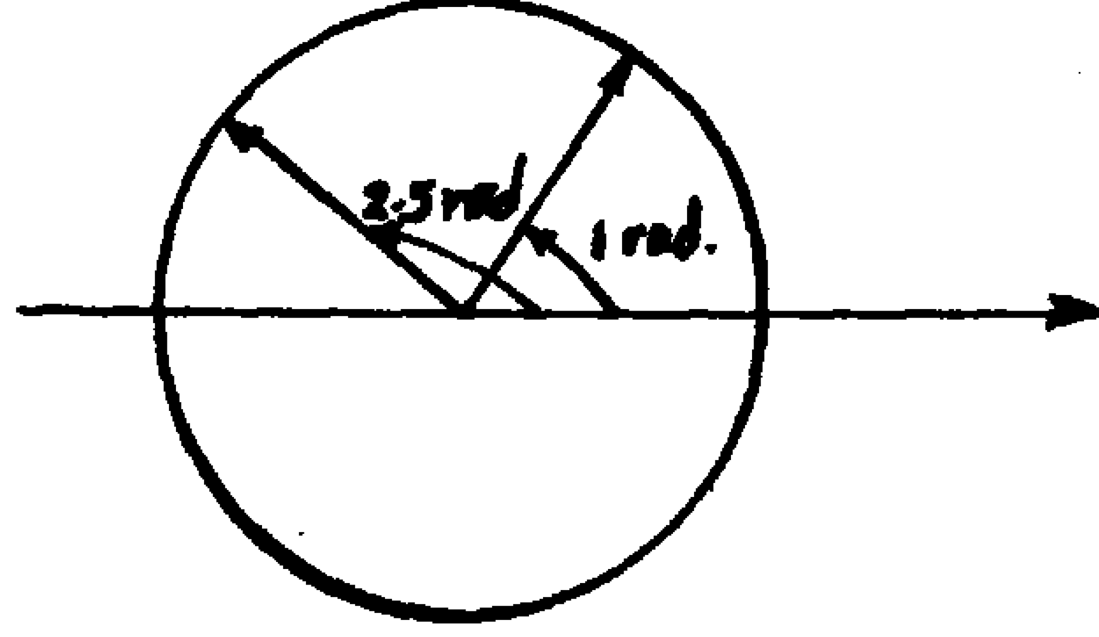
Diff . of The Trigonometric Functions

التقدير الدائرى للزوايا : - angular measure / circular measure

تقاس الزوايا بالدرجات كما علمنا فيما مضى من مراحل دراسية مختلفة ويستخدم هذا النظام فى مبادئ الهندسة والحساب إلا أنه يوجد نظام آخر لقياس الزوايا يُعرف بالتقدير الدائرى للزوايا ، وهو يفضل فى الدراسات النظرية وعلى الأخص فى حساب التفاضل والتكامل وعن طريقه يتم تبسيط العمليات كثيراً .

تعريف : - يُعرف قياس الزاوية التى رأسها عند مركز دائرة وتقابل قوساً على محيط الدائرة ، طوله يعادل طول نصف قطر الدائرة ، بأنه واحد دائرى one radian .

ويوضح الشكل زوايا مقاسة بالتقدير الدائرى مقدارها $1\,rad.$ ، $2\frac{1}{2}\,rad$



شكل (١١ - ١)

وحيث أن محيط الدائرة (c) يعادل 2π مرة نصف قطرها . $(c = 2\pi\ r)$

فإذا كان لدينا دائرة نصف قطرها = 1 وحدة طول فإن محيــــــط هــذه الدائرة = $1 \times 2\ \pi$ أى أن محيط هـذه الدائـرة يقـابل زاويـة قدرهـا 2π بالتقدير الدائرى

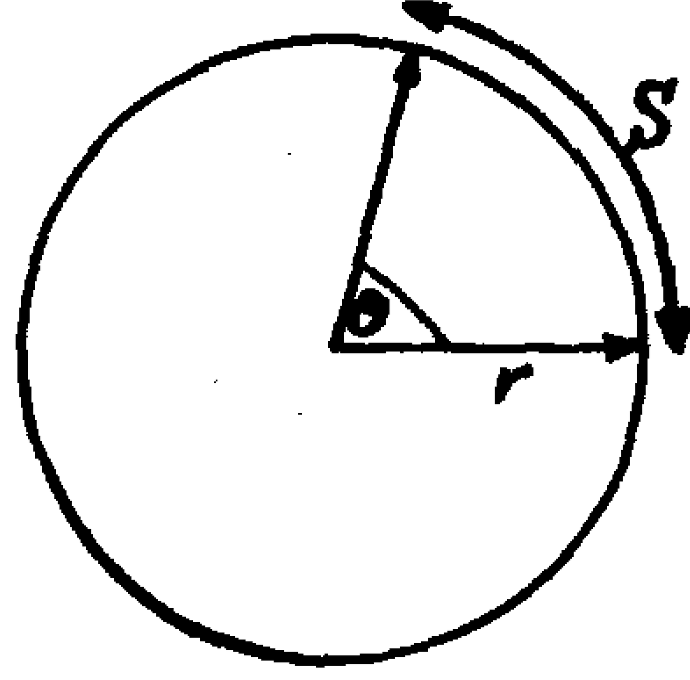
$$i.e.\ 2\pi \ \ radians \ = 360^\circ$$

$$,\quad \pi \ \ radians \ = 180^\circ$$

$$,\ 1\ Radian \ = \frac{180}{\pi} \ = \frac{180}{3.14} = 57.296^\circ \ = 57^\circ,177' \ +$$

$$،\ 1^\circ \qquad = \frac{\pi}{180}\ radian \ = \frac{3.14}{180} \quad = 0.0174532 + radian$$

ومن تعريف التقدير الدائرى للزوايا فإنه يمكننا استـنتاج صيغتـين ريـاضيتين هـامتين عـن الدائرة ، انظر الرسم شكل (١١ - ٢) .



شكل (١١ - ٢)

نفترض أن الزاوية θ مقاسة بالتقدير الدائرى

وأن رأس الزاوية عند مركز الدائرة التى نصف قطرها = r وحدة طول .

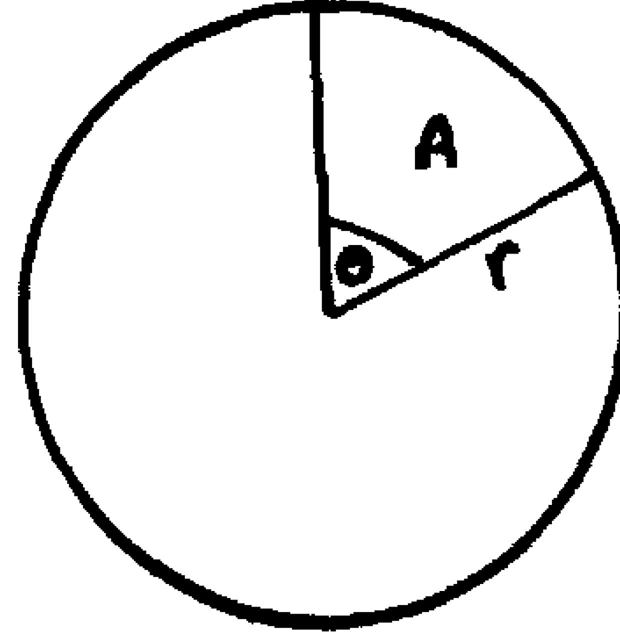
وأن القوس المقابل لهذه الزاوية طوله S وحدة طول .

وحيث أن الزاوية المركزية التى قياسها 1 *radian* تقابل قوساً طوله مساوياً لنصف قطر الدائرة، وعليه فإن الزاوية المركزية التى قياسها θ *rad.* تقابل قوساً طوله $\theta . r$ ومنها نصل للصيغة الرياضية الأولى التالية : -

$i.e \quad S = r . \theta$ .... (1)

ومن المهم عند تطبيق الصيغة السابقة أن يكون كل من نصف القطر والمحيط ، معبراً عنهم بنفس الوحدات الطولية وأن تكون θ مُقاسة بالتقدير الدائرى

ويُطلق على الشكل الهندسى الناشئ من القوس المقابل للزاوية المقاسة بالتقدير الدائرى بالإضافة إلى ضلعى الزاوية (نصفى القطر) بالقطاع الدائرى sector ، انظر الرسم شكل (١١ - ٣) .



شكل (١١ - ٣)

ويمكن التعبير عن مساحة هذا القطاع بدلالة زاوية رأسه ونصف القطر فإذا كانت θ ، هى زاوية رأس القطاع بالتقدير الدائرى ، فإن مساحة القطاع A عبارة عن كسر مقداره $\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$ [زاوية رأس القطاع : زاوية الدائرة $360 = 2\pi$] من مساحة الدائرة $\pi\ r^2$

$$\therefore A = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi\ r^2$$

$$\therefore A = \frac{1}{2} r^2\ \theta \qquad \text{..........}\ (2)$$

وهى الصيغة الرياضية الثانية الخاصة بالدائرة .

وفيما يلى سنعتبر أن القارئ عنده إلمام كافٍ بقواعد حساب المثلثات والعلاقات والقوانين الخاصة به والمشهورة منها بالأخص .

ويجب أن لا ننسى عند دراسة تفاضل الدوال المثلثية أن الزوايا فيها مقاسة بالتقدير الدائرى وعادة تكون فى صورة كسور ملائمة أو مضاعفات النسبة π

مثل : - $\frac{\pi}{3}, \pi, 2\pi, \frac{5\pi}{6}, ...etc.$

١١ - ٣ : - تفاضل $\sin x$

لنعتبر أن $y = \sin x$

ولنعتبر أن Δx هى زيادة طفيفة جداً فى قيمة x

، لنعتبر أن Δy هى زيادة طفيفة جداً مناظرة فى قيمة y

$$, \because y = \sin x \qquad \text{.......... (1)}$$

$$\therefore y + \Delta y = \sin (x + \Delta x) \qquad \text{.......... (2)}$$

وبطرح (1) من (2) :

$$\therefore \Delta y = \sin (x + \Delta x) - \sin x$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

والمطلوب هو إيجاد نهاية المقدار الأيمن عندما تؤول Δx إلى الصفر .

ولذلك ، سنقوم بتحويل البسط من مجموع جبرى إلى ضرب باستخدام الصيغة التالية:-

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \times \sin \frac{A-B}{2}$$

حيث نضع $(x+\Delta x)$ بدلاً من A

، $\sin x$ بدلاً من B

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cos \left[\frac{(x+\Delta x)+x}{2}\right] \times \sin \left[\frac{(x+\Delta x)-x}{2}\right]}{\Delta x}$$

$$= \frac{2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \times \sin \left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

وبإعادة الترتيب :

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \times \frac{\sin \left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

وفى الطرف الأيمن نلاحظ أن العامل الثانى به $\frac{\sin \left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$ يأخذ الصورة : -

$\frac{\sin \theta}{\theta}$ السابق إيجاد نهايتها فى باب النهايات $\left[\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right]$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \times \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right]$$

$$= \cos x \times 1 \qquad , \qquad \left[\frac{\Delta x}{2} \to 0\right]$$

$$= \cos x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$$

١١ – ٤ : – تفاضل $\cos x$: –

وسنتبع هنا نفس الطريقة المتبعة فى إيجاد $\sin x$

$$\because y = \cos x$$

$$\therefore y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\therefore \Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

ثم نستخدم الصيغة التالية : –

$$\cos A - \cos B = -2\sin \frac{A+B}{2} \times \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\therefore \Delta y = -2\sin\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) \sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right)$$

$$= -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

وبالقسمة على ΔX وإعادة الترتيب :

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \left[\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) . \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right]$$

$$= -[\sin x \; . \; 1]$$

$$= -\sin x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

١١ - ٥ : - تفاضل $\tan x$

يمكن إيجاد المعامل التفاضلى للدالة $y = \tan x$ بسهولة باستخدام المعامل التفاضلى لكل من $\sin x$, $\cos x$ السابق الحصول عليهما .

وحيث أن : $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

∴ بإجراء التفاضل للكسر السابق الذى بسطه $\sin x$ ومقامه $\cos x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \frac{d}{dx} \sin x - \sin x \frac{d}{dx} \cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \; . \cos x - \sin x \times -\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \quad , \quad [\cos^2 x + \sin^2 x = 1]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \tan x = Sec^2 x$$

كما أنه يمكن إيجادها من المبادئ الأولية بطريقة Δ مثلما الحال فى $\sin x$ ، $\cos x$ وباستخدام الصيغ المثلثية الملائمة .

١١ - ٦ : - تفاضل : Sec x , Cosec x , cot x

يمكن إيجاد المشتقة الأولى لهذه الدوال من المبادئ الأولية كما سبق ، إلا انه يمكن إيجادها بسهولة كمقلوب لكل من : tan x , sin x , cos x على الترتيب وذلك باستخدام قانون تفاضل القسمة

ا - تفاضل مقلوب sin x أى Cosec x : -

$$y = \text{cosec } x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \times 0 - 1 \times \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\sin x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \text{ cosec } x = -\cot x . \text{cosec } x$$

ب - تفاضل مقلوب cos x أى sec x : -

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \times 0 - 1 \times -\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \sec x . \tan x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x .$$

جـ - تفاضل مقلوب tan x أى cot x : -

$$y = \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\tan x \times 0 - 1 \times \sec^2 x}{\tan^2 x}$$

$$= -\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x} = \frac{-1}{\cos^2 x} \times \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

١١ – ٧ : – خلاصة : –

ويمكن تلخيص ما سبق فى الجدول التالى حتى يسهل حفظه حيث أنها من التفاضلات الهامة الرئيسية والتى كثيراً ما تقابلنا فى حل المسائل .

الدالة $f(x)$	تفاضلها : $\frac{dy}{dx}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$

١١ – ٨ : – تفاضل الدوال المثلثية فى الصور المختلفة : –

يستلزم تفاضل الدوال المثلثية تطبيق قاعدة تفاضل دالة الدالة

وكثيراً ما يقتضى الأمر تفاضل دوال مثلثية تحتوى على مضاعفات x مثل ax ، nx والمشتقة الأولى لكل منهما هى a ، n وتظهر كمعامل للمشتقة الأولى فمثلاً : –

$$y = \sin a x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a \cos a x$$

$$, y = \cos a x$$

$$\therefore y' = -a \sin a x$$

$$، y = \tan a x$$

$$\therefore y' = a \sec^2 a x$$

ونفس الشئ بالنسبة لمقلوب هذه الدوال

وبذلك فإن : -

$$\frac{d}{dx}\ \sin(3x) = 3\cos(3x)$$

$$،\frac{d}{dx}\ \cos\left(\frac{x}{5}\right) = \frac{-1}{5}\sin\left(\frac{x}{5}\right)$$

$$،\frac{d}{dx}\ \tan\left(\frac{ax}{b}\right) = \frac{a}{b}\sec^2\left(\frac{ax}{b}\right)$$

أما الدوال الأكثر تعقيداً فتكون كالتالى : -

$$y = \sin(ax+b) \quad \therefore \frac{dy}{dx} = a\ \cos(ax+b)$$

$$،y = \sin(\pi+nx) \quad \therefore \frac{dy}{dx} = n\ \cos(\pi+nx)$$

$$،y = \tan(1-x) \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\sec^2(1-x)$$

$$،y = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

١١ - ٩ : - أمثلة محلولة : -

(١) فاضل $y = \sin^2\ x$

الحـــل : -

$$\because y = (\sin x)^2$$

$$\therefore y' = 2\ \sin x \times \frac{d}{dx}\ \sin x$$

$$= 2\ \sin x\ \cos x$$

$$= \sin 2x$$

(٢) فاضل $y = \sin\sqrt{x}$

الحـــل : -

$$\because y = \sin\ x^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore y' = \cos\ x^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2}\ x^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \cos\sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

(٣) فاضل $y = \sin 2x^3$

الحـــل : – نضع : $u = 2x^3$

$\therefore \frac{du}{dx} = 6x^2$

$, y = \sin u.$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$= \cos u. \times 6x^2$

$= 6x^2 \times \cos 2x^3$

(٤) اوجد مشتقة : $y = \sin^2 (x^5)$

الحـــل : –

$\because y = [\sin (x^5)]^2$

$\therefore y` = 2 \sin (x^5) \times \frac{d}{dx} \sin (x^5)$

$= 2 \sin (x^5) \times \cos (x^5) \times \frac{d}{dx} (x^5)$

$= 2 \sin (x^5) \times \cos (x^5) \times 5x^4$

$= 10 x^4 \sin (x^5) \cos (x^5)$

$= 5 x^4 \sin (2x^5)$, $[\sin 2a = 2 \sin a \cos a]$

(٥) فاضل : – $y = \sqrt{\sin x}$

الحـــل : –

$\because y = (\sin x)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore y` = \frac{1}{2} (\sin x)^{\frac{-1}{2}} \times \frac{d}{dx} \sin x$

$= \frac{1}{2(\sin x)^{\frac{1}{2}}} \times \cos x$

$= \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

(٦) اوجد مشتقة : $\cos(3x-4)$

الحـــل : - نضع $u = 3x - 4$

$$\therefore y = \cos(3x-4) = \cos u.$$

$$, \frac{du}{dx} = 3$$

$$, \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\therefore y' = -\sin u \times 3$$

$$= -3\sin(3x-4)$$

(٧) اوجد مشتقة $\sec^3(2x)$

الحـــل : - حيث أن : $\sec^3(2x) = [\sec(2x)]^3$

وبوضع $u = \sec(2x)$

$$\therefore y = \sec^3(2x) = [\sec(2x)]^3 = u^3$$

$$, \frac{du}{dx} = \sec(2x) \times \tan(2x) \times 2x$$

$$, \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= 3u^2 \times 2x \sec(2x) \tan(2x)$$

$$= 3[\sec(2x)]^2 \times 2x \sec(2x) \tan(2x)$$

$$= 6x \sec^3(2x) \tan(2x)$$

(٨) إذا كانت $y = \frac{(1+\tan x)^2}{x^3}$ فاوجد $\frac{dy}{dx}$

الحـــل : - نستخدم أولاً صيغة تفاضل القسمة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 \frac{d}{dx}(1+\tan x)^2 - (1+\tan x)^2 \times \frac{d}{dx} x^3}{x^6}$$

$$= \frac{x^3(2)(1+\tan x)(\sec^2 x) - 3x^2(1+\tan x)^2}{x^6}$$

$$= \frac{2x^3 \sec^2 x(1+\tan x) - 3x^2(1+\tan x)^2}{x^6}$$

$$= \frac{(1+\tan x)[2x \sec^2 x - 3(1+\tan x)]}{x^4}$$

(٩) إذا كانت $y \cot x = \sin(x+y)$ فاوجد $y`$

الحل : – نفاضل كل عنصر من عناصر المعادلة بالنسبة إلى x

$$\therefore -y \operatorname{cosec}^2 x + y` \cot x = \cos(x+y)(1+y`)$$

$$\therefore [\cot x - \cos(x+y)]y` = y \operatorname{cosec}^2 x + \cos(x+y)$$

$$\therefore y` = y\,\frac{\operatorname{cosec}^2 x + \cos(x+y)}{\cot x - \cos(x+y)}$$

(١٠) اوجد تفاضل الدالة :

$$y = 2\sin^3(2x^4)$$

الحل : –

$$\frac{dy}{dx} = 2(3)\sin^2(2x^4)\frac{d(\sin 2x^4)}{dx}$$

$$= 6\sin^2(2x^4)\cos(2x^4)\frac{d(2x^4)}{dx}$$

$$= 48x^3\sin^2(2x^4)\cos(2x^4).$$

(١١) اوجد مشتقة الدالة :

$$x = 2\sqrt{4\sin y - 6\cos y.}$$

الحل : –

$$x = 2(4\sin y - 6\cos y)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = 2\left(\frac{1}{2}\right)(4\sin y - 6\cos y)^{\frac{-1}{2}}(4\cos y + 6\sin y)$$

$$= \frac{1}{(4\sin y - 6\cos y)^{\frac{1}{2}}}(4\cos y + 6\sin y)$$

$$=\frac{4\cos y+6\sin y}{\sqrt{4\sin y-6\cos y}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{\sqrt{4\sin y-6\cos y}}{4\cos y+6\sin y}=\frac{x}{4(2\cos y+3\sin y)}$$

(١٢) اوجد مشتقة الدالة :

$$y=\sin(\cos x)+\sin x\cos x$$

الحـــل : -

لإيجاد مشتقة الدالة ، نستخدم الصيغة : -

$$\frac{d}{dx}\sin u=\cos u\frac{du}{dx}$$

$$,\frac{d}{dx}\cos u=-\sin u\frac{du}{dx}$$

ثم نستخدم تفاضل حاصل الضرب للحد الأخير بالمعادلة .

$$\frac{dy}{dx}=\cos(\cos x)(-\sin x)+[(\sin x)(-\sin x)+(\cos x)(\cos x)]$$

$$=-\sin x\cos(\cos x)-\sin^2 x+\cos^2 x$$

$$=\cos^2 x-\sin^2 x-\sin x\cos(\cos x)$$

$\because \cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$ (متطابقة)

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\cos 2x-\sin x\cos(\cos x)$$

(١٣) فاضل الدالة : -

$$y=\sin nx\sin^n x$$

الحـــل : -

$$\frac{dy}{dx}=\sin nx\frac{d}{dx}[\sin x]^n+\sin^n\times\frac{d}{dx}(\sin nx)$$

$$=\sin nx.n(\sin x)^{n-1}.\frac{d}{dx}(\sin x)+\sin^n x\cos nx\frac{d}{dx}(nx)$$

$$=n\sin nx.\sin^{n-1}x\cos x+n\sin^n x\cos nx$$

$$= n \sin^{n-1} x(\sin nx \cos x + \cos nx \sin x)$$

$$= n \sin^{n-1} x \sin (n+1) x$$

وفيما يلى موجز فى صورة جدول لقيم بعض الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة مقاسة بالتقدير الدائرى وبالدرجات .

	$\theta \begin{cases} 0^\circ \\ 0 \end{cases}$	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2} = 0.50$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.71$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.87$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.87$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.71$	$\frac{1}{2} = 0.50$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3} = 0.58$	1	$\sqrt{3} = 1.73$	∞

Exercise 11

فى كل من المسائل التالية أوجد قيمة الزاوية المركزية بالتقدير الدائرى وبالدرجات ، بمعلومية نصف قطر الدائرة وطول القوس المقابل للزاوية .

١ - نصف القطر $12\ m$ وطول القوس $4\ m$

٢ - نصف القطر $16\ ft$ وطول القوس $4\ ft$

٣ - نصف القطر $2\ cm$ وطول القوس $8\ cm$

٤ - نصف القطر $5\ m$ وطول القوس $\pi\ .m.$

٥ - نصف القطر $20\ cm$ وطول القوس $0.2\ m$

فاضل كل من التالى : -

٦ - $\sin 5x$

٧ - $5 \sin x$

٨ - $\cos \frac{x}{3}$

٩ - $\tan \frac{x}{2}$

١٠ - $\sec (0.6x)$

١١ - $\operatorname{cosec} \left(\frac{x}{6}\right)$

١٢ - $\sin 3x + \cos 3x$

١٣ - $\sin 2x - \cos 2x$

١٤ - $\sec x + \tan x$

١٥ - $\sin 4x + \cos 5x$

١٦ - $\cos \frac{\theta}{3} + \sin \frac{\theta}{4}$

١٧ - $\sin \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

١٨ - $\cos (3\pi - x)$

١٩ - $\operatorname{cosec} \left(A - \frac{7}{2}x\right)$

٢٠ - $\sin^4 x$

٢١ - $\sin x^6$

٢٢ - $\cos^3 (4x)$

٢٣ - $\sec x^2$

٢٤ - $\tan \sqrt{1-x}$

٢٥ - $a \sin nx + b \cos nx$

٢٦ - $B(1 - \cos x)$

٢٧ - $3 \tan \frac{x}{3}$

٢٨ - $\cos \left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

٢٩ - $\tan 3x - \tan^3 x$

٣٠ - $x^3 + 3 \sin \frac{x}{4}$

٣١ - $\cos \frac{a}{x}$

٣٢ - $2x\sin x$

٣٣ - $\frac{x}{2\sin x}$

٣٤ - $\sin^3(x^2)$

٣٥ - $2x\tan x$

٣٦ - $\frac{x}{3\tan x}$

٣٧ - $\frac{\tan x}{x}$

٣٨ - $\sin 3x + \sin(3x)^2$

٣٩ - $\cos^3(x^2)$

٤٠ - $x^2\tan x$

٤١ - $\cot(4x+1)$

٤٢ - $\frac{\sqrt{x}}{\sin x}$

٤٣ - $x^3\cos 2x$

٤٤ - $\frac{2}{2+\cos x}$

٤٥ - $\frac{1+\cos x}{1-\sin x}$

٤٦ - $\cot^2 3x$

٤٧ - $\sqrt[3]{\cos x}$

٤٨ - $\sin 2x\cos 2x$

٤٩ - $\sin^2 x - \cos^2 x$

٥٠ - $\sin^2 x + \cos^2 x$

٥١ - $\frac{x^2}{\cos 2x}$

٥٢ - $\frac{\sin^2 x}{1+\sin x}$

٥٣ - $\frac{\tan x - 1}{\sec x}$

٥٤ - $x\sqrt{\sin x}$

٥٥ - $3\sin(2\pi x)$

٥٦ - $\sec^2 x \operatorname{cosec} x$

٥٧ - $\frac{2}{2-\tan x}$

فاضل كل من الدوال التالية : –

٥٨ - $y = \sin 5x$

٥٩ - $y = \cos 4x$

٦٠ - $y = \sin x^2$

٦١ - $y = \cos^4 x$

٦٢ - $y = \sqrt{\sin 3x}$

٦٣ - $S = t^2\cos^2 t$

٦٤ - $S = \sin(t+2)\cos t$

٦٥ - $S = \frac{\sin 2t}{2t}$

٦٦ - $S = \frac{a+\cos t}{a-\cos t}$

٦٧ - $w = \frac{a-\tan z}{a+\tan z}$

٦٨ - $w = \sec 5z$

٦٩ - $w = \operatorname{cosec}(1-z)$

٧٠ - $y = z^3 \sec z$

٧١ - $w = \dfrac{\sec z}{1 + \sec z}$

٧٢ - $y = \dfrac{\sin^3 \left(1-x^2\right)}{x}$

أوجد y' في كل من المسائل التالية :-

٧٣ - $y \sin x + \cos (x+y)=0$

٧٤ - $x^2 \tan y + y \tan x=0$

٧٥ - $y^2 \sec x + \cos x^2 = 0$

٧٦ - فاضل عناصر المتطابقة التالية للحصول على متطابقة مثلثية جديدة : -

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

٧٧ - فاضل عناصر المتطابقة التالية للحصول على متطابقة مثلثية جديدة : -

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2 x$$

فاضل الدوال التالية : -

٧٨ - $y = x^2 \sin x$

٧٩ - $y = x^2 \tan x$

٨٠ - $y = \sqrt{x} \cot x$

٨١ - $y = \dfrac{\cos x}{1 + 2 \sin x}$

٨٢ - $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$

٨٣ - $y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$

٨٤ - $y = \cot^3 \dfrac{x}{3}$

٨٥ - $y = \sqrt{\theta + \cos^2 \left(2\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)}$

٨٦ - $y = \tan x + \dfrac{2}{3} \tan^3 x + \dfrac{1}{5} \tan^5 x$

٨٧ - $y = \cos^2 \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}\right)$

١١ – ١٠ : – التفاضل المتتالى للدوال المثلثية : – successive derivatives

لتكن $y = \sin x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$, \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$$

$$, \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$$

$$, \frac{d^4y}{dx^4} = \sin x$$

فإذا ما واصلنا هذه العملية فإن المشتقات السابق حسابها تستمر فى التكرار دون ما نهاية .

ونعلم من حساب المثلثات أن :–

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

وبذلك فإنه يمكن كتابة المشتقات المتتالية السابقة كالتالى : –

$$\because y = \sin x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$، \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left\{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$= \sin(x + \pi)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}[\sin(x + \pi)]$$

$$= \cos x (x+\pi) = \sin\left(x+\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$$

وسوف تستمر العملية هكذا وذلك بزيادة قدرها $\frac{\pi}{2}$ فى كل مرة وتظهر لنا دورياً دالـة الجيب مما يدعونا إلى الاستنتاج التالى : -

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

وبنفس الطريقة يمكن الحصول على التفاضل المتتالى للدالة $\cos\ x$ أما الدوال التالية فهى أكثر تعقيداً مثل : -

$\tan x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\cot x$

فبعد عدة تفاضلات ستُصبح العملية بحيث يصعب وضعها فى صيغة عامة

١١ - ١١ : - القيم العظمى والصغرى للدوال المثلثية :

Maximum and minimum values of trigonometric functions

(1) $y = \sin x$, $y = \cos x$

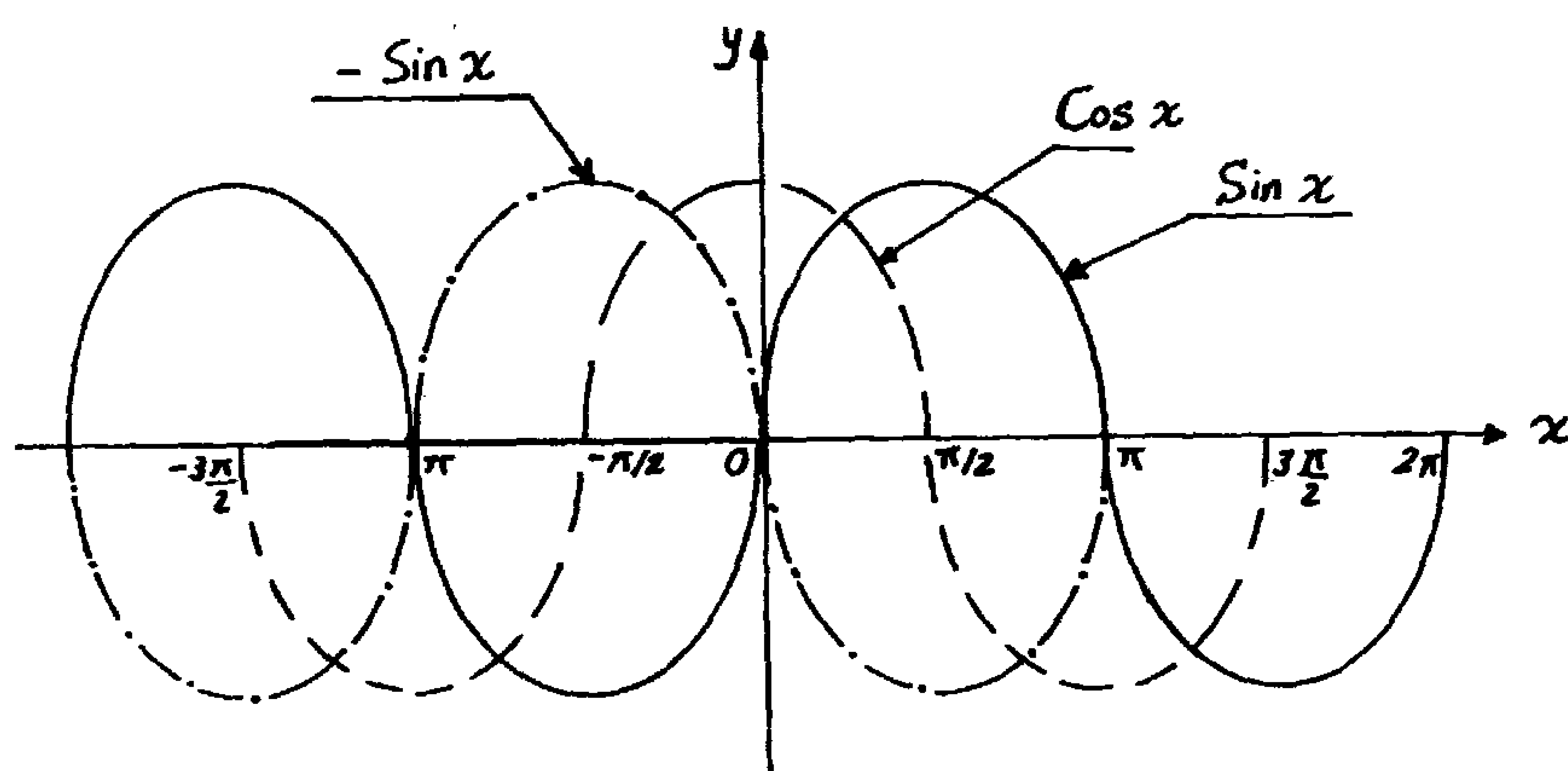
عندما تكون

(1) .... $y = \sin x$

(2) .... $\therefore \frac{dy}{dx} = \cos x$

(3) .... $, \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$

والشكل (١١-٤) يوضح هذه الدوال الثلاث فالمنحنى ذو الخـط السـميك هـو منحنـى $\sin\ x$ ، بينما الخط المتقطع يمثل $\frac{dy}{dx}$ فى حين يمثل الخط الرفيع $\frac{d^2y}{dx^2}$



شكل (١١ - ٤)

الدالة الدورية : - Aperiodic Function

حيث أن : $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ لذلك فإن جزء المنحنى فيما بين $x=0$ ، $x=2\pi$ سوف يتكرر لدورات أو لفترات مقدارها 2π كلما زادت x ونفس الشئ يتكرر فى الاتجاه السالب لمحور السينات $(x-axis)$.

وعليه فإن جزء المنحنى فيما بين $0 , 2\pi$ سوف يتكرر عدداً لا نهائياً من المرات فيما بين ($+\infty$, $-\infty$) وكلها متصلة على شكل منحنى موجى .

، الدالة $y = \sin x$ مثال لما يُطلق عليه بالدوال الدورية ، ويُطلق على العدد 2π بدورة الدالة .

وفيما يلى سنتعرض لشرح منحنى sin x بحيث يزداد وضوح ما سبق دراسته عن تزايد وتناقص الدوال:

(أ) أنواع تقوس المنحنى $\sin x$: -

نلاحظ من الرسم أن المنحنى فيما بين $0 , 2\pi$ يشتمل على أربعة أنواع من التقوس السابق شرحها فى الباب السابع بينما المنحنى الممثل للدالة $\frac{dy}{dx}$ فهو يوضح العلاقة بين صور التقوس هذه وإشارة المعامل التفاضلى .

(ب) نقط التحول على المنحنى $\sin x$: -

يتضح من الرسم أنه توجد نقطتا تحول فيما بين $x=0 , x=2\pi$ عند A , B وقيمها $+1 , -1$ على الترتيب

فعند A حيث $x = \frac{\pi}{2}$ ، $\frac{dy}{dx}=0$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}=(-ve)$

فإنه توجد نهاية عظمى

وعند B ، $x = \frac{3\pi}{2}$ ، $\frac{dy}{dx} = 0$ ، $\frac{d^2y}{dx^2} = (+ve)$

فإنه توجد نهاية صغرى .

وهذا الشئ يتكرر مع زيادة x كل فترة قدرها 2π من $-\infty$ إلى $+\infty$

وبالتالى فهنالك عدد لا نهائى من نقط النهايات العظمى والصغرى على التوالى .

(جـ) نقط الانقلاب على المنحنى $\sin x$: -

وفى خلال هذه الدورة (2π) توجد هنالك نقطتا انقلاب وهما (C , D)

فعند "C" يتغير المنحنى من مقعر للأسفل إلى مقعر للأعلى وتكون $\frac{dy}{dx}$ أقل ما يمكن (-1) بينما تكون $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ وتتغير من سالب إلى موجب .

وبالتالى فإن "C" تكون ذات أقل ميل ومقداره يعادل قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند هذه النقطة (-1)

أى أن المنحنى يعبر محور OX بزاوية $135° = \frac{3\pi}{4}$.

وعند نقطة "D" يحدث العكس حيث يتغير شكل المنحنى من مُقعر للأعلى إلى مقعر للأسفل وتكون $\frac{dy}{dx}$ أكبر ما يمكن ، $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ وتغير إشارتها من موجب إلى سالب

وبذلك فإن "D" تكون نقطة ذات أكبر ميل وهو يساوى $1 +$ ويقطع المنحنى المحور OX على زاوية $45° = \frac{\pi}{4}$ كما أنه توجد نقطة انقلاب عند $x = 0$ (نقطة الأصل) .

والشكل يُفسر كل ما هو مدون بجدول (٧ - ١) بالباب السابع .

أما بالنسبة لمنحنى $\cos x$ فهو نفسه منحنى $\sin x$ إلا أنه متحركا (منزاحًا) لليســـار على محور OX بمقدار $\frac{\pi}{2}$.

ويمثله فى الشكل السابق (١١ – ٤) منحنى $\frac{dy}{dx}$ المتقطع وهو يقطع محـور OX عنـد $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ ،...

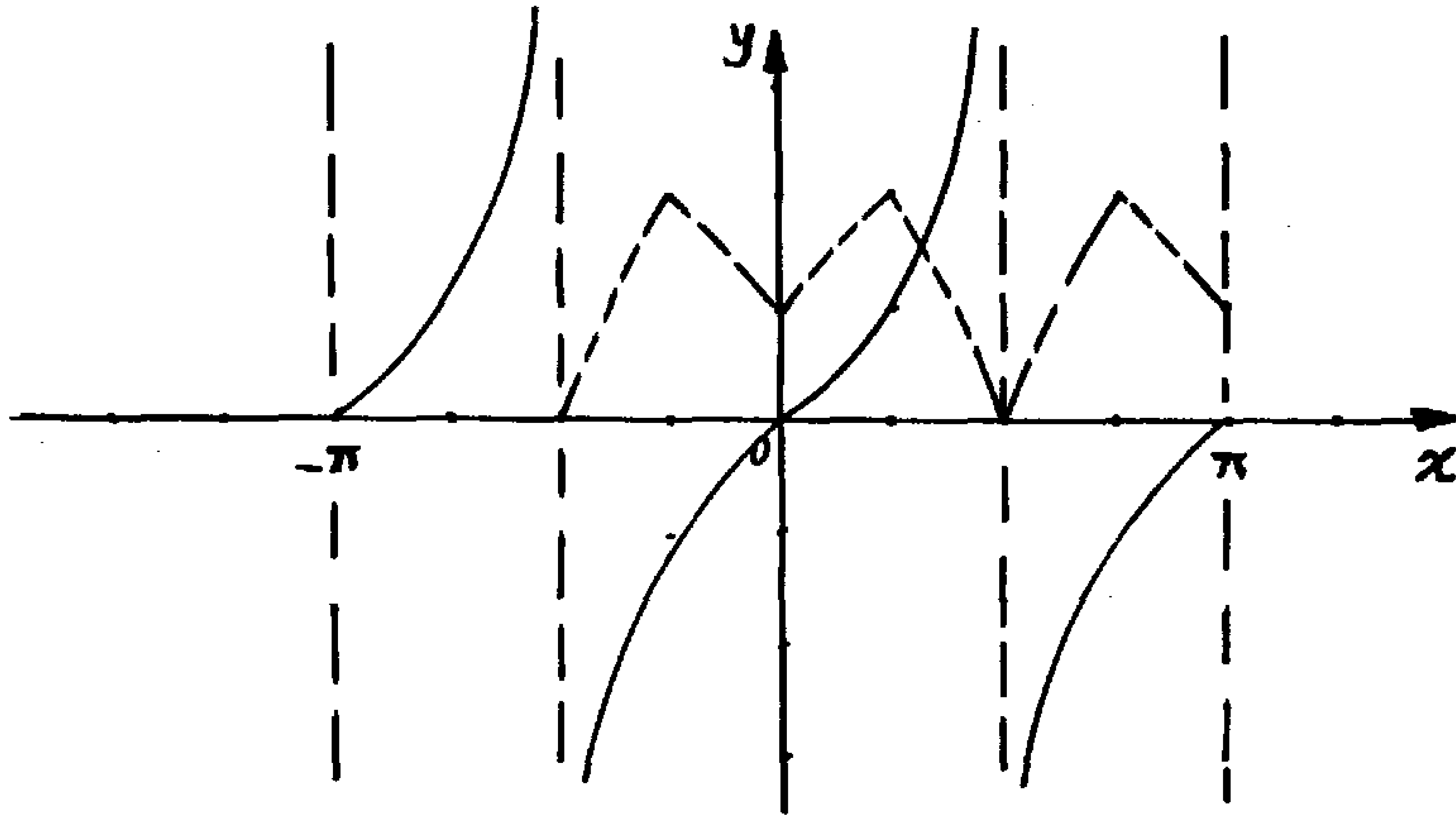
(2) $y = \tan x \quad , \quad y = \cot x$

$\because y = \tan x$ ، $\because y = \cot x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \sec^2 x \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x$

$, \frac{d^2y}{dx^2} = 2\sec^2 x \tan x \quad , \frac{d^2y}{dx^2} = 2\operatorname{cosec}^2 x \cot x$

ويوضح الشكل (١١ – ٥) منحنى $\tan x$ وكذلك منحنى مشتقتها الأولى $\sec^2 x$ (المتقطع بالشكل) .



شكل (١١ – ٥)

وفيما يلى بعض خواص منحنى $y = \tan x$: –

(أ) المنحنى غير متصل وعندما $x \to \frac{\pi}{2}$ فإن $\tan x \to +\infty$ وعند الاقتراب من $\frac{\pi}{2}$ فإن كل زيادة طفيفة فى x ينشأ عنها زيادة كبيرة فى قيمة y (تصل فى النهاية إلى ما لا نهاية) . وعند عبور $\frac{\pi}{2}$ فإن أى زيادة طفيفة فى x تؤدى إلى أن تكون الزاوية فى الربع الثانى وبذلك يكون الميل سالب ، بينما تبقى قيمته كبيرة جداً (لا نهائية) .

وتؤدى هذه الزيادة الطفيفة فى x إلى تغير قيمة y من $-\infty$ إلى $+\infty$.

وهذا هو السبب الرئيسى فى عدم استمرارية المنحنى واتصاله وتتكرر العملية عند $x = \frac{3\pi}{2}$ ، عند $x = \frac{5\pi}{2}$ ،... الخ .

(ب) منحنى $\tan x$ هو منحنى دورى ودورته مقدارها π .

(جـ) الدالة دائماً متزايدة بزيادة x وهذا يُعرف من أن $\frac{dy}{dx}$ وهى تساوى $\sec^2 x$ دائماً موجبة .

(د) توجد نقطة انقلاب عندما $x = \pi$ ويتغير شكل المنحنى من مقعر للأسفل إلى مقعر للأعلى ويكون المعامل التفاضلى أى $\sec^2 x$ أقل ما يمكن وبقيمة $= +1$.

وهذا يعنى أن المنحنى يقطع محور OX على زاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$ كما وتظهر نقط انقلاب أخرى عند $x = 0$ وعند أى مضاعفات صحيحة لـ π أى عند 0 ، π ، 2π ، 3π،....

وحيث أن $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ لذلك فإن منحنى $\cot x$ يكون معكوس أو مقلوب منحنى $\tan x$ ، فهو دائماً متناقص لأن $(-\operatorname{cosec}^2 x)$ دائماً سالبة كما أنه منحنى دورى كذلك وتكون نقط انقلابه عند $x = \frac{\pi}{2}$ ، $x = \frac{3\pi}{2}$ ،....

وعلى القارئ أن يحاول رسم هذا المنحنى كتدريب له

(3) $y = \operatorname{cosec} x \quad , \quad y = \sec x$

يمكن معرفة نقط تحول هذه المنحنيات من مقلوباتها التى سبق دراستها فعندما تكون $\sin x$ فى أقصى قيمة لها تكون $\operatorname{cosec} x$ فى أقل قيمها ، كما وأن هذه المنحنيات دورية وتظهر نقط النهاية العظمى والصغرى على التتابع .

فإذا كانت :

$$y = \text{cosec } x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\text{cosec } x \ \cot x$$

وعندما $x = \frac{\pi}{2}$ فإن $-\text{cosec } x = -1$ ، $\cot x = 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0$$

كما وأن $\frac{d^2y}{dx^2}$ تكون موجبة

وعليه فإنه توجد نهاية صغرى عندما $x = \frac{\pi}{2}$ ، وكلاً من المنحنيين غير متصلين ودوريين .

١١ - ٢ : - أمثلة محلولة : -

اوجد نقط التحول على المنحنى : -

$$y = \sin x + \cos x$$

الحـــل : -

$$\because y = \sin x + \cos x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos x - \sin x$$

وعند نقط التحول تكون $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore \cos x - \sin x = 0$$

$$\therefore \sin x = \cos x$$

$$\therefore \frac{\sin x}{\cos x} = 1 = \tan x = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4}$$

وهى أصغر زاوية فى سلسلة من الزوايا التى يكون الميل عندها $= +1$ وهـذه الزوايـا تجمعها صيغة رياضية عامة كالتالى : -

$$n\pi + \frac{\pi}{4}$$

وبوضع .... , $n = 0 , 1 , 2$

∴ الزوايا التى تظهر عندها نقط تحول فى الدالة المعطاة هى : $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \ldots$

$$\because \frac{d^2y}{dx^2} = -(\sin x + \cos x) \text{،}$$

وهى سالبة عندما تكون : $x = \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \ldots$

وتكون موجبة عندما تكون : $x = \frac{5\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}$

وواضح أن المنحنى دورى وتظهر قيمته العظمى والصغرى على التوالى كالتالى : –

أقصى قيم عند $x = \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \ldots$

أقل قيم عند $x = \frac{5\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \ldots$

وعندما تكون $x = \frac{\pi}{4}$ فإن أقصى قيمة للدالة :

$$\max\ value = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}$$

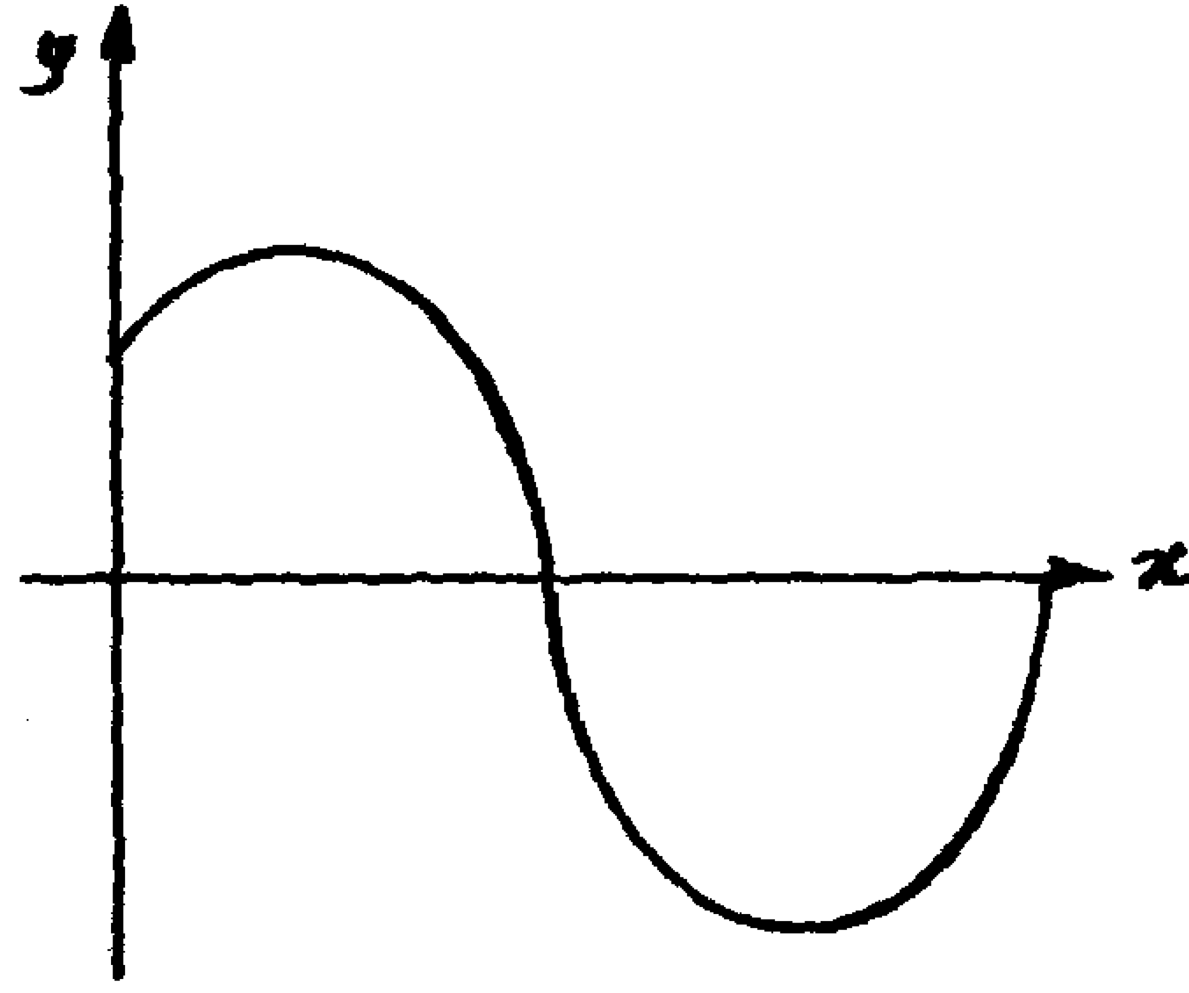
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

وبنفس الطريقة فإن أقل قيمة للدالة .

$$\min.\ value = \sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

ويوضح الشكل (١١ – ٦) ، المنحنى حيث P أقصى قيمة للدالـــة ، Q أقل قيمة وواضح أن A هى نقطة انقلاب .



شكل (١١ - ٦)

ويكون رسم المنحنى ، برسم منحنى sin x ، منحنى cos x ثـم يتـم جمـع المنحنيـين في منحنى واحد وذلك بجمع قيم y عند كل نقطة .

ومثل هذا المنحنى يعتبر مثال لما يُطلق عليه بالمنحنى الهـارمونى Harmonic Curve أو منحنى موجى Wave diagram .

وهى ذات أهمية كبيرة خاصة فى مجال الهندسة الكهربائية .

Exercise 12

عند أي قيم لـ x ، في خلال المدى $0<x<\pi$ توجد قيم عظمى أو صغرى للدوال التالية ثم حدد نوعيتها .

(١) $\sin 2x - x$

(٢) $\sin^2 x \cos^2 x$

(٣) $\sin x + \cos 2x$

(٤) $\sin x + \sin x \cos x$

(٥) $\dfrac{\sin x}{1 + \tan x}$

(٦) $2 \sin x + \cos x$

(٧) حدد أصغر قيمة لـ x والتي تجعل الدالة : -

$$2 \sin x + 3 \cos x$$

في أقصى قيمة لها .

(٨) حدد أصغر قيمة لـ x والتي تجعل الدالة : -

$$\tan^2 x - 2 \tan x$$

ذات قيمة عظمى أو صغرى .

الباب الثانى عشر

تفاضل الدوال المثلثية العكسية

Differentiation of The inverse trigonometric (circular) functions

١٢ - ١ : - عام :

إذا اعتبرنا الدالتين $y = \sin x$ ، الدالة $x = \sin y$

سنجد أن منحنى الدالة $y = \sin x$ يتموج حول محور السينات كما سبق وأن بينا .

وبنفس الطريقة سنجد أن منحنى الدالة $x = \sin y$ يتموج حول محور الصادات تماماً مثل المنحنى الأول عند إدارة المحاور حول نقطة الأصل بزاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$ فى عكس اتجاه عقارب الساعة .

وفى الدالة $y = \sin x$ حيث الجيب دالة فى الزاوية وعند تغير قيمة x فإن قيمة الجيب تتغير بالتبعية وهذا يعنى أن x هى المتغير المستقل بينما y هى المتغير التابع .

وفى الدالة $x = \sin y$ فإن الزاوية هنا دالة فى الجيب وبذلك فإن الجيب هنا هو المتغير المستقل بينما الزاوية x هى المتغير التابع وعليه فإنه عند تغير جيب الزاوية فإن x تتغير بالتبعية .

ويمكن التعبير عن الدالة $x = \sin y$ بالدالة $y = \sin^{-1} x$ ، y هنا تعنى الزاوية التى جيبها $= x$.

أى أن $x = \sin y$ هى نفسها $y = \sin^{-1} x$.

(-1)هنا لا تعنى أن الجيب مرفوعاً للأس (-1) مثل $\left[Z^{-1}\right.$ أو $\frac{1}{Z}$ ومثل Z^{-2}أو $\left.\frac{1}{Z^2}\right)$ ، ولكنها تعنى الدالة العكسية للجيب .

وبالمثل فإن كل الدوال المثلثية الأخرى لها دوال مثلثية عكسية مثل : -

$y = \cos^{-1} x , y = \tan^{-1} x , y = \sec^{-1} x , y = \cot^{-1} x , y = \mathrm{cosec}^{-1} x.$

١٢ - ٢ : - تفاضل الدالة $\sin^{-1} x , \cos^{-1} x$,

لتكن : $y = \sin^{-1} x$

$\therefore x = \sin y$

وبتفاضل x بالنسبة إلى y : -

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{\cos y}$$

$$,\because \sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

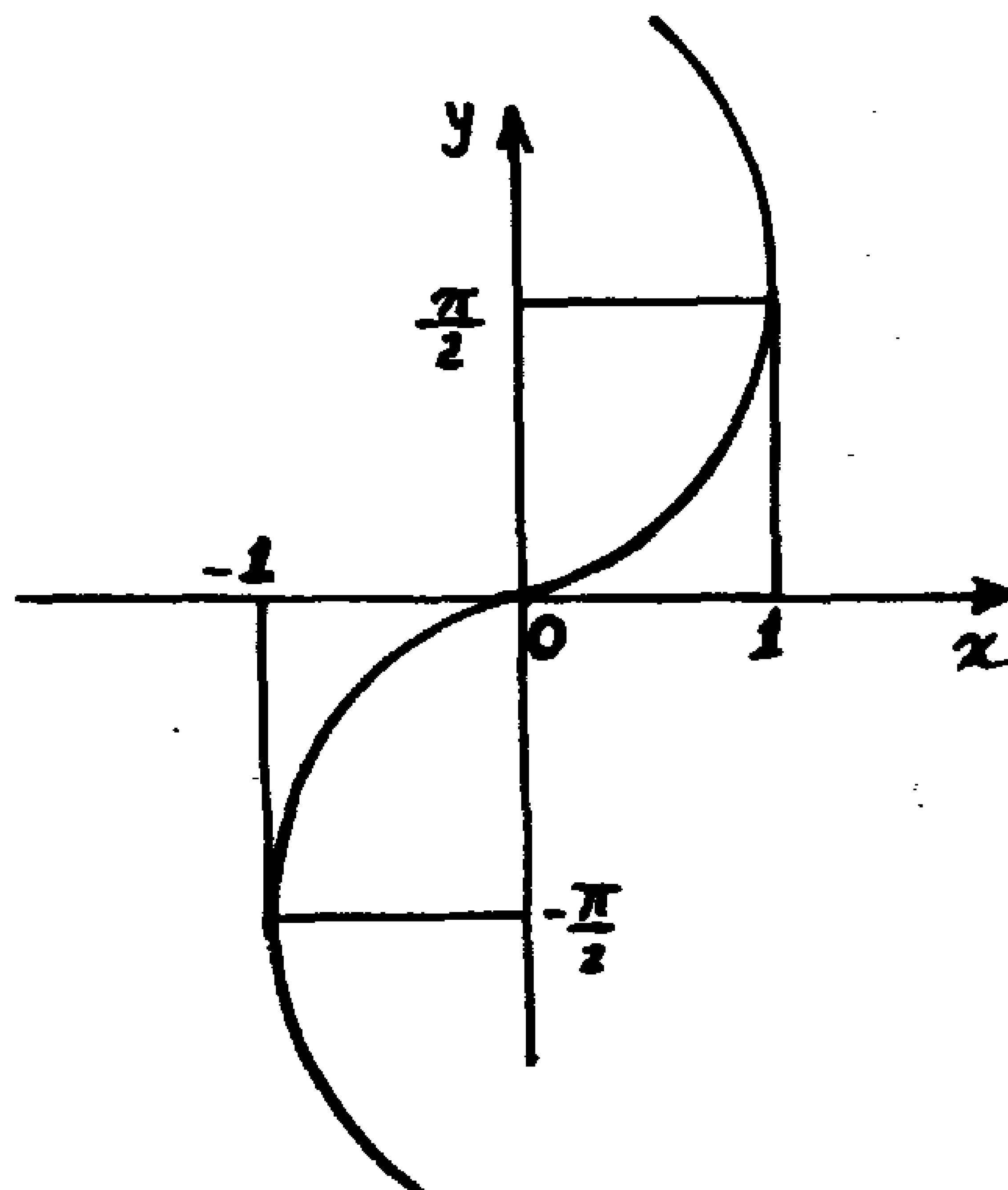
$$\therefore \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

وبالمثل فإنه إذا كانت : $y = \cos^{-1} x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

وبمساعدة رسم الدالة $y = \sin^{-1} x$ ، نلاحظ الآتى على هذه الدوال وعلى معاملاتها التفاضلية . ، انظر الرسم شكل (١٢ - ١) .



شكل (١٢ - ١)

(١) الدالة متعددة القيم بمعنى أنه لأى قيمة لـ x ، يوجد عدد لا نهائى لقيم y بينما الدالة $y = \sin x$ وحيدة القيمة حيث أنه لكل قيمة لـ x توجد قيمة واحدة لـ y وتساوى $\sin x$

(٢) حيث أن $\sin y$ تقع بين -1 , $+1$ لذلك فالدالة $\sin^{-1} x$ تكون موجودة فقط بين قيمتى x هذه

(٣) حيث أنه يوجد عدد لا نهائى من الزوايا لها نفس الجيب لذلك فإنه لأى قيمة لـ x تقع فيما بين $+1$, -1 ، يوجد عدد لا نهائى من النقاط على المنحنى . فمثلاً : -

إذا كانت $x = +\frac{1}{2}$ فإن قيم y عند $P , Q , R , \ldots$ تمثل ثلاث من الزوايا التى جيب كل منها $= +\frac{1}{2}$ وعند Q تكون الزاوية هى أصغر زاوية موجبة .

(٤) المعامل التفاضلى للمقدار $\sin^{-1} x$ وهو $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، يكون موجباً أو سالباً ، فبالرجوع للشكل (١٢ - ١) نجد أن كل النقط مثل Q حيث يكون ميل المنحنى ممثلاً فى المماس ، صانعاً زاوية حادة ، فإن $(d.c.)$ ، المعامل التفاضلى يكون موجباً .

بينما فى نقطة مثل P وكذلك R فإن زاوية ميل المماس تكون منفرجة وبالتالى فإن المعامل التفاضلى $(d.c.)$ يكون سالباً .

(٥) حيث أن x تقع بين $+1$, -1 ، لذلك فإن المقدار $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، لا يمكن أن ينعدم

" أى أن قيمة ما تحت الجذر دائماً أكبر من الصفر "

وبالتالى فإنه لا توجد نقط نهاية عظمى أو صغرى على المنحنى (مناظرة لقيم x التى تقل عن $+1$ وتزيد عن -1 أى $-1 < x < 1$)

وعندما تكون $x = \pm 1$ تماماً فإن قيمة المقدار : $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ تساوى الصفر مثل النقط A , B

حيث يكون مماس المنحنى عمودياً على محور $X`OX$

١٢ – ٣ : – تفاضل الدالة : – $\tan^{-1} x \; , \; cot^{-1} x$

إذا كانت

$$y = \tan^{-1} x$$
$$\therefore x = \tan y$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة إلى y

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \sec^2 y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

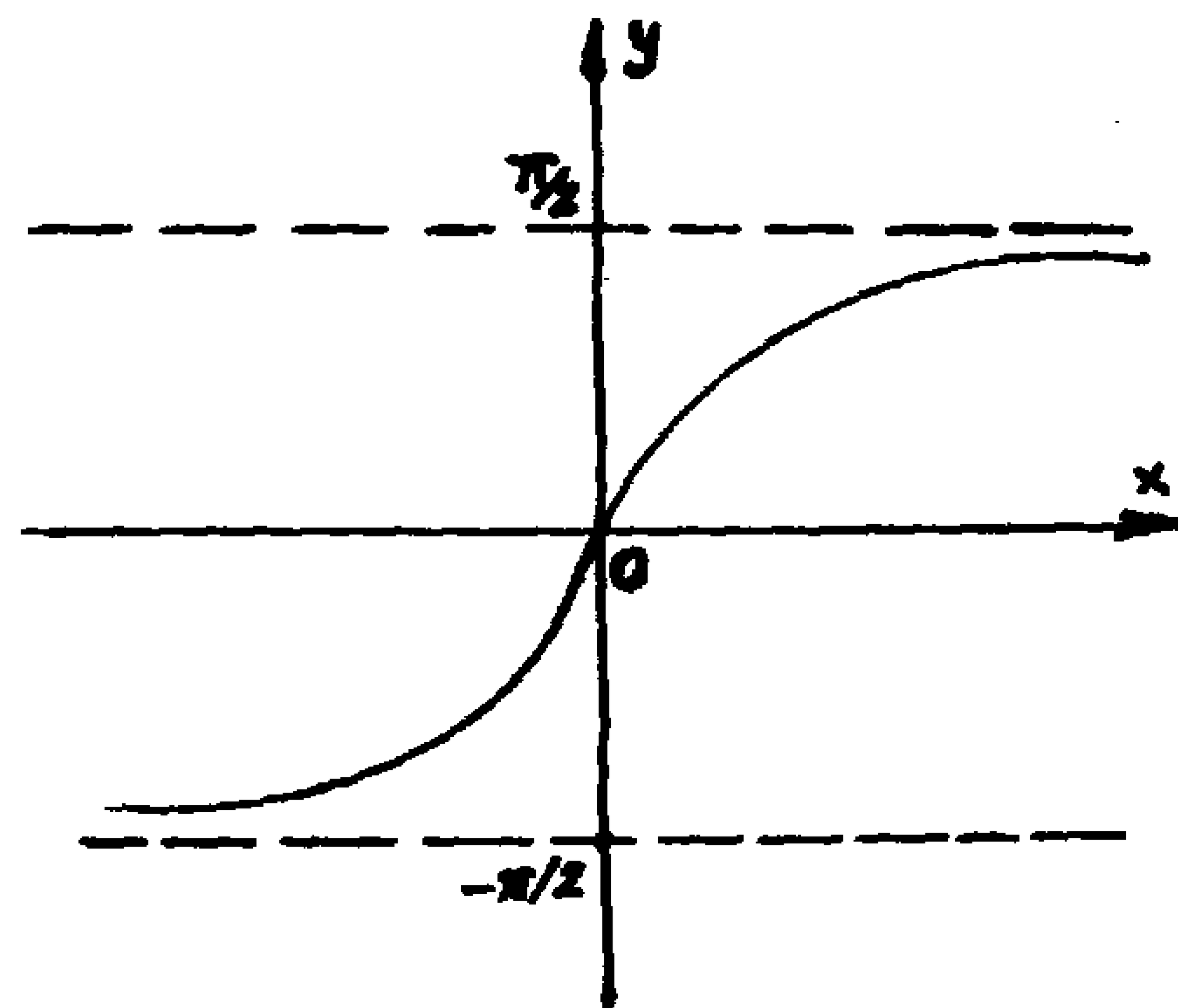
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

وبالمثل ، إذا كانت :

$$y = \cot^{-1} x$$
$$\therefore x = \cot y$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$$

وبمساعدة رسم الدالة $y = \tan^{-1} x$ ، نلاحظ الآتى على هذه الدوال : –

$\left[\tan^{-1} x , \cot^{-1} x\right]$ انظر الرسم شكل (١٢ – ٢) .



شكل (١٢ – ٢)

(١) $\frac{dy}{dx}$ دائماً موجبة ، وعليه فإن y دائماً تتزايد

(٢) $\frac{dy}{dx}$ لا تنعدم أبداً لأى قيمة لـ x وبذلك فلا توجد نقط تحول (عظمى أو صغرى)

(٣) تظهر نقط الانقلاب عندما : - $y = 0, \pi, 2\pi, -\pi, \ldots$ ويكون ميل المماس عندها موجباً .

كما وأن منحنى $y = \cot^{-1} x$ هو عكس هذا المنحنى (١٢ - ٢) حيث تكون $\frac{dy}{dx}$ دائماً سالبة وبالتالى فالدالة دائماً تتناقص ولا توجد نقط تحول (عظمى أو صغرى) ولكن توجد مجموعة من نقط الانقلاب عندما يكون الميل سالباً

ويمكن للقارئ أن يتدرب على رسم هذا المنحنى $(y = cot^{-1} x)$

١٢ - ٤ : - تفاضل الدالة : - $y = \sec^{-1} x, y = \operatorname{cosec}^{-1} x$

إذا كانت :

$$y = \sec^{-1} x$$

$$\therefore x = \sec y$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \sec y \tan y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}$$

ولكن :

$$, \tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

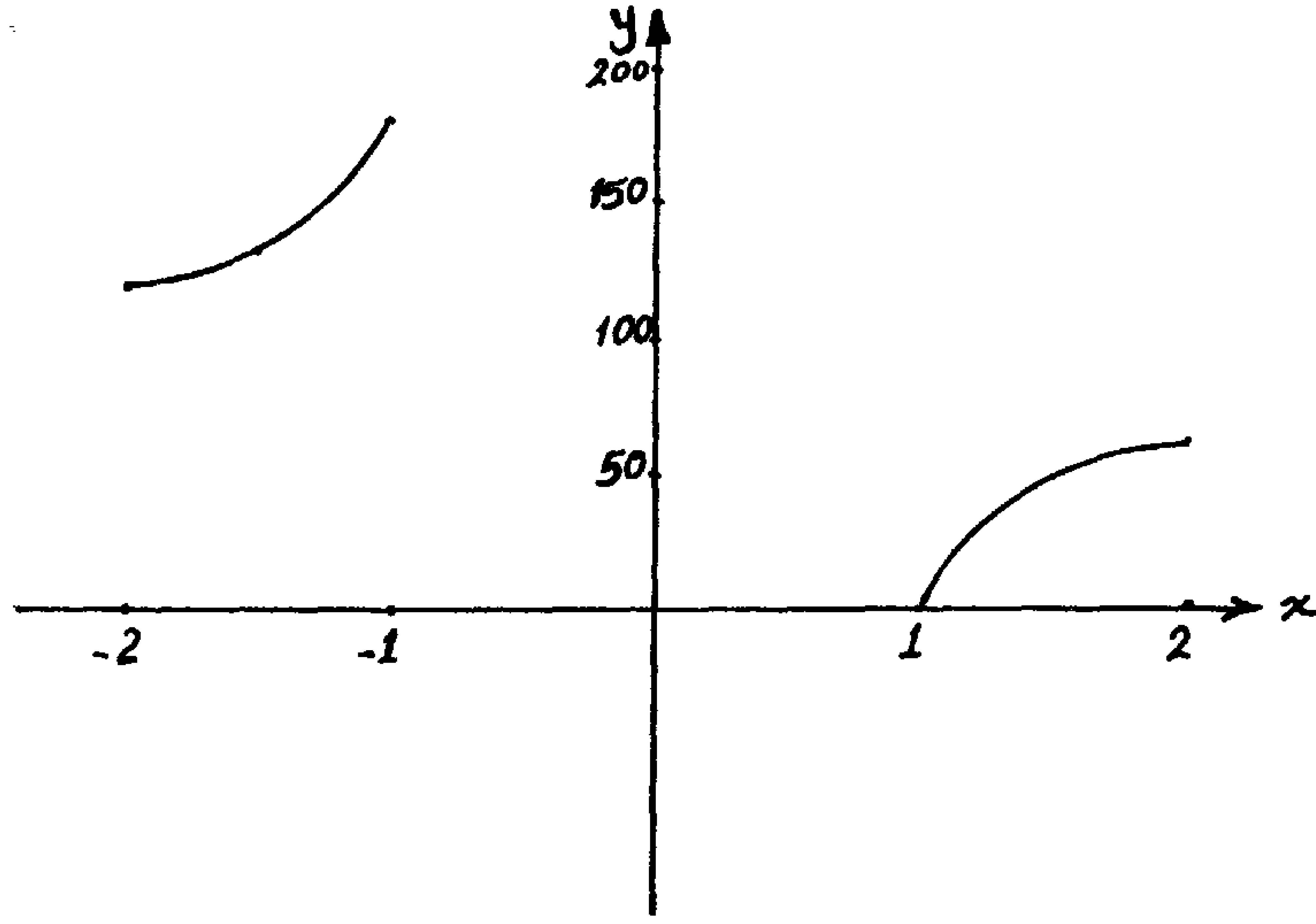
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

وبالمثل إذا كانت :

$$y = \operatorname{cosec}^{-1} x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

ويمثل الشكل (١٢ - ٣) ، أجزاء من هذا المنحنى $[y = \sec^{-1} x]$ ويلاحظ أنه متعدد القيم وغير متصل ولا يوجد أى جزء من المنحنى فيما بين قيم x : $(x \mp -1, x = +1)$ أى أن $-1 > x > +1$.



شكل (١٢ - ٣)

كما أن $\frac{dy}{dx}$ أى $\left(\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right)$ ؛ لا تنعدم لأى قيمة محددة لـ x وبذلك فلا توجد هنالك نقط تحول إلا أنه عندما تكون $x = \pm 1$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تصبح مساوية لما لا نهاية (أى المقام يصبح صفراً)

كما فى حالة منحنى $y = \sin^{-1} x$ وكذلك منحنى $y = \cos^{-1} x$

خلاصة : -

فيما يلى بيان لتفاضل الدوال العكسية المثلثية ، يمكن الرجوع إليها عند الحاجة إلا أنه يفضل (حفظها) كتفاضلات رئيسية .

الدالة	dy / dx
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot^{-1} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\sec^{-1} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\text{cosec}^{-1} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

جدول رقم (١٢ - ١)

ونذكر فيما يلي موجز لبيان مجال domain الدوال المثلثية العكسية "الستة" : -

$y = \sin^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$\frac{-\pi}{2} \le \sin^{-1} x \le \frac{\pi}{2}$
$y = \cos^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le \cos^{-1} x \le \pi$
$y = \tan^{-1} x$	$-\infty < x < \infty$	$\frac{-\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$
$y = \cot^{-1} x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < \cot^{-1} x < \pi$
$y = \sec^{-1} x$	$\lvert x\rvert \ge 1$	$0 \le \sec^{-1} x \le \pi$
$y = \text{cosec}^{-1} x$	$\lvert x\rvert \ge 1$	$\frac{-\pi}{2} \le \text{cosec}^{-1} x \le \frac{\pi}{2}$

جدول (١٢ - ٢)

كما يجب كذلك ملاحظة أن : -

$$\sin^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\tan^{-1}\frac{x}{a} = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

$$\sec^{-1}\frac{x}{a} = \frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\cos^{-1}\frac{x}{a} = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\cot^{-1}\frac{x}{a} = \frac{-a}{a^2 + x^2}$$

$$\operatorname{cosec}^{-1}\frac{x}{a} = -\frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$$

١٢ – ٥ : – أمثلة محلولة : –

(١) أوجد مشتقة الدالة : $y = \sin^{-1} x^2$

الحـــل : –

باستخدام قاعدة دالة الدالة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}} \times \frac{d}{dx}x^2$$

$$= \frac{2\,x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

(٢) اوجد مشتقة الدالة $y = \tan^{-1}\frac{1}{x^2}$

الحـــل : –

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}\times\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{x^4}}\times\frac{-2}{x^3}$$

$$=\frac{x^4}{x^4+1}\times\frac{-2}{x^3}=\frac{-2x}{x^4+1}$$

(٣) اوجد مشتقة الدالة $y = x^2 \sin^{-1}(1-x)$.

الحــــل : – باستخدام قاعدة حاصل الضرب :

$$\therefore \frac{dy}{dx}=2x\sin^{-1}(1-x)+x^2\times\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\times\frac{d}{dx}(1-x)$$

$$=2x\sin^{-1}(1-x)+\frac{x^2}{\sqrt{1-\left(1-2x+x^2\right)}}\times-1$$

$$=2x\sin^{-1}(1-x)-\frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$$

(٤) إذا كانت $y=\sin^{-1}\left(x^2-1\right)$ فاوجد $\frac{dy}{dx}$

الحــــل : –

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)}{\sqrt{1-\left(x^2-1\right)^2}}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}=\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$$

(٥) فاضل الدالة : $y=\left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)^3$

الحــــل : –

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)^2 \times \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)$$

$$= 3\left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)^2 \times \frac{\frac{d}{dx}\sqrt{x}}{1+x}$$

$$= \frac{3\left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$$

(٦) فاضل : − $y = x\cos^{-1}\frac{1}{x}$

الحـــل : −

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x\left(-1/x^2\right)}{\sqrt{1-1/x^2}} + \cos^{-1}\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{1-1/x^2}} + \cos^{-1} 1/x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \cos^{-1}\frac{1}{x}$$

(٧) أوجد تفاضل الدالة $y = arc\sin 4x$

الحـــل : −

$$\because arc\sin x \text{ means } \sin^{-1} x\,,\ u = 4x \ \therefore \frac{du}{dx} = 4$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\sin^{-1} 4x = \frac{d}{dx}\sin^{-1} u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}} \times 4$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$$

(٨) اوجد ميل الدالة : − $y = 4x\ arc\ \tan 2x$ عند النقطة $x = \frac{1}{2}$.

الحـــل : – لإيجاد ميل الدالة نوجد مشتقتها ، والدالة y هـى عبـارة عـن حـاصل ضرب دالتين فى x $[arc\ \tan 2x$ ، $4x]$ ولذلك نستخدم قـاعدة الضـرب فـى إيجـاد مشتقة هذه الدالة .

$$\frac{dy}{dx} = 4x\left[\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot\frac{d}{dx}(2x)\right] + arc\ \tan 2x \times \frac{d}{dx}(4x)$$

$$= \frac{8x}{1+4x^2} + 4\,arc\ \tan 2x$$

وبوضع $x = \frac{1}{2}$:

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4}{2} + 4\ arc\ \tan 1$$

$$= 2 + 4\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5.14$$

(٩) اوجد مشتقة الدالة : $y = \sqrt{arc\ \sin 2x}$

الحـــل : – لحل المسألة نستخدم القاعدة : –

$$\frac{d}{dx}\left(u^n\right) = n\,u^{n-1}\,\frac{du}{dx}$$

$$,\frac{d}{dx}\sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(arc\ \sin 2x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(arc\ \sin 2x)^{\frac{-1}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\right]2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{arc\ \sin 2x}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{arc\ \sin 2x - 4x^2\ arc\ \sin 2x}}$$

(١٠) اوجد مشتقة الدالة : $y = arc\ \tan\frac{x-a}{1+ax}$ **حيث** a **ثابت** .

الحـــل : – نستخدم فى حل هذه المسألة ، مشتقة الدالة العكسية للظل $(arc\ \tan)$:

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}u=\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

وكذلك قاعدة القسمة :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{V\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$,\frac{d}{dx}\left(arc\ \tan\frac{x-a}{1+ax}\right)=\left[\frac{1}{1+\left(\frac{x-a}{1+ax}\right)^2}\right]\left[\frac{(1+ax)(1)-(x-a)(a)}{(1+ax)^2}\right]$$

$$=\left[\frac{1}{1+\frac{x^2-2ax+a^2}{1+2ax+a^2x^2}}\right]\left[\frac{1+ax-ax+a^2}{1+2ax+a^2x^2}\right]$$

$$=\frac{1\ +\ a^2}{1+2ax+a^2x^2+x^2-2ax+a^2}$$

$$=\frac{1+a^2}{\left(1+a^2\right)\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{1+x^2}$$

(١١) اوجد تفاضل الدالة : $y=arc\ \sec\frac{x^2+1}{x^2-1}$

الحـــل : -

$$\because\frac{d}{dx}\sec^{-1}u=\frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

$$,\because\frac{d}{dx}\frac{U}{V}=\frac{V\frac{du}{dx}-U\frac{dv}{dx}}{V^2}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{x^2+1}{x^2-1}\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2-1}}$$

$$= \frac{\dfrac{(x^2-1)\,2x-(x^2+1)\,2x}{(x^2-1)^2}}{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\cdot\dfrac{2x}{x^2-1}}$$

$$= \frac{-2}{x^2+1}$$

(١٢) إذا علمت أن :

$$y=(x-a)\sqrt{2ax-x^2}+a^2\ arc\ \sin\frac{x-a}{a}$$

فاوجد $\frac{dy}{dx}$ **حيث** a **ثابت .**

الحــــل : – لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ نستخدم قاعدة السلسلة فـى الضـرب بالنسبة للحـد الأول ،

كما نستخدم القاعدة : –

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.\frac{du}{dx}$$

فى الحد الثانى .

أولا : –

$$\frac{d}{dx}\left[(x-a)(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=(x-a)\times\frac{1}{2}\,(2ax-x^2)^{\frac{-1}{2}}(2a-2x)+(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}\times 1$$

$$=\frac{(x-a)(a-x)}{\sqrt{2ax-x^2}}+\sqrt{2ax-x^2}$$

$$=\frac{(x-a)(a-x)+(2ax-x^2)}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$=\frac{-x^2+2ax-a^2\pm 2ax-x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$=\frac{2(-x^2+2ax)-a^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

ثانيا : - نوجد :

$$\frac{d}{dx}\left[a^2\ arc\sin\frac{x-a}{a}\right]$$

$$=a^2\left[\frac{1\left[\frac{1}{a}\right]}{\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{a}\right)^2}}\right]=\frac{a}{\sqrt{1-\left[\frac{x^2-2ax+a^2}{a^2}\right]}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{\frac{-x^2+2ax}{a^2}}}=\frac{a^2}{\sqrt{-x^2+2ax}}$$

وبجمع النواتج فى أولا وثانيا : -

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{2\left(-x^2+2ax\right)-a^2}{\sqrt{2ax-x^2}}+\frac{a^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$=\frac{2\left(-x^2+2ax\right)}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$=2\sqrt{2ax-x^2}$$

(١٣) عبر بالتقدير الدائرى عن الزوايا فيما يلى :

$$\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)\quad,\quad\tan^{-1}\sqrt{3}$$

$$,\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\quad,\quad\cot^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$$

الحـــل : -

$$\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{-\pi}{6}$$

$$,\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$$

$$,\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3\pi}{4}$$

$$,\cot^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$$

Exercise 13

عبر بالتقدير الدائرى عن كل من الزوايا فى المسائل التالية : –

(١) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

(٢) $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(٣) $\tan^{-1}(-1)$

(٤) $\tan^{-1}(0)$

(٥) $\operatorname{cosec}^{-1}(2)$

فى الزوايا التالية عبر عنها إلى أقرب درجة بالتقدير الستينى للزوايا .

(٦) $\sin^{-1}(-0.7839)$

(٧) $\sin^{-1}(0.2851)$

(٨) $\cos^{-1}(-0.3729)$

(٩) $\cos^{-1}(0.9247)$

(١٠) $\tan^{-1}(-0.8423)$

(١١) $\tan^{-1}(0.4385)$

(١٢) عبر عن $\cos^{-1}(-x)$ بدلالة $\cos^{-1}(x)$

فاضل الدوال التالية : –

(١٣) $\sin^{-1}(4x)$

(١٤) $\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

(١٥) $b\cos^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

(١٦) $b\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

(١٧) (أ) $y=\sin^{-1}\frac{x}{a}$

(ب) $y=\tan^{-1}\frac{x}{a}$

(١٨) $\sin^{-1}\sqrt{x}$

(١٩) $\cos^{-1}2x^2$

(٢٠) $\tan^{-1}(a-x)$

(٢١) $\sin^{-1}(2x-1)$

(٢٢) $\cos^{-1}(1-x)$

(٢٣) $x\sin^{-1}x$

(٢٤) $\sin^{-1}(3x-1)$

(٢٥) $\sin^{-1}\frac{1}{x}$

(٢٦) $\operatorname{cosec}^{-1}\frac{x}{2}$

(٢٧) $x^2\sin^{-1}x$

(٢٨) $\tan^{-1}\frac{x-1}{2}$

(٢٩) $\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(٣٠) $\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{2x^2-1}$

(٣١) $2\sec^{-1}ax$

(٣٢) $\tan^{-1}\sqrt{x}$

(٣٣) $\sec^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(٣٤) $\sec^{-1}\frac{x^2+1}{x^2-1}$

(٣٥) $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

(٣٦) $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

(٣٧) $\tan^{-1}\frac{2x+1}{3}$

$x^3 \cot^{-1} \frac{x}{3}$ (٣٨)

$\tan^{-1}(x+1)$ (٣٩)

$\sec^{-1} 5x$ (٤٠)

$\sin^{-1} \sqrt{\sin x}$ (٤١)

$(x^2+1)\tan^{-1} x$ (٤٢)

$\tan^{-1} \frac{x}{2-\sqrt{4-x^2}}$ (٤٣)

$\tan^{-1} \frac{x+1}{x-1}$ (٤٤)

$x^2 \cos^{-1}(1-x^2)$ (٤٥)

$x \tan^{-1} x$ (٤٦)

$\tan x \sin^{-1} x$ (٤٧)

$[\sin^{-1}(x^2-2)]^2$ (٤٨)

$\sin^{-1} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$ (٤٩)

$y=(2x^2-1)arc\cos\left(x-x\sqrt{1-x^2}\right)$ (٥٠)

الباب الثالث عشر

الدوال الأُسية واللوغاريتمية

Exponential and logarithmic functions

١٣-١ :- عام

وقد سبق لنا دراسة القوانين التالية فى الجبر الأولى ،

$$1-\ a^m\ a^n = a^{m+n} \qquad 4-\ \left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

$$2-\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad 5-\ (ab)^m = a^m\ b^m$$

$$3-\ \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \qquad 6-\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

وللتحدث عن الأسس الكسرية فإنه يلزم التعرض لجذور الأعداد ومن ثم يجب معرفة ما هو جذر العدد .

فإذا كان لدينا عددين b , a بحيث أن الأُس النونى (n) للعدد a [n عدد موجب] أى a^n يساوى b

فإنه يقال أن a هى الجذر النونى للعدد b أى أنه :-

$$if \quad a^n = b$$

$$\therefore \quad a = \sqrt[n]{b}$$

وكما نعلم فإن أى عدد لا صفرى *nonzero number* ، يكون له جذران تربيعيان وثلاثة جذور تكعيبية وأربعة جذور من الدرجة الرابعة وهكذا ؛

وتشتمل جذور الأعداد على قيم حقيقية وتخيلية .

فإذا فرضنا أن عدداً له جذر نونى واحد حقيقى فإنه يُطلق على هذا الجذر بالجذر النونى الرئيسى .

وعليه فإن الجذر التكعيبى الرئيسى للعدد ٢٧- هو ٣- بينما الجذران الآخران فهما تخيليان والجذر الرئيسى الرابع للعدد ١٦ هو ٢

كما وأن الجذور الزوجية الرتبة للأعداد السالبة تكون كلها تخيلية .

مثـل : $\sqrt{-9}$, $\sqrt[4]{-256}$ ، وفى هذه الحالات فإنه لا يمكننا أخذ وتحديد أحد الجذور كجذر رئيسى للعدد السالب .

وعموماً فإن $\sqrt[n]{a}$ يرمز للجذر الرئيسى النونى للعدد a

فإذا ما افترضنا أن m عدداً موجباً أو سالباً وأن n عدداً موجباً.

وأن a عدداً موجباً ، عندما تكون n عدداً زوجياً .

فإذا كانت a عدداً موجباً أو سالباً وكانت n عدداً فردياً . فإنه :- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

وبعد هذا التقديم السريع للأسس ، فإن الطريق يصبح مفتوحاً أمامنا ، لدراسة اللوغاريتمات والتعرف على خواصها .

تعـريف :- إذا كانت b عدداً موجباً خلاف الواحد ، وأن y عدد حقيقى فى المعادلة :-

$$x = b^y$$

فإن y تُعرف بأنها لوغاريتم x للأساس b

أى أن لوغاريتم العدد x ، هو الأُس الذى يرفع له عدد ما (الأساس) لكى يصبح مساوياً للعدد x

أى أن y وهى اللوغاريتم للعدد x هى الأس الذى يرفع إليه العدد y لكى تصبح النتيجة هى العدد x .

وتكتب : $y = Log_b\ x$ أى أنه يتم التعبير عن معنى y هذا بكتابة $Log_b\ x$

وبذلك فإن :- $b^y = x \quad , \quad y = Log_b\ x$

تُعبر عن نفس العلاقات الرابطة بين b , x , y والصورة $b^y = x$ هى معادلة فى الصورة الأُسية بينما $y = Log_b\ x$ هى معادلة فى الصورة اللوغاريتمية .

ونذكر هنا ثلاثة قوانين هامة للوغاريتمات والتى يتم استنتاجها من قوانين الأسس :-

$$Log_b\ MN = Log_b\ M + Log_b\ N$$

$$, Log_b\ \frac{M}{N} = Log_b\ M - Log_b\ N$$

$$, Log\ M^p = p\ Log_b\ M$$

ويوجد نظامان للوغاريتمات يستخدمان بكثرة فى الرياضيات ؛

فى النظام الأول (اللوغاريتمات العددية) الأساس هو العدد ١٠ وتستخدم فى الحسابات .

أما فى الأعمال النظرية وحساب التفاضل فإنه يفضل استعمال أساس آخر خلاف الرقم ١٠ وهو ما يرمز له بالرمز e وهو عدد تقريبى ويرمز لهذه اللوغاريتمات باللوغاريتمات الطبيعية كما سيرد بالتفصيل فيما بعد ؛

$$, e = \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

سبق لنا دراسة قانون الفائدة البسيطة والفائدة المركبة وفى نظام استثمار الأموال بالفائدة البسيطة فإن رأس المال يبقى ثابتاً من عام لآخر دون أى زيادة .

إلا أنه فى نظام الاستثمار بالفائدة المركبة فإن الأرباح تضاف إلى رأس المال فى نهاية العام (أو كل فترة متفق عليها) ويصبح رأس المال للعام التالى عبارة عن رأس المال السابق مضافاً إليه ربح العام (أو الفترة) وهكذا ، .

فإذا افترضنا أن :- رأس المال المستثمر $= p$

النسبة المئوية للربح فى العام $= r$

وبذلك يكون الربح المضاف عند نهاية السنة الأولى $= p \times \frac{r}{100}$

∴ رأس المال عند نهاية السنة الأولى $= p + \frac{pr}{100}$

$$= p\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

ويعتبر هذا المبلغ رأس المال الجديد للعام التالى وبنفس الطريقة كما اتبعنا فى العام الأول :-

∴ رأس المال عند نهاية السنة الثانية $= p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$

، رأس المال عند نهاية السنة الثالثة $= p\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$

، رأس المال عند نهاية السنة t $= p\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$

فإذا افترضنا أن الفائدة تضاف عند نهاية كل نصف عام بدلاً من عند نهاية العام :-

∴ رأس المال المستثمر عند نهاية نصف العام الأول $= p\left(1+\frac{r}{2\times 100}\right)$

، رأس المال المستثمر عند نهاية العـــام الأول $= p\left(1+\frac{r}{2\times 100}\right)^{2}$

، رأس المال المستثمر عند نهاية العـــام الثانى $= p\left(1+\frac{r}{2\times 100}\right)^{4}$

، رأس المال المستثمر عند نهاية العـــام t $= p\left(1+\frac{r}{2\times 100}\right)^{2t}$

أما إذا أضيفت الأرباح بمعدل ٤ مرات سنوياً :-

∴ رأس المال المستثمر فى نهاية العام الأول $= p\left(1+\frac{r}{4\times 100}\right)^{4}$

، رأس المال المستثمر فى نهاية العام t $= p\left(1+\frac{r}{4\times 100}\right)^{4t}$

وبالمثل إذا ما أضفنا الفائدة بمعدل ١٢ مرة سنوياً أى مرة كل شهر :-

∴ رأس المال المستثمر فى نهاية العام t $= p\left(1+\frac{r}{12\times 100}\right)^{12t}$

وإذا أضفنا الأرباح m من المرات فى العام :-

فإن رأس المال المستثمر فى نهاية العام t $= p\left(1+\frac{r}{m\times 100}\right)^{mt}$

ولنفترض أن :-

$$\frac{r}{m\times 100}=\frac{1}{h}$$

$$\therefore m=\frac{nr}{100}$$

∴ رأس المال المستثمر فى نهاية العام t $= p\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{nrt}{100}}$

$$= p\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{rt}{100}}$$

فإذا ما افترضنا أن n أصبحت كبيرة جداً جداً أى أن الفائدة تُضاف عند نهاية فترات زمنية صغيرة جداً جداً بحيث أن عملية نمو رأس المال تبدو كما لو كانت متصلة (بعكــس الوضـع السابق فهى ساكنة طوال العام أو الفترة ثم تزيد فجأة فى نهايتها) .

وعليه فإن الكمية التى يصل لها رأس المال تصبح عبارة عن نهاية المقدار :-

$$p\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{rt}{100}}$$

وذلك عندما تصبح n كبيرة جداً .

ولإيجاد ذلك فإنه يلزم إيجاد نهاية $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ عندما تقترب n من ∞ أي $n \to \infty$

$$\therefore \text{المقدار} = p\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{rt}{100}}$$

وسنبدأ فيما يلى فى إيجاد نهاية المقدار $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ عندما $n \to \infty$

٢-١٣ :- قيمة $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

نقوم بفك هذا المقدار بنظرية ذات الحدين Binomial theorem :-

$$\therefore \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{\lfloor 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots\ldots$$

ثم نختصر بحذف n^5 فى البسط مع n^5 فى المقام :-

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3} + \ldots$$

$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\ldots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}{\lfloor r} + \ldots\ldots$$

ونهاية المقدار $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ هى بلا شك عبارة عن مجموع نهايات هذه الحدود مجتمعة ، وذلك كالتالى :-

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\lfloor 2} = \frac{1}{\lfloor 2}$$

$$, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3} = \frac{1}{\lfloor 3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) \;\cdots\cdots\; (1-\frac{r-1}{n})}{\lfloor r} = \frac{1}{\lfloor r}$$

وهكـــذا .

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\ldots\ldots\frac{1}{\lfloor n}$$

وبذلك فإن النهاية عبارة عن متوالية لا نهائية ، إلا أنه يمكن إثبـات أنـه إذا زاد عـدد الحـدود بدون حد (زيادة لا نهائية)

فإن مجموع كل مـن الحـدود يقترب مـن نهايـة محـددة . أى أن المتواليـة تقاربيـة ، وقـد تـم حساب قيمتها بدرجة بالغة الدقة ويمكن حسابها بدرجة الدقة المطلوبـة (تـزداد الدقـة كلمـا جمعنا عدداً أكبر من الحدود) .

ويمكن حسابها بحساب كل حد على حدة وذلك بقسمة البسط على المقام .

الحد الأول	=	١,٠٠٠٠٠٠	
الحد الثانى	=	١,٠٠٠٠٠٠	
الحد الثالث	=	٠,٥٠٠٠٠٠	(بقسمة الحد الثانى ÷ ٢)
الحد الرابع	=	٠,١٦٦٦٦٧	(بقسمة الحد الثالث ÷ ٣)
الحد الخامس	=	٠,٠٤١٦٦٧	
الحد السادس	=	٠,٠٠٨٣٣٣	
الحد السابع	=	٠,٠٠١٣٨٩	
الحد الثامن	=	٠,٠٠٠١٩٨	
الحد التـاسع	=	٠,٠٠٠٠٢٥	
الحـد العاشـر	=	٠,٠٠٠٠٠٣	
∴ مجموع عشرة حدود	=	٢,٧١٨٢٨٣	

وبذلك فإن قيمتها لأقرب خمسة أرقام عشرية : ٢,٧١٨٢٨

وهذا الرقم الثابت يرمز له بالحرف e (أو "هـ")

وتعرف بالقيمة التقريبية ؛

$$i.e: \quad e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\ldots\ldots$$

فإذا رمزنا لقيمة المقدار : $p\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{rt}{100}}$ بالمقدار A باعتبار أن إضافة الربح مستمرة على فترات صغيرة جداً ، بعد t من السنوات وبأن n تصبح كبيرة جداً :-

$$\therefore A = p\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{rt}{100}}$$

وبوضع $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\therefore\ A = p\, e^{\frac{rt}{100}}$$

وبوضع $x = \frac{rt}{100}$

$$\therefore\ A = p\, e^x$$

وتُعرف e^x بالدالة الأسية الطبيعية وذلك لأن الأس هو المقدار المتغير فى الدالة(e = ثابت) وهنا يلزم أن نُفرق بين الدوال العادية التى سبق التعرض لها فى هذا الكتاب وبين الدوال الأسية واللوغاريتمية التى هى أساس هذا الباب .

فالدوال العادية مثل :- $y\,,\ y = x^5$ المتغير التابع ، x هى المتغير المستقل [والأساس هو x متغير والأس ٥ = ثابت]

وعند دراسة القوى فى هذه الحالة ، نلاحظ الأساس (x) فعندما يكون الأساس واحداً فإنه يتم جمع القوى عند الضرب وطرحها عند القسمة وضربها عند الرفع إلى قوى أعلى كالتالى:-

$$x^m \;.\; x^n = x^{m+n}$$
$$,\, x^m \div x^n = x^{m-n}$$
$$,\, [x^m]^n \quad = x^{mn}$$

ـ أن الدوال الأسية العادية هى تلك الدوال التى يكون الأساس فيها متغير والقوة أو الأس ابت ؛ $[y = x^5]$ فيها x الأساس متغير والقوة ٥ ثابتة . أى أن x يمكن أن تتغير بينما قوة ثابتة ومثل $y = 5\,(\sin\, x)^2$

ينما الدوال الأسية الطبيعية أو موضوع هذا الباب ، فهى الدوال التى تكون قيمة الأساس فيها ثابتة بينما القوة أو الأس متغيرة .

مثل $y = e^x$ [e ثابت ، x متغير]

ومثل $y = a^{(x^2 - 5x)}$

وتبين هذه الدوال النمو فى ظاهرة معينة فى فترات زمنية متتالية سنة ، سنتين ، .... أو شهر وشهران ....

ويمثل هذا النوع من الدوال معدلات نمو ظاهرة معينة بصورة منتظمة ومستمرة أى تلك التى يكون فيها النمو جارياً بصورة مستمرة وليس فى فترات غير متصلة كسنوات أو شهور أو أسابيع مثل حسابات البنوك .

والنمو المتواصل المستمر وليس المتقطع على فترات يكون مثل ظاهرة تآكل الشواطئ ونمو السكان فى مجتمع ما وزيادة وزن الحيوانات مع زيادة التغذية .

وفى كثير من الظواهر الكيميائية والفيزيائية وفى الهندسة الكهربائية نجد أن القيمة التقريبية [هـ = e = ٢,٧١٨٢٨] ذات أهمية كبيرة رياضيا ، لأن هذه الظواهر كثيرا ما تربطها علاقات تحتوى على دوال أسية .

ويمكننا الآن التعبير عن الدالة e^x كمتسلسلة تحتوى على قوة متزايدة تصاعدية فى x ، لأنها تبين أن القيمة التقريبية e إذا رفعت لأى قوة x مثلاً فإن الناتج يكون عبارة عن متسلسلة تقاربية **convergent**

ولهذا تستخدم e كأس للوغاريتمات الطبيعية كما سيرد فيما بعد ، .

$$\because e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\therefore e^x = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$$

وبفك هذا المقدار بنظرية ذات الحدين :-

$$\therefore \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + nx\,.\frac{1}{n} + \frac{nx\,(nx-1)}{\lfloor 2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$+ \frac{nx\,(nx-1)\,(nx-2)}{\lfloor 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots.$$

$$= 1 + x + \frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2} + \frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3} + \ldots.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots.$$

$$i\,.\,e \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots..$$

وكما هو واضح فهى متسلسلة تقاربية ، فإذا ما وضعنا $(-x)$ بدلاً من (x) :-

$$\therefore e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{\lfloor 2} - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots..$$

وبالمثل فإن :-

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2\,x^2}{\lfloor 2} + \frac{a^3\,x^3}{\lfloor 3} + \frac{a^4\,x^4}{\lfloor 4} + \ldots.$$

$$,\, e^{-ax} = 1 - ax + \frac{a^2\,x^2}{\lfloor 2} - \frac{a^3\,x^3}{\lfloor 3} + \frac{a^4\,x^4}{\lfloor 4} + \ldots..$$

١٣-٣ :- تفاضل e^x :-

يمكن إجراء وإيجاد تفاضل e^x بسهولة وذلك بوضع مفكوك e^x ثم نفاضله حداً حداً :-

$$\because e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} + \ldots.$$

$$\therefore \frac{d}{dx} e^x = 0 + 1 + \frac{2x}{\underline{|2}} + \frac{3x^2}{\underline{|3}} + \frac{4x^3}{\underline{|4}} + \ldots..$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \ldots...$$

وهى نفسها مفكوك e^x

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$$

وهذه الخاصية أى أن المعامل التفاضلى للمقدار e^x يساوى نفس المقدار أى e^x لا تتوفر فى أى دالة أخرى فى x

وبالمثل فإنه إذا كانت $y = e^{-x}$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) = -e^{-x}$$

وكذلك إذا كانت : $y = e^{ax}$:-

$$\therefore y' = a\, e^{ax}$$

وإذا كانت :- $y = e^{-ax}$:-

$$\therefore y' = -a\, e^{-ax}$$

كما وأنه يمكن إيجاد تفاضل e^x باستخدم المبادئ الأولية .

$$\because y = Log_b\ x$$

$$\therefore y + \Delta y = Log_b\ (x + \Delta x)$$

$$\therefore \Delta y = Log_b\ (x + \Delta x) - Log_b\ x$$

$$= Log_b \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} Log_b \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} Log_b \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} Log_b \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

ويلاحظ أن $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ فى الصورة $(1+h)^{\frac{1}{h}}$

وعليه فإن :-

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to u}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\, Log_b\, e$$

فإذا ما كانت u دالة قابلة للتفاضل فى x فيمكننا كتابة :-

$$\frac{d}{dx}(Log_b\, u) = \frac{1}{u}\, Log_b\, e \,.\, \frac{du}{dx}$$

وإذا ما وضعنا b = e فإن :- $Log_e\, e = 1$ ، وسوف نستخدم الرمز Ln بدلاً من Log والرمز Ln هنا يعنى الأساس e

$$\therefore \frac{d}{dx}(Ln\, u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

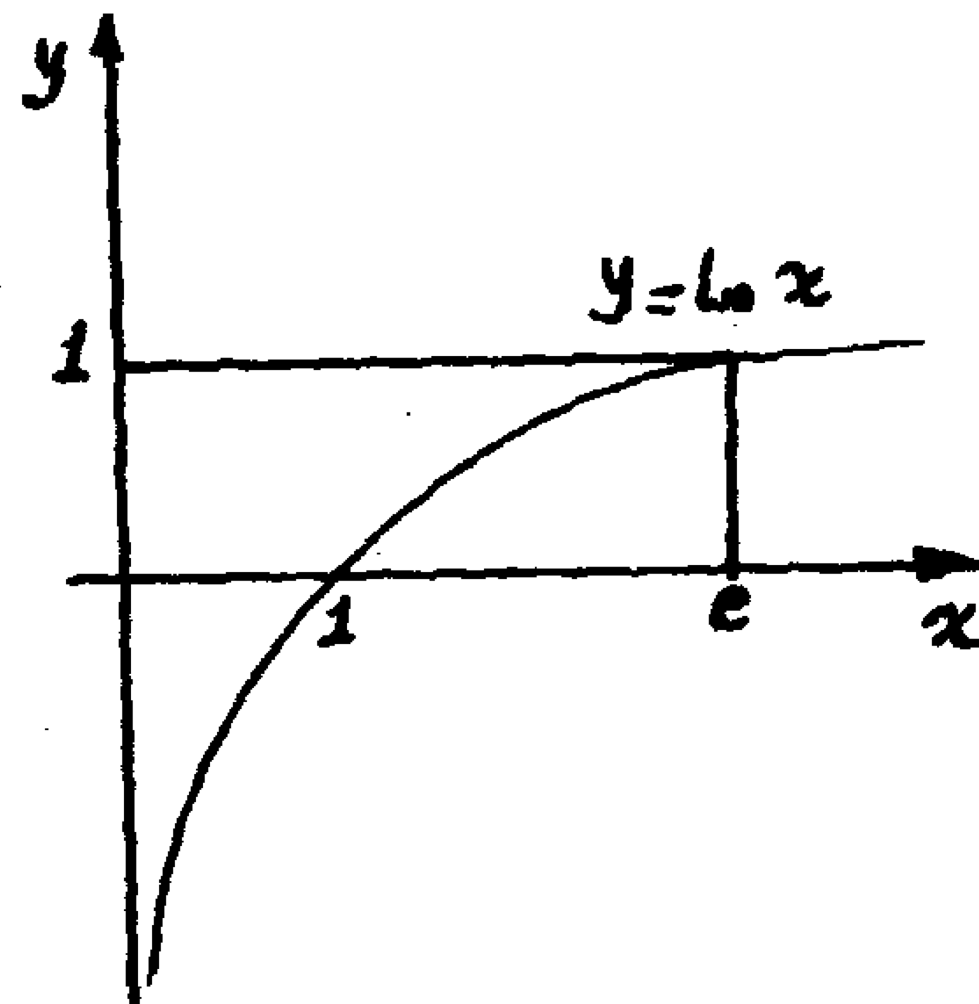
ويمكننا بيان أن ميل المنحنى $y = Ln\, x$ ، يكون موجباً دائماً وأن المنحنى مُقعر للأسفل ، وبإجراء التفاضل للدالة :-

$$y = Ln\, x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \qquad , \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{x^2}$$

وحيث أن مدى أو مجال $y = Ln\, x$ دائماً أكبر من الصفر $(x > 0)$ ، فإن المشتقة الأولى وبالتالى ميل المنحنى يكون موجباً دائماً

كما أن الإشارة السالبة للمشتقة الثانية تؤكد أن التقعر للأسفل ويوضح هذا الشكل (١٣-١) .



شكل (١٣-١)

١٣-٤ : رسم منحنى e^x , e^{-x} :-

إذا كانت

$$y = e^x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^x \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^x \ ,$$

وحيث أن $\frac{dy}{dx}$ دائماً موجبة فإن منحنى الدالة e^x يكون موجباً وفى زيادة دائمة وبذلك فليس عليه نقط تحول .

وحيث أنه كذلك $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$ فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ لا تتلاش أبداً عند أى قيم محددة لـ x وعليه فإنه لا توجد نقط انقلاب على المنحنى

وبالمثل :

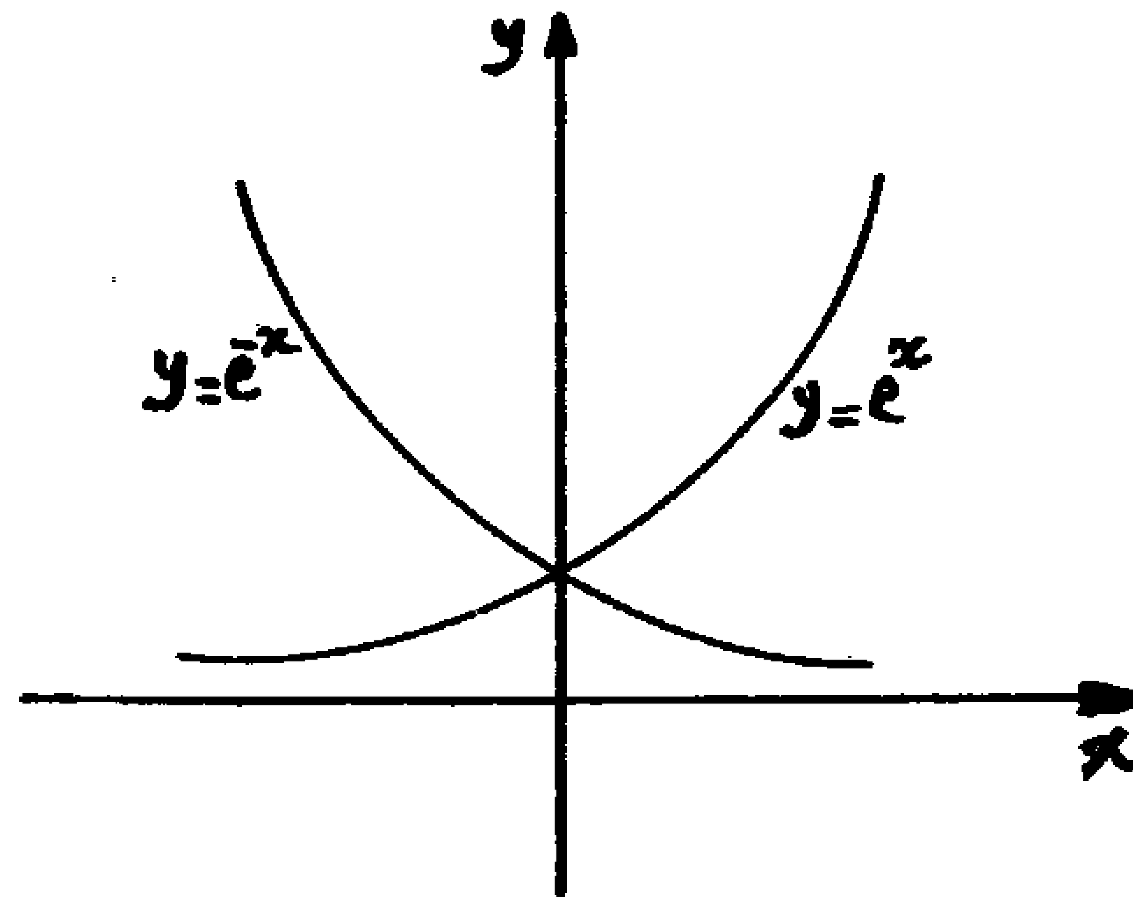
$$y = e^{-x}$$

$$y' = -e^{-x} \quad , \quad y'' = e^{-x}$$

وبذلك فإن y' دائماً متناقصة وبالتالى فإن المنحنى يكون سالباً (متناقصاً) ولا توجد نقط تحول ، كما أنه لا توجد نقط انقلاب .

ويوضح الشكل منحنى كل من e^x , e^{-x} .

انظر الرسم شكل (١٣-٢) .



شكل (١٣-٢)

ويوضح شكل e^x الزيادة المستمرة فى الدالة (كما فى حالة الفائدة المركبة) بينما يوضح شكل e^{-x} التناقص المستمر فى الدالة مثلما يحدث فى التفاعلات الكيميائية وفى الفيزياء ، مثلما يحدث فى حالة فقد الحرارة المستمر عند تبريد جسم (كمثال)

١٣-٥ :- " اللوغاريتمات النابييرية ، اللوغاريتمات الزائدية " أو اللوغاريتمات الطبيعية

' Napierian , Hyperbolic ' or Natural Logarithms

اللوغاريتم هو القوة التى نرفع لها أساس معين لنحصل على عدد معين فمثلاً

$$4^2 = 16$$

الأساس المعين = ٤ ، القوة هى ٢ والعدد المعين = ١٦

ولذلك تعرف ٢ بأنها لوغاريتم العدد ١٦ للأساس ٤

وبالمثل : ٣ هى لوغاريتم $[5^3 = 125]$ للأساس ٥

، ٦ هى لوغاريتم $[2^6 = 64]$ للأساس ٢

إلا أنه من المتعارف عليه تثبيت الأساس وجعله ١٠ وتُعرف اللوغاريتمات للأساس ١٠ باللوغاريتمات العادية

وحيث أنه قد تم التعارف على جعل الأساس ١٠ ، لذلك لا يتم كتابته عند استخدام هذه اللوغاريتمات العادية .

فمثلاً : عند أخذ لوغاريتم ١٠٠ للأساس ١٠ ، تكتب هكذا $Log\ 100 = 2$

أى أن ٢ هى أس المقدار ١٠ (الأساس) لكى يصبح المقدار = ١٠٠

$Log\ 10 = 1 \quad , \quad Log\ 1 = 0$

ولما كان $Log\ 10 = 1$ ، $Log\ 100 = 2$ لذلك فإن لوغاريتم أى عدد يقع بين ١٠٠ , ١٠ ينحصر فيما بين ٢ , ١

ولوغاريتم أى عدد ينحصر فيما بين ١٠٠٠ , ١٠٠ ينحصر بين ٣ , ٢ وهكذا ؛ وقد سبق للقارئ دراسة هذه اللوغاريتمات العادية .

أما موضوعنا فى هذا الكتاب فهو اللوغاريتمات الطبيعية التى أتفق على أن يكون أساسها العدد التقريبى (e) وقد تعرف أحياناً بلوغاريتمات نابيير نسبة إلى عالم الرياضيات الذى وضعها عام 1614 ميلادية .

ولما كانت $e = 2.718281$ ، فإن تركيب اللوغاريتمات الطبيعية يُصبح معقداً جداً ، وتوجد جداول رياضية تعطينا لوغاريتمات الأعداد الطبيعية من صفر حتى ٩٩٩ تبسيطاً لهذا التعقيد .

وقواعد اللوغاريتمات الطبيعية هى نفس قواعد اللوغاريتمات العادية فى عمليات الضرب والقسمة والرفع لقوى .

ومثلما : $Log_{10}\ 10 = Log\ 10 = 1$

فكذلك : $Log_e\ e = 1$

وتُعرف هذه اللوغاريتمات كذلك باللوغاريتمات الزائدية Hyperbolic logs

١٣-٦ :- تفاضل $Log_e\ x$:-

$Let \quad y = Log_e\ x$

أى أن y هى القوة للأساس e لكى نحصل على العدد x

$i\ ,\ e \quad x = e^y$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = e^y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left[Log_e\ x\right] = \frac{1}{x}$$

أما إذا كان اللوغاريتم لأساس آخر غير e وليكن الأساس a مثلاً فإنه يمكن تحويله إلى لوغاريتم للأساس e ببساطة

فإذا كانت $y = Log_a\ x$

$$\therefore y = Log_e\ x \times Log_a\ e$$

$$,\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\ Log_a\ e$$

وإذا كانت $y = Log_{10}\ x$ [الأساس a = ١٠]

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\ Log_{10}\ e = \frac{1}{x} \times 0.4343$$

٧-١٣ :- تفاضل الدوال الأسية فى الصورة العامة :-

لتكن $y = a^x$

$$\therefore Log_e\ y = Log_e\ a^x = x\ Log_e\ a$$

$$\therefore x = \frac{Log_e\ y}{Log_e\ a} = Log_e\ y \times \frac{1}{Log_e\ a}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \times \frac{1}{Log_e\ a}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y \times Log_e\ a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a^x \times Log_e\ a$$

فمثلاً : $y = 5^x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 5^x\ .\ Log_e\ 5 \cong 1.609 \times 5^x$$

وكحالة خاصة :-

$$y = 10^x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 10^x\ Log_e\ 10 = 2.303 \times 10^x$$

ويمكن إيجاز ما سبق فى الجدول التالى -

الـدالة	معاملها التفاضلى
e^x e^{-x} a^x	e^x $-e^{-x}$ $a^x \; Log_e \; a$
$Log_e \; x$	$\frac{1}{x}$

١٣-٨ :- أمثلة محلولة :-

(١) إجر التفاضل للدالة :- $y = e^{4x^2}$

الحـــــل :- بتطبيق قاعدة الدالة .

$$\because y = e^{4x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{4x^2} \times \frac{d}{dx}\left(4x^2\right)$$

$$= 8x \times e^{4x^2}$$

(٢) إجر تفاضل $y = Log \; x^7$

الحـــــل :-

$$\because y = Log \; x^7$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^7} \frac{d}{dx} x^7$$

$$= \frac{7 \; x^6}{x^7} = \frac{7}{x}$$

أو يمكننا إيجادها بمعرفة أن $Log \; x^7 = 7 \; Log \; x$

$$\therefore y = 7 \; Log \; x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 7 \times \frac{1}{x} = \frac{7}{x}$$

(٣) فـــاضل $y = Log \frac{x^3}{\sqrt{x^3 - 1}}$

الحـــــل :-

$$\because Log\frac{a}{b} = Log\ a - Log\ b$$

$$\therefore y = Log\ x^3 - Log\left(x^3 - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3} \times 3x^2 - \frac{1}{\left(x^3 - 1\right)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{d}{dx}\left(x^3 - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{x} - \frac{1}{\left(x^3 - 1\right)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{2\left(x^3 - 1\right)^{\frac{1}{2}}} \times 3x^2$$

$$= \frac{3}{x} - \frac{3x^2}{2\left(x^3 - 1\right)} = \frac{6\left(x^3 - 1\right) - 3x^3}{2x\left(x^3 - 1\right)}$$

$$= \frac{3\left(x^3 - 2\right)}{2x\left(x^3 - 1\right)}$$

(٤) فـاضل : $y = e^{-ax} \sin(bx + c)$

الحـــل :-

وهى مسألة ذات أهمية فى الفيزياء والهندسة الكهربية

$$\because y = e^{-ax} \times \sin(bx + c)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left[e^{-ax} \times \cos(bx + c) \times b\right] + \left[\sin(bx + c) \times -e^{-ax} \times a\right]$$

$$= e^{-ax}\left[b\cos(bx + c) - a\sin(bx + c)\right]$$

(٥) أوجـد $\frac{dy}{dx}$ ، إذا كانت : $y = Ln(3x + 5)$

الحـــل :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x + 5} \times \frac{d}{dx}(3x + 5) = \frac{3}{3x + 5}$$

(٦) أوجـد $\frac{dy}{dx}$ ، إذا كانت : $y = Ln\sqrt{5 + 7x}$

الحـــل :-

$$y = Ln\,(5+7x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,Ln\,(5+7x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5+7x} \times \frac{d}{dx}(5+7x)$$

$$= \frac{7}{2\,(5+7x)}$$

(٧) أوجـد $\frac{dy}{dx}$ ، إذا علمت أن : $y = Ln\,\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{x^2+3}$

الحـــــل :-

$$y = Ln\,x^2\sqrt{x^2-1} - Ln\left(x^2+3\right)$$

$$= Ln\,x^2 + Ln\,\sqrt{x^2-1} - Ln\left(x^2+3\right)$$

$$= 2\,Ln\,x + Ln\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}} - Ln\left(x^2+3\right)$$

$$= 2\,Ln\,x + \frac{1}{2}\,Ln\left(x^2-1\right) - Ln\left(x^2+3\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} + \frac{1\times 2x}{2\left(x^2-1\right)} - \frac{1\times 2x}{\left(x^2+3\right)}$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{x}{\left(x^2-1\right)} - \frac{2x}{x^2+3}$$

(٨) أوجـد تفاضل $y = a^{3x^2}$

الحـــــل :-

$$\because \frac{d}{dx}\,a^u = a^u\,\frac{du}{dx}\,Ln\,a$$

$\therefore$ نضع $u = 3x^2$, $\frac{du}{dx} = 6x^2$:-

$$\therefore y = a^u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a^{3x^2} \times Ln\,a \times 6x^2$$

(٩) أوجد تفاضل $y = 3^{5x}$

الحـــــل :-

$\because \frac{d}{dx} a^u = a^u \ Ln \ a \frac{du}{dx}$

$\therefore \frac{d}{dx} 3^{5x} = 3^{5x} \times Ln \ 3 \times 5 = 5 \times 3^{5x} \ Ln \ 3$

(١٠) أوجد تفاضل $y = x^x$

الحـــــل :-

$Ln \ y = Ln \ x^x = x \ Ln \ x$

$\therefore \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + Ln \ x \times 1$

$= 1 + Ln \ x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = (1 + Ln \ x) \ x^x$

(١١) أوجد تفاضل $y = e^{\frac{1}{x^2}}$

الحـــــل :-

بـوضع $u = \frac{1}{x^2} \quad \therefore \quad \frac{du}{dx} = \frac{-2}{x^3}$

$, y = e^u$

$\therefore \frac{dy}{dx} = e^u \times \frac{du}{dx}$

$= e^{\frac{1}{x^2}} \times \frac{-2}{x^3} = \frac{-2 \ e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}$

(١٢) فـاضل : $y = a e^{b^2 + x^2}$

الحـــــل :-

بـوضع $u = b^2 + x^2$

$\therefore \frac{du}{dx} = 2x$

$, y = a e^u$

$\therefore \frac{dy}{dx} = a e^u \frac{du}{dx} = a e^{b^2 + x^2} \times 2x$

$= 2 a x e^{b^2 + x^2}$

(١٣) أوجد تفاضل : $y = e^{\sqrt{x^4+a}}$

الحـــــل :-

نضـع $u = \sqrt{(x^4+a)}$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{1 \times 4x^3}{2\sqrt{x^4+a}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+a}}$$

$$, \quad y = e^u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{x^4+a}} \times \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+a}}$$

(١٤) أوجد تفاضل $y = x\, e^{\tan x}$

الحـــــل :-

نستخدم هنا القاعدة :- $d(uv) = v\,du + u\,dv$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x\left[e^{\tan x} \times \sec^2 x\right] + e^{\tan x}$$

$$= e^{\tan x}\left[x \sec^2 x + 1\right]$$

(١٥) إذا كانت $y = Log\ 9x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحـــــل :-

$$\because \frac{d}{dx} Log_a u = \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx} Log_a e$$

وبـوضع $u = 9x$ $\quad \therefore \quad \frac{du}{dx} = 9$

وبـوضع $a = 10$ وفى هذه الحالة لا تكتب ١٠

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{9x} \times 9\ Log\ e$$

$$= \frac{1}{x} . Log\, e = \frac{0.4343}{x} \quad [\log e = 0.4343]$$

(١٦) أوجد تفاضل $y = Log\ \frac{5x}{3+2x^2}$

الحـــــل :-

$$\because \frac{d}{dx} Log_a\, u = \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx} Log_a\, e$$

وبـوضع $u = \dfrac{5x}{3 + 2x^2}$

ومن الواضح هنا أن $a = 10$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3 + 2x^2}{5x} \times \frac{\left(3 + 2x^2\right)(5) - (5x)(4x)}{\left(3 + 2x^2\right)^2} \times Log\, e$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{\left(3 - 2x^2\right)}{\left(3 + 2x^2\right)} \times Log\, e\ .$$

(١٧) أوجد تفاضل $y = Ln\, 4x^3$

الحـــــل :-

$$\because \frac{d}{dx} Ln\, u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

وبـوضع $u = 4x^3$ $\therefore$ $\dfrac{du}{dx} = 12\, x^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4x^3} \times 12x^2 = \frac{3}{x}$$

(١٨) إذا كانت $y = Ln\left(a + x^5\right)$ فأوجد $\dfrac{dy}{dx}$

الحـــــل :-

بـوضع $u = \left(a + x^5\right)$, $\therefore$ $\dfrac{du}{dx} = 5x^4$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(a + x^5\right)} \times 5x^4 = \frac{5x^4}{\left(a + x^5\right)}$$

(١٩) أوجد تفاضل $y = Ln\left(2 - 3x^2\right)^3$

الحـــــل :-

يمكن إعادة كتابة الدالة كالتالى :-

$$y = 3\,Ln\left(2 - 3x^2\right)$$

$$, \because \frac{d}{dx} Ln\, u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

وبـوضع $u = (2 - 3x^2)$ ، $\therefore \quad \frac{du}{dx} = -6x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3 \times 1}{(2 - 3x^2)} \times -6x = \frac{-18x}{(2 - 3x^2)}$$

(٢٠) أوجد تفاضل $y = Ln \sqrt{3 - 4x^2}$

الحـــــل :-

يمكن كتابة المسألة فى صورة خالية من الجذور كالتالى :-

$$y = Ln (3 - 4x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} Ln (3 - 4x^2)$$

$$, \because \frac{d}{dx} Ln\, u = \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx}$$

وبـوضع $u = 3 - 4x^2$ ، $\therefore \quad \frac{du}{dx} = -8x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3 - 4x^2} \times -8x = \frac{-4x}{(3 - 4x^2)}$$

$$= \frac{4x}{(4x^2 - 3)}$$

(٢١) أوجد تفاضل $y = Ln \tan x$

الحـــــل :-

$$\because \frac{d}{dx} Ln\, u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

وبـوضع $u = \tan x$ ، $\therefore \quad \frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x} \times \sec^2 x = \frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \text{cosec}\, x \;\sec x$$

(٢٢) أوجد تفاضل $y = \frac{1}{Ln\, x}$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Ln\,x\times 0-1\times\left(\frac{1}{x}\right)}{[Ln\,x]^2}=\frac{-1}{x\,(Ln\,x)^2}$$

(٢٣) أوجد تفاضل :- $y=Ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

الحـــــل :-

$$\therefore \frac{d}{dx}Ln\,u=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

نـضع $u=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

$$\therefore \frac{du}{dx}=\frac{\left(x^2+1\right)(2x)-\left(x^2-1\right)(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)}}\times\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{4x}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)^2}$$

(٢٤) أوجد تفاضل الدالة :-

$$f(x)=Ln\left[3x^2+2\,Ln\,x\right]$$

الحـــــل :-

نـضع $u=3x^2+2Ln\,x$

$$\therefore \frac{d}{dx}Ln\,u=\frac{1}{u}\times\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{du}{dx}=6x+\frac{2}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(3x^2+2\,Ln\,x\right)}\times\frac{\left(6x^2+2\right)}{x}$$

$$=\frac{2}{x}\times\frac{\left(3x^2+1\right)}{\left(3x^2+2\,Ln\,x\right)}$$

(٢٥) أوجد تفاضل $y=Ln\left[\sin e^{3x}\right]$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sin e^{3x}}\times\left[\cos e^{3x}\right]\left[e^{3x}\right][3]$$
$$=3e^{3x}\cot e^{3x}$$

(٢٦) أوجد تفاضل $y=x^{e^x}$

الحـــــل :-

يمكن تبسيط هذه المسألة بأخذ لوغاريتمات الطرفين :

$$\because Ln\ y=Ln\ x^{e^x}=e^x\ Ln\ x$$
$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=e^x\times\frac{1}{x}+Ln\ x\times e^x$$
$$=e^x\left[\frac{1}{x}+Ln\ x\right]$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=y\times e^x\left[\frac{1}{x}+Ln\ x\right]$$
$$=x^{e^x}\times e^x\left[\frac{1}{x}+Ln\ x\right]$$

(٢٧) إذا كانت $y=(2x+5)^2\sqrt{x^2-4}$

فـاوجد $\frac{dy}{dx}$ **باستخدام اللوغاريتمات**

الحـــــل :-

بأخذ اللوغاريتمات لطرفى المعادلة :-

$$\therefore Ln\ y=2\,Ln\,(2x+5)+\frac{1}{2}\,Ln\left(x^2-4\right)$$
$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=2\times\frac{1}{2x+5}\times2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(x^2-4\right)}\times2x$$
$$=\frac{4}{2x+5}+\frac{x}{\left(x^2-4\right)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (2x+5)^2 \left(x^2-4\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{4\left(x^2-4\right)+x\,(2x+5)}{(2x+5)\left(x^2-4\right)}\right]$$

$$= \frac{(2x+5)}{\left(x^2-4\right)^{\frac{1}{2}}}\left[6x^2+5x-16\right]$$

$$= \frac{12x^3+40x^2-7x-80}{\left(x^2-4\right)^{\frac{1}{2}}}$$

(٢٨) إذا كانت $y = \left[\frac{1}{a^{2x}}\right]^{2ax}$ **فـاوجد** $\frac{dy}{dx}$

الحـــــل :–

بأخذ اللوغاريتمات لطرفى المعادلة :–

$$\therefore Ln\ y = 2ax\ Ln\ \frac{1}{a^{2x}}$$

$$,\ Ln\ \frac{1}{a^{2x}} = Ln\ 1 - Ln\ a^{2x}$$

$$= 0 - Ln\ a^{2x}$$

$$\therefore Ln\frac{1}{a^{2x}} = -2x\ Ln\ a$$

$$\therefore Ln\ y = 2ax \times -2x\ Ln\ a = -4ax^2\ Ln\ a$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -8ax\ Ln\ a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\,(-8ax\ Ln\ a)$$

$$= \left[\frac{1}{a^{2x}}\right]^{2ax} \times \left[-8ax\ Ln\ a\right]$$

$$= \frac{1}{4ax^2} \times -8ax\ Ln\ a$$

$$= -8x\ a^{1-4ax^2}\ Ln\ b$$

(٢٩) أوجد تفاضل $y = \left(3x^2 - 5\right)^{4+\sqrt{2x^3+3}}$

الحـــــل :-

بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين :-

$$\therefore Ln\ y = 4 + \sqrt{2x^3 + 3} \times Ln\left(3x^2 - 5\right)$$

ثم نفاضل كلا الطرفين بالنسبة إلى x باستخدام قاعدة الضرب .

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left(4 + \sqrt{2x^3 + 3}\right) \times \left[\frac{1}{\left(3x^2 - 5\right)} \times 6x\right] +$$

$$+ Ln\left(3x^2 - 5\right) \times \left[\frac{1}{2}\left(2x^3 + 3\right)^{\frac{-1}{2}} \times 6x^2\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left[4 + \sqrt{2x^3 + 3} \times \frac{6x}{\left(3x^2 - 5\right)} + Ln\left(3x^2 - 5\right) \times \frac{3x^2}{\left(2x^3 + 3\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$= \left(3x^2 - 5\right)^{4+\sqrt{\left(2x^3+3\right)}}\left[\frac{6x\left(4 + \sqrt{2x^3 + 3}\right)}{\left(3x^2 - 5\right)} + \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 + 3}} . Ln\left(3x^2 - 5\right)\right]$$

(٣٠) اوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا علمت أن :- $Ln\left(x + y\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$

الحـــــل :-

هذه دالة ضمنية فى x,y لذلك نفاضل ضمنيا بالنسبة الى x كلاً من الطرفين :

$$\therefore \frac{1}{x + y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \times \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

وبضرب الطرفين فى الوسطين cross - multiplying

$$\therefore y^2 + x^2 + \left(y^2 + x^2\right)\frac{dy}{dx} = xy + y^2 - \left(x^2 + xy\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\left[y^2 + x^2 + \left(x^2 + xy\right)\right] = xy + y^2 - y^2 - x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\left[2x^2 + xy + y^2\right] = x\,(y - x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x\,(y - x)}{\left(2x^2 + xy + y^2\right)}$$

قـــاعدة :

وإذا كانت a أى عدد مـــوجب ومطلـــوب إيجاد a^u حيث u دالـة قابلـــة للتفاضل فى x فإن :

$$\therefore \frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx} \qquad \text{..........} \ (1)$$

$$, Ln\ a^u = u\ Ln\ a$$

$$\therefore a^u = e^{u\ Ln\ a}$$

$$, \frac{d}{dx} a^u = \frac{d}{dx}\left(e^{u\ Ln\ a}\right) = e^{u\ Ln\ a} \times Ln\ a \frac{du}{dx}$$

ومنها نصل لصيغة عامة :-

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u\ Ln\ a \frac{du}{dx} \qquad \text{..........} \ (2)$$

(٣١) أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا علمت أن :- $y = e^{2x^2}$

الحـــــل :-

باستخدام القاعدة (١) السابقة :-

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{2x^2} \frac{d}{dx}\left(2x^2\right) = 4x\ e^{2x^2}$$

(٣٢) أوجد $\frac{dy}{dx}$ ، إذا كانت :- $y = e^{-x}\ Ln\ x$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \frac{d}{dx}(Ln\, x) + Ln(x) \frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right)$$

$$= \frac{e^{-x}}{x} + -e^{-x}\ Ln\ (x)$$

(٣٣) إذا كانت $y = 3^{2x-3}$ **فأوجد** $\frac{dy}{dx}$

الحـــــل :ـ

باستخدام الصيغة العامة السابقة رقم (٢)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3^{2x-3}\ Ln\, 3 \times \frac{d}{dx}(2x-3)$$

$$= 3^{2x-3}\,(Ln\, 3)\,(2)$$

Exercise . 14

أوجد $\frac{dy}{dx}$ فى كل من المسائل التالية :ـ

(١) $y = e^{6x}$

(٢) $y = e^{\frac{x}{3}}$

(٣) $y = e^{\sqrt{x}}$

(٤) $y = e^{-3x}$

(٥) $y = e^{-\frac{7}{3}x}$

(٦) $y = e^{(4-3x)}$

(٧) $y = e^{-ax}$

(٨) $y = e^{\frac{x}{a}}$

(٩) $y = e^{ax+c}$

(١٠) $y = e^{-9x}$

(١١) $y = e^{\sin x}$

(١٢) $y = x^2\, e^x$

(١٣) $y = Ln\left(e^x - 1\right)$

(١٤) $y = e^{-2x}\sin x$

(١٥) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(١٦) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(١٧) $y = e^{x^2}$

(١٨) $y = x\, e^x$

(١٩) $y = x\, e^{-x}$

(٢٠) $y = x^2\, e^{-x}$

(٢١) $y = (x+4)\, e^x$

(٢٢) $y = \sin^{-1} e^x$

(٢٣) $y = 2^x$

(٢٤) $y = x^3\, e^{\frac{1}{x}}$

(٢٥) $y = e^x \sin x$

(٢٦) $y = 10\, e^x$

(٢٧) $y = 10\, 2^x$

(٢٨) $y = x^n\, .\, a^x$

(٢٩) $y = a^{2x+1}$

(٣٠) $y = e^{\cos x}$

(٣١) $y = a^{bx^2}$

(٣٢) $y = (a+b)^x$

(٣٣) $y = e^{\tan x}$ (٣٤) $y = Ln\left(x^3 e^{-3x}\right)$

(٣٥) $x^2 e^y + y^2 e^x = 2$ (٣٦) $e^x \sin y - e^y \cos x = 1$

(٣٧) $y = Log \dfrac{x}{a}$ (٣٨) $y = Log\left(ax^2 + bx + c\right)$

(٣٩) $y = x \, Log \, x$ (٤٠) $y = Log \sin x$

(٤١) $y = Log \dfrac{a + x}{a - x}$ (٤٢) $y = Log\left(e^x + e^{-x}\right)$

(٤٣) $y = Log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ (٤٤) $y = Log \tan \dfrac{x}{2}$

(٤٥) $y = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$ (٤٦) $y = ae^{-bx} \sin bx$

(٤٧) $y = Log\left[\sqrt{(x-1)} + \sqrt{(x+1)}\right]$ (٤٨) $y = Log \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

(٤٩) $y = Log \dfrac{\sqrt{b} + \sqrt{x}}{\sqrt{b} - \sqrt{x}}$ (٥٠) $y = \cos^{-1} e^{-x}$

(٥١) $y = Log \dfrac{x}{b - \sqrt{b^2 - x^2}}$ (٥٢) $y = \sin^{-1} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

أوجد المشتقة الثانية والثالثة والرابعة والمشتقة النونية للآتى :-

(٥٣) $y = e^{ax}$

(٥٤) $y = e^{-ax}$

(٥٥) $y = Log \, x$

فاضل كل من الدوال التالية باستخدام طريقة اللوغاريتمات :-

(٥٦) $y = x\,(x-1)^{\frac{3}{2}}$ (٥٧) $y = x^{-x}$

(٥٨) $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x\sqrt{4 + x^2}}$ (٥٩) $y = x^{Ln\, x}$

(٦٠) $y = \left(\sin^{-1} x\right)^x$ (٦١) $y = e^{-x^2} \sin^2 3x$

(٦٢) إذا كانت $y = u^V$ حيث كل من v , u دوال فى x فبين أن :-

$$\frac{dy}{dx} = v\, u^{V-1} \frac{du}{dx} + u^V \, Ln\, u \frac{dv}{dx}$$

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :-

(٦٣) $y = x^2 + 3^x$

(٦٤) $y = e^{-x^2}$

(٦٥) $y = \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}$

(٦٦) $y=\left(e^{ax} - e^{-ax}\right)^2$

(٦٧) $y = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} + Log\left(\tan \frac{x}{2}\right)$

(٦٨) $y = x^2 \,.\, 2^x$

(٦٩) $y = e^{\frac{x}{a}} \cos \dfrac{x}{a}$

(٧٠) $y = a^{\sin x}$

(٧١) $y = Log\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right]$

(٧٢) $y = x^2\, e^{-2x}$

(٧٣) $y = Log\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)$

(٧٤) $y = Log\, \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - ax^4}}$

عين مشتقات الدوال التالية بعد أخذ اللوغاريتم للطرفين :-

(٧٥) $y = Log \cos x - \dfrac{1}{2}\cos^2 x$

(٧٦) $y = Log\, \dfrac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$

(٧٧) $y = x^{\frac{1}{x}}$

(٧٨) $y = \cos^{-1}(1 - 2x)$

(٧٩) $y = x \tan^{-1} \dfrac{x}{a} - \dfrac{a}{2} Log\left(x^2 + a^2\right)$

(٨٠) $y = \sin^{-1}\sqrt{1 - 4x}$

(٨١) $y = \dfrac{1}{2} Log \tan x + Log \cos x$

(٨٢) $y = \sqrt{1 - x^2} + \sin^{-1} x$

(٨٣) $y = x\sqrt{1 - x^2} + \sin^{-1} x$

(٨٤) $y = e^x\sqrt{1 - e^{2x}} + \sin^{-1} e^x$

(٨٥) $y = Log\left[e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}\right]$

(٨٦) $y = \sin^{-1} e^{3x}$

(٨٧) $y = \cos^{-1}\sqrt{1 - 2x} + \sqrt{2x + 4x^2}$

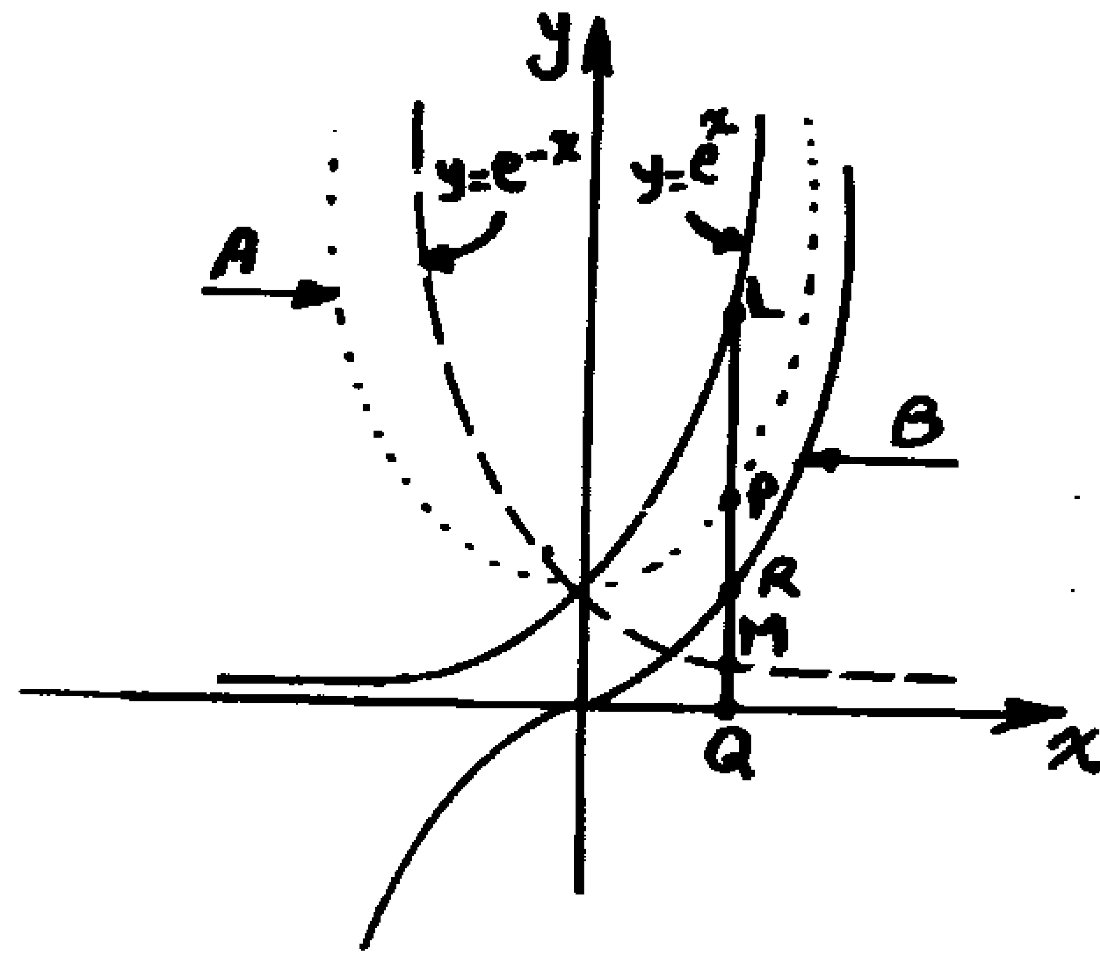
(٨٨) $y = \tan^{-1} e^{2x} + Log\sqrt{\dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}}$

الباب الرابع عشر

الدوال الزائدية Hyperbolic Functions

١٤-١ :- عام :-

يوضح شكل (١٤-١) ، كلاً من منحنيى e^{-x} , e^{x} بالإضافة إلى منحنيين آخرين وهما B , A بالشكل .



شكل (١٤-١)

ويُلاحظ ما يلى على هذه المنحنيات :-

(١) الإحداثى الرأسى (الصادى) لأى نقطة على المنحنى A يعادل نصف مجموع الإحداثى الصادى للنقطتين المناظرتين للنقطة الأولى على منحنى e^{-x} , e^{x}

فمثلاً النقطة P على المنحنى A ، إحداثيها الصادى PQ يعادل نصف مجموع كل من MQ , LQ

وعليه فإنه لأى نقطة على المنحنى A :-

$$\therefore y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

(٢) الإحداثى الصادى (الرأسى) لأى نقطة على المنحنى B ، يعادل نصف الفرق بين الإحداثى الصادى لكل من المنحنيين الآخرين e^{-x} , e^{x}

$$RQ = \frac{1}{2}[LQ - MQ]$$

∴ لأى نقطة على المنحنى B :-

$$\therefore y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

وعليه فإن المنحنيين يمثلان دالتان فى x ومعادلتهما كالتالى :-

$$y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad , \quad y = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

وقد وجد أن خواص هاتين الدالتين تماثل خواص $y = \cos x$, $y = \sin x$ ويطلق على الدالة $y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ ، بجيب التمام الزائدى Hyperbolic cosine

بينما يُطلق على الدالة $y = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ بالجيب الزائدى Hyperbolic sine

وقد اختصرت إلى $\sinh x$, $\cosh x$

وتعنى إضافة " h " بآخر الرمز إلى الزائدى (Hyp . cos , Hyp . sin)

$$\therefore \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

$$, \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

ومنها نصل إلى :-

$$\cosh x + \sinh x = e^x$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

وهنالك أربع دوال زائدية أُخرى :-

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$, \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$, \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$, \coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

وفى الرسم (١٤-١) يوضح المنحنى A ، الذى يمثل أهمية كبيرة ويُطلق عليه منحنى الكتينه Catenary وهو يأخذ الشكل الذى تأخذه سلسلة منتظمة مرنة معلقة بحرية مع تثبيت نهايتيها .

ويمكن التعبير عن $\sinh x$, $\cosh x$ فى صورة متسلسلة باستخدام مفكوك e^x السابق ذكره فى الباب السابق .

$$, \because e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \dots$$

$$, \because e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{\lfloor 2} - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \dots$$

$$\therefore \cosh x = 1 + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^4}{\lfloor 4} + \dots$$

$$, \sinh x = x + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} \dots$$

١٤-٢ :- بعض العلاقات للدوال الزائدية :-

هنالك تشابه كبير بين العلاقات التى تربط الدوال الزائدية وتلك التى تربط الدوال المثلثية ولنعتبر المثالين التاليين :-

$$1)\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(e^{2x} + e^{-2x} + 2\right) - \left(e^{2x} + e^{-2x} - 2\right)\right] = 1$$

$$\therefore \left[\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\right]$$

وهى تشبه العلاقة المثلثية الشهيرة :- $\left[\cos^2 x + \sin^2 x = 1\right]$

$$2)\ \cosh^2 x + \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh 2x$$

$$\therefore \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$$

وهى تشبه العلاقة المثلثية الشهيرة :- $\left[\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x\right]$

وبالمثل فإن أى علاقة مثلثية لها نظير فى الدوال الزائدية ويُلاحظ من الحالتين السابقتين أن هنالك اختلافاً فى الإشارات .

وهذا ينطبق فقط على $\sinh^2 x$

وقد وضعت قاعدة تُعرف بقاعدة أوسبورن Osborn's rule ، والتى عن طريقها يمكننا كتابة أى دالة زائدية مباشرة من الدوال المثلثية المناظرة لها ، حيث يتم تغيير إشارة أى عنصر فى الدوال المثلثية يحتوى على $\left[\sin^2\right.$ أو $\left.\sin \times \sin\right]$ كما يلى :-

الدالة المثلثية :- $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

تُصبح :- $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$

وذلك لأن :- $\tanh^2 x = \dfrac{\sinh x \times \sinh x}{\cosh x \times \cosh x}$

وفيما يلى جدول يوضح أهم العلاقات فى الدوال الزائدية وما يقابلها من دوال مثلثية :

الدوال المثلثية	الدوال الزائدية
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$	$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$	$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$
$\operatorname{cosec}^2 x = \cot^2 x + 1$	$\operatorname{cosech}^2 x = \coth^2 x - 1$
$\sin(x \pm y) = \sin x \,.\, \cos y \pm \cos x \sin y$	$\sinh(x \pm y) = \sinh x \,.\, \cosh y \pm \cosh x \,.\, \sinh y$
$\cos(x \pm y) = \cos x \,.\, \cos y \mp \sin x \,.\, \sin y$	$\cosh(x \pm y) = \cosh x \,.\, \cosh y \pm \sinh x \,.\, \sinh y$

جدول (١٤-١)

كما توجد بعض العلاقات بين مجموعتى الدوال المثلثية والزائدية :-

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right), \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right), \sin x = \frac{1}{2} i \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

$$, \sinh x = \frac{1}{i} \sin ix$$

$$, \cosh x = \cos ix$$

حيث : $i = \sqrt{-1}$

١٤-٣ :- تفـاضل الدوال الزائدية :-

(١) $\sinh x$:-

لتكن : $y = \sinh x$

$$= \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$

(٢) $\cosh x$:-

لتكن :- $y = \cosh x$

$$= \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

(٣) $\tanh x$:-

يمكن إيجاد مشتقتها من التعريف بها فى الصورة الأسية :-

$\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ ، أو كالتالى :-

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

وباستخدام قاعدة القسمة :-

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\cosh x . \cosh x - \sinh x . \sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \text{sech}^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tanh x) = \text{sech}^2 x$$

وبالمثل فإنه يمكن إثبات التالى :-

$y = \text{cosech } x$ $\qquad \therefore \frac{dy}{dx} = -\text{cosech } x \coth x$

, $y = \text{sech } x$ $\qquad \therefore \frac{dy}{dx} = -\text{sech } x \tanh x$

, $y = \coth x$ $\qquad \therefore \frac{dy}{dx} = -\text{cosech}^2 x$

ويجب على القارئ الرجوع إلى مُشتقة الدوال المُثلثية المشابهة للمقارنة .

(١٤) : منحنيات الدوال الزائدية :-

ارجع لشكل (١٤-١) الذى يوضح منحنى $y = \cosh x$, $y = \sinh x$

$$(1) \quad y = \cosh x \ , \ \frac{dy}{dx} = \sinh x \ , \ \frac{d^2y}{dx^2} = \cosh x$$

، $\frac{dy}{dx}$ ، تساوى الصفر فقط عندما $x = 0$ ولذلك توجد نقطة تحول على المنحنى (A)

وحيث أن $\sinh x$ ، سالبة قبل هذه النقطة وموجبة بعدها ، بينما $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، موجبة فتكون النقطة نهاية صغرى ولا توجد نقط تحول أُخرى أو نُقط انقلاب على المنحنى (A) .

$$(2) \quad y = \sinh x : \frac{dy}{dx} = \cosh x \ , \ \frac{d^2y}{dx^2} = \sinh x$$

، $\frac{dy}{dx}$ أى $\cosh x$ دائماً موجبة ولا تساوى الصفر أبداً وبالتالى فإن $\sinh x$ **تتزايد دائماً** وليس لها نقط تحول .

إلا أنه عندما $x = 0$ ، فإن :- $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ وهى سالبة قبل O وموجبة بعدها

(O = نقطة الأصل) .

ولذلك فإنه **توجد نقطة إنقلاب** عندما $x = 0$

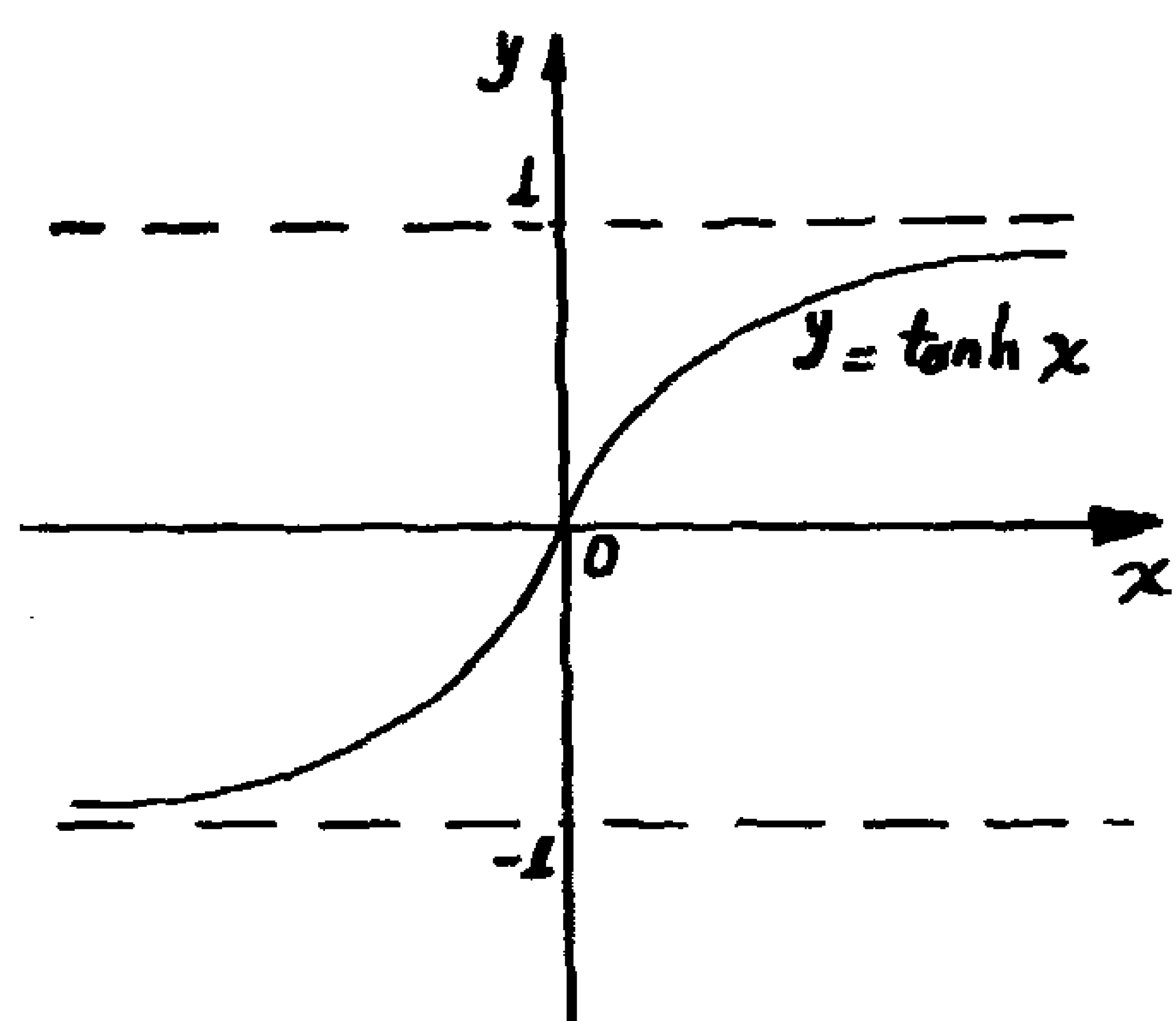
ويكون الميل عند نقطة O مساوياً للواحد والزاوية = $\frac{\pi}{4}$

(3) $y = \tanh x : \quad , \frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2 x$

وحيث أن $\operatorname{sech}^2 x$ دائماً موجبة فإن $\tanh x$ تتزايد دائماً فيما بين $-\infty$, $+\infty$

وحيث أن كلاً من $\sinh x$, $\cosh x$ مستمرة دائماً (متصلة) كما وأن $\cosh x$ لا تساوى الصفر أبداً ، لذلك فإن $\tanh x$ ، يجب أن تكون **دالة متصلة** .

ويوضح الشكل (١٤-٢) منحنى $\tanh x$.



شكل (١٤-٢)

كما يمكن كتابة $\tanh x$ فى الصورة :

$$\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

ويتضح من هذه الصورة أنه عندما تزداد x من $-\infty$ إلى $+\infty$ فإن e^{2x} تتزايدمن صفر إلى ١ .

$$\therefore 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

أو $\tanh x$ تتزايد من - ١ إلى صفر .

وبالمثل فإنه عندما تزيد x من صفر إلى $+\infty$ فإن $\tanh x$ تزيد من صفر إلى الواحد .

ولهذا فإن المنحنى له خطى تقارب asymptotes وهما $y = \pm 1$ وموضحين بالشكل .

١٤-٥ :- تفاضل الدوال الزائدية العكسية

تتشابه الدوال الزائدية العكسية مع نظيرتها (الدوال المثلثية)

ولذلك فإنه يتم استخراج المعادلات التفاضلية (للأولى) بطريقة مشابهة لما تم فى (الثانية) .

(١) تفاضل $\sinh^{-1} x$:

$$\because y = \sinh^{-1} x$$

$$\therefore x = \sinh y$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \cosh y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \sinh^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(٢) تفاضل $\cosh^{-1} x$:

باستخدام نفس الطريقة كما سبق فإن :

$$\frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

(٣) تفاضل $\tanh^{-1} x$:

$$\because y = \tanh^{-1} x$$

$$\therefore x = \tanh y$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \operatorname{sech}^2 y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{sech}^2 y} = \frac{1}{1 - \tanh^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2}$$

(٤) تفاضل $\coth^{-1} x$ ، $\operatorname{cosech}^{-1} x$ ، $\operatorname{sech}^{-1} x$:-

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \operatorname{cosech}^{-1} x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$y = \coth^{-1} x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2-1}$$

وفيما يلى صيغتان هامتان :-

$$if \qquad y = \sinh^{-1}\frac{x}{a} :-$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$if \qquad y = \cosh^{-1}\frac{x}{a} :-$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

١٤-٦ :- المكافئ اللوغاريتمى للدوال الزائدية العكسية

(١) $$\sinh^{-1} x = Log\left[x + \sqrt{\left(1+x^2\right)}\right]$$

لتكن $y = \sinh^{-1} x$

$\therefore x = \sinh y$

ولكن $\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$

$= 1 + x^2$

و $\cosh y = +\sqrt{1+x^2}$ ($\cosh y$ دائماً موجبة)

$\therefore \sinh y + \cosh y = x + \sqrt{1+x^2}$

ولكن $\sinh y + \cosh y = e^y$

$\therefore e^y = x + \sqrt{1+x^2}$

وبأخذ اللوغاريتمات للطرفين

$$\therefore y = Log\left[x + \sqrt{(1 + x^2)}\right]$$

$$\therefore \sinh^{-1} x = Log\left[x + \sqrt{x^2 + 1}\right]$$

$$\cosh^{-1} x = \pm\ Log\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right]$$ (٢)

لتكن
$$y = \cosh^{-1} x$$

$$\therefore x = \cosh y$$

ولكن
$$\sinh^2 y = \cosh^2 y - 1$$

$$= x^2 - 1$$

$$\therefore \sinh y = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

[ويمكن أخذ كل من الإشارتين $(\pm)$ لجذر المقدار $(x^2 - 1)$]

$$\because e^y = \sinh y + \cosh y$$

$$= \pm \sqrt{x^2 - 1} + x$$

$$= x \pm \sqrt{(x^2 - 1)}$$

وبأخذ اللوغاريتم للطرفين :-
$$\therefore y = Log\left[x \pm \sqrt{(x^2 - 1)}\right]$$

$$\therefore \cosh^{-1} x = Log\left[x \pm \sqrt{(x^2 - 1)}\right]$$

وبجمع هاتين الكميتين [$(\pm)$ مرة بالزائد ومرة بالناقص]

$$\therefore Log\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right] + Log\left[x - \sqrt{x^2 - 1}\right]$$

$$= Log\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)\right]$$

$$= Log\left[x^2 - (x^2 - 1)\right] = Log\ 1 = 0$$

أى أن كلاً من قيمتى $\cosh^{-1} x$ متساويتين ومختلفتين فقط فى الإشارة

$$\therefore \cosh^{-1} x = \pm\ Log\left[x + \sqrt{(x^2 - 1)}\right]$$

[**ملحوظة** : x تقع بين $1 , +\infty$]

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} Log \frac{1 + x}{1 - x}$$ (٣)

لتكن

$$y = \tanh^{-1} x$$

$$\therefore x = \tanh y$$

x تقع بين ١- , ١+) كما ذكرنا سابقاً فى نهاية البند (٤-١٤)

$$\therefore x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

$$\therefore x\left(e^{2y} + 1\right) = e^{2y} - 1$$

$$\therefore e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$\therefore 2y = Log \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} Log \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$i.e \quad \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} Log \frac{1 + x}{1 - x}$$

٧-١٠ :- موجز لتفاضل الدوال الزائدية العكسية :-

الدالة	تفاضلها
$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1 - x^2}$
$\text{cosech}^{-1} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{1 + x^2}}$
$\text{sech}^{-1} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}}$
$\coth^{-1} x$	$\frac{-1}{x^2 - 1}$

كما وأن الصيغ التالية ذات أهمية ، كذلك ؛

$$when \quad y = \sinh^{-1}\frac{x}{a} \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$, y = \cosh^{-1}\frac{x}{a} \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$, y = \tanh^{-1}\frac{x}{a} \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2 - x^2}$$

وفيما يلى المكافئ اللوغاريتمى للثلاث دوال العكسية السابقة :-

$$\sinh^{-1}\frac{x}{a} = Log\left[\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right]$$

$$\cosh^{-1}\frac{x}{a} = \pm Log\left[\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right]$$

$$\tanh^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1}{2} Log\left[\frac{a + x}{a - x}\right]$$

٨-١٤ :- أمثلــة محلولة :-

(١) إذا علمت أن :-

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$, \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$, \text{sech}\, x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

فبين أن :-

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$

$$, \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$

$$, \frac{d}{dx}\tanh x = \text{sech}^2 x$$

الحـــــــل :-

$$a)\quad \because \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\sinh x = \frac{2\left(e^{x} + e^{-x}\right) - \left(e^{x} - e^{-x}\right) \times 0}{2^{2}}$$

$$= \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$b)\quad \because \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\cosh x = \frac{2\left(e^{x} - e^{-x}\right) - \left(e^{x} + e^{-x}\right) \times 0}{2^{2}}$$

$$= \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$c)\quad \because \tanh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\tanh x = \frac{\left(e^{x} + e^{-x}\right)\left(e^{x} + e^{-x}\right) - \left(e^{x} - e^{-x}\right)\left(e^{x} - e^{-x}\right)}{\left[e^{x} + e^{-x}\right]^{2}}$$

$$= \frac{\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)}{\left[e^{x} + e^{-x}\right]^{2}}$$

$$= \frac{4}{\left(e^{x} + e^{-x}\right)^{2}} = \left[\frac{2}{\left(e^{x} + e^{-x}\right)}\right]^{2}$$

ولكن لـــدينا :-

$$\frac{2}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh x} = \operatorname{sech} x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^{2} x$$

(٢) إذا علمت أن :-

$$\sinh^{-1} x = Ln\left[x + \sqrt{1 + x^{2}}\right]$$

$$, \cosh^{-1} x = \pm\, Ln\left[x + \sqrt{x^{2} + 1}\right]$$

$$, \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\, Ln\left[\frac{1 + x}{1 - x}\right]$$

فاثبت أن :-

1) $\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

2) $\frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

3) $\frac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$

الحـــــل :-

1) $\because \sinh^{-1} x = Ln\left[x+\sqrt{x^2+1}\right]$

$\therefore \frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{d}{dx} Ln\left[x+\sqrt{x^2+1}\right]$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left[1+\tfrac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{-1}{2}} \times 2x\right]$$

$$= \left[\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right] \times \left[1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right] = \left[\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]\left[\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right]$$

$$= \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

2) $\because \cosh^{-1} x = \pm\, Ln\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]$

$\therefore \frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{d}{dx}\left[\pm\, Ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]$

$$= \pm\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \times \left[1+\tfrac{1}{2}\left(x^2-1\right)^{\frac{-1}{2}} \times 2x\right]$$

$$= \pm\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= \pm \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \times \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \pm \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

3) $\because \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} Ln \frac{1 + x}{1 - x}$

$$\therefore \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \times \frac{d}{dx} \left[Ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1 - x}{1 + x} \right) \left[\frac{(1 - x)(1) - (1 + x)(-1)}{(1 - x)^2} \right]$$

$$= \frac{(1 - x)\left[(1 - x) + (1 + x)\right]}{2\,(1 + x)(1 - x)^2} = \frac{2\,(1 - x)}{2\,(1 + x)(1 - x)^2}$$

$$= \frac{1}{(1 + x)\,(1 - x)} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Exercise 15

فـاضل كل من الدوال التالية :–

(١) $\sinh \frac{x}{4}$ (٢) $\sinh 3x$

(٣) $\cosh \frac{x}{3}$ (٤) $\tanh bx$

(٥) $\tanh \frac{x}{2}$ (٦) $\sinh bx + \cosh bx$

(٧) $\sinh \frac{1}{x}$ (٨) $\sinh^2 x$

(٩) $\cosh^3 x$ (١٠) $\sinh (ax + b)$

(١١) $\sinh^n ax$ (١٢) $\tanh^2 x$

(١٣) $x \sinh x - \cosh x$ (١٤) $x^3 \sinh 3x$

(١٥) $Log (\sinh x + \cosh x)$ (١٦) $e^{\tanh x}$

(١٧) $\sinh^{-1} \dfrac{1 - x}{1 + x}$

(١٨) $\tanh^{-1} \dfrac{2x}{1 + x^2}$

(١٩) $\tan^{-1} x + \tanh^{-1} x$

(٢٠) $\tan^{-1} \left(\tanh \dfrac{x}{2} \right)$

(٢١) $y = x - \tanh x$

(٢٢) $y = \tanh x + \coth x$

(٢٣) $y = \sqrt{1 + \sinh^2 4x}$

(٢٤) $y = x - \coth x$

(٢٥) $y = 2\sqrt{\coth x - 1}$

(٢٦) $y = \sin^{-1} (\tanh x)$

(٢٧) $y = Log\,(\tanh x)$

الباب الخامس عشر

التفاضل الجزئى

Partial Differential .

١٥-١ – عـام

يجب أن لا يغيب عن الذهن فى كل ما درسناه سابقاً أن عمليات إيجاد المشتقة الأولى كانت للدوال ذات المتغير المستقل الواحد أى أن : $y = f(x)$

إلا أنه فى كثير من الحالات تكون الكمية y مرتبطة بأكثر من متغير مستقل (إثنين أو أكثر) .

وفى هذه الحالة فإن عملية إيجاد المشتقات الجزئية تكون بنفس أسلوب إيجاد مشتقات الدوال ذات المتغير الواحد مع الاختلاف فى طريقة التعامل مع باقى المتغيرات المستقلة عند إجراء التفاضل أو الاشتقاق لأحد هذه المتغيرات .

فمثلاً إذا كانت $y = f(x , z)$ فإنه عند حساب المعامل التفاضلى الجزئى لها بالنسبة للمتغير x فإن المتغير الآخر z يعامل معاملة المقدار الثابت طبقاً لقواعد التفاضل المعتادة. وعند إجراء التفاضل بالنسبة إلى المتغير z ، فإنه وبالمثل ، تُعامل x معاملة المقدار الثابت.

وعموماً فإنه إذا كانت ' y ' دالة فى أكثر من متغيرين فإنه عند إيجاد المشتقة الجزئية لأحد هذه المتغيرات ، فإن بقية المتغيرات تُعامل معاملة المقدار الثابت .

١٥-٢ :- التفاضل الجزئى للدوال ذات المتغيرين :-

(١) المشتقة الجزئية الأولى :-

وفى الدوال ذات المتغير الواحد مثل $y = f(x)$

فإن المشتقة الأولى لهذه الدالة y بالنسبة للمتغير المستقل x تعبر عن معدل التغير اللحظى فى المتغير التابع y والذى يحدث نتيجة لتغير طفيف فى المتغير المستقل x .

والآن ماذا تعنى المشتقة الأولى لدالة فى متغيرين مستقلين مثل x , z أى أن :-

$y = f(x , z)$

سنجد أن المشتقة الأولى **الجزئية** عبارة عن معدل التغير فى المتغير التابع "y" الذى يحدث نتيجة لتغير طفيف فى المتغيرين المستقلين x , z ولكن كل منهما على حدة .

ولنعتبر الحالة التالية :-

حجم الغاز يعتمد على كل من الضغط ودرجة الحرارة المعرض لها فإذا فرضنا أن :-

حجم الغاز = V

ضغط الغاز = P

درجة حرارة الغاز = t

ويعُبر عن العلاقة هذه فى الصيغة التالية :-

$$V = k\,\frac{t}{p}$$

حيث k ثابت " حجم الغاز يتناسب طردياً مع درجة حرارته بينما يتناسب عكسياً مع الضغط المعرض له فإذا زادت الحرارة زاد الحجم والعكس بالعكس وإذا زاد الضغط قل الحجم والعكس بالعكس " .

(١) ولنفترض أن **الحرارة متغيرة** وأن الضغط يبقى ثابتاً .

$$\therefore \frac{dv}{dt} = k \times \frac{1}{p} \qquad \text{..........} (١)$$

(٢) ولنفترض أن **الضغط يتغير** مع بقاء درجة الحرارة ثابتة .

$$\therefore \frac{dv}{dp} = k \,.\, \frac{t}{-p^2} = -\,k\frac{t}{p^2} \qquad \text{..........} (٢)$$

ومن ذلك نلاحظ فى هذه الحالة أنه لما كان هنالك متغيران فقد تكونت لنا مشتقتان (١) ، (٢) أى $\frac{dv}{dt} , \frac{dv}{dp}$

ويطلق على هذه المشتقات بالمشتقات الجزئية

Partial derivatives or Partial differential coefficients

وقد اختيرت رموز خاصة للتعبير عن هذه المشتقات الجزئية . فبدلاً من الحرف d (كما فى $\frac{dy}{dx}$) نضع الرمز "∂" ويُقرأ [التفاضل الجزئى] Partial differential

وبذلك فإن المشتقات الجزئية السابقة فى (١) , (٢) يعُبر عنها كالتالى :-

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \cdot \frac{1}{p} \qquad \text{..........} (٣)$$

$$, \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{kt}{p^2} \qquad \text{..........} (٤)$$

وتعنى (٣) أن الحجم V قد تم تفاضله بالنسبة إلى t مع بقاء p ثابتة فى حين تعنى (٤) أن الحجم V قد تم تفاضله بالنسبة إلى p مع بقاء t ثابتة .

وعموماً إذا كانت z دالة فى y , x أى $z = f(x , y)$ فإن :-

$\frac{\partial z}{\partial x}$ عندما x متغيرة ، y ثابتة

$\frac{\partial z}{\partial y}$ عندما y متغيرة ، x ثابتة

ويمكن تعريف المعامل التفاضلى الجزئى كالتالى :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x , y)}{\Delta x}$$

$$, \frac{\partial z}{\partial y} = \underset{\Delta y \to 0}{Lt} \frac{f(y + \Delta y , x) - f(x , y)}{\Delta y}$$

أمثـــــلة :-

(١) اوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :

$$y = 5x^2 + 6z^3$$

الحـــــل :-

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 10x + 0 = 10x$$, " $6z^3$ = ثابت "

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 0 + 18z^2 = 18z^2$$, " $5x^3$ = ثابت "

(٢) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$y = 8x^2z + 4x^3z^2 - 5z^3x$$

الحـــــل :-

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (8z) \times 2x + \left(4z^2\right) \times 3x^2 - \left(5z^3\right) \times 1$$

$$= 16xz + 12\ x^2z^2 - 5z^3 \qquad (z = \text{ثابت})$$

$$,\frac{\partial y}{\partial z} = \left(8x^2\right) \times 1 + \left(4x^3\right) \times 2z - (5x) \times 3z^2$$

$$= 8x^2 + 8x^3z - 15xz^2 \qquad (x = \text{ثابت})$$

(٣) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$Z = 2x^3 + 5x^2y + xy^2 + y^3$$

الحـــــل :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + 10xy + y^2 + 0 \qquad (y = \text{ثابت})$$

$$,\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 5x^2 \times 1 + 2xy + 3y^2 \qquad (x = \text{ثابت})$$

(٤) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$Z = \sin x + y^2 \cos x + e^{2y}$$

الحـــــل :-

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cos x + 2\ e^{2y} \qquad (x = \text{ثابت})$$

$$,\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x - y^2 \sin y \qquad (y = \text{ثابت})$$

(٥) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$Z = f\ (x\ ,\ y) = e^{x^2+y^2}$$

الحـــــل :-

باستخدام قواعد تفاضل الدالة الأسية فإن :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2} \times 2x \ = 2x\ e^{x^2+y^2} \qquad (y = \text{ثابت})$$

$$,\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2} \times 2y \ = 2ye^{x^2+y^2} \qquad (x = \text{ثابت})$$

(٦) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$y = \left(4x^2 - 3z^3\right)^4$$

الحـــــــــل :-

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4\left(4x^2 - 3z^3\right)^3 \times 8x$$

$$= 32x\left(4x^2 - 3z^3\right)^3 \qquad , (z = constant)$$

$$, \frac{\partial y}{\partial z} = 4\left(4x^2 - 3z^2\right)^3 \times -6z$$

$$= -24z\left(4x^2 - 3z^2\right)^3 \qquad , (x = constant)$$

(٧) فى دراسة لخطة تسويق منتجات أحد المصانع وُجد أن عدد الوحـدات التـى يبيعهـا المصنع سنوياً تعتمد على تطوير الأبحاث والإنفاق عليها وعلى تطوير الماكينات كذلك . وكـانت العلاقـة بـين كميـة المبيعـات "y" ومصـاريف الأبحـاث " x بـالألف جنيـه " ومصاريف تطوير الماكينات " z بالألف جنيه " كالتالى :-

$$y = f\,(x\,,\,z) = 1200x + 5000z - 10x^2 - 7z^3 - 30xz$$

فإذا افترضنا أن الشركة تنفق ما مقداره وحدة واحدة علـى الأبحـاث (أى ألـف جنيـه) وخمس وحدات على تطوير الماكينات (خمسة آلاف جنيـه) فإنـه مـن المتوقـع أن يكـون عدد الوحدات المباعة كالتالى :-

$$y_{(1\,,\,5)} = 1200 \times 1 + 5000 \times 5 - 10 \times 1^2 - 7 \times 5^3 - 30 \times 1 \times 5$$

$$= 1200 + 25000 - 10 - 7 \times 125 - 150$$

$$= 26200 - 1035$$

$$= 25165$$ وحدة

فإذا ما فرضنا أن المصنع يرغب فى زيادة المبالغ المخصصـة على الأبحـاث وتطويرهـا ممـا يساعد بالتبعية على رفعة جودة المنتج وسرعة بيعه .

ونريد أن نعرف مدى تأثير الزيادة المخصصة للأبحاث هذه على عـدد الوحـدات المتوقـع بيعها .

فإنه بالتفاضل الجزئى الأول للدالة y بالنسبة إلى x يمكن الحصول على رقم تقديرى (قريبا من الواقع) كما يلى :-

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 1200 - 20x - 30z$$

ولما كان المطلوب هو حساب معدل التغير اللحظى عندما :- $z = 5 , x = 1$

$$\therefore \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{(1, 5)} = 1200 - 20 \times 1 - 30 \times 5$$

$$= 1200 - 170$$

$$= 1030$$

وهذا يعنى أن زيادة الأبحاث بمقدار وحدة واحدة (ألف جنيه) تؤدى إلى زيادة متوقعة فى كمية الوحدات المباعة قدرها 1030 وحدة .

ولكن كيف يمكننا معرفة مدى دقة هذا التوقع

لذلك ، يلزم إيجاد قيمة y عندما : $z = 5 \; , \; x = 2$

أى عندما تزيد x من 1 وحدة إلى 2 وحدة نقدية .

$$\therefore y_{(2, 5)} = 1200 \times 2 + 5000 \times 5 - 10 \times 2^2 - 7 \times 5^3 - 30 \times 2 \times 5$$

$$= 2400 + 25000 - 40 - 7 \times 125 - 300$$

$$= 27400 - 1215$$

$$= 26185 \quad \text{وحدة}$$

فإذا ما قارنا $y_{2,5}$ وهى تساوى 26185 وحدة بـ (1030 + 25165) أى 26185 بـ : 26195

سنجد أن الفرق ضئيل جداً ومن هنا نجد أن المشتقة الجزئية قد أعطت نتائج قريبة جداً من المتوقع وبنسبة لا تتعدى 10 وحدات .

أى $\frac{10}{26185}$ أى حوالى ٪ 38×10^{-5} أقل من ٪ 0.04

والآن إذا ما رغبنا فى زيادة المبالغ المخصصة لتطوير المعدات والآلات بهذا المصنع بمقدار وحدة نقدية واحدة (1000 جنيه) أى أن Z ستزيد بمقدار واحد ، فإنه يمكن حساب

الزيادة المتوقعة فى عدد الوحدات المباعة بحساب معدل التغير فى y نتيجة لتغير z بمقدار وحدة واحدة .

∴ معدل التغير اللحظى :-

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 5000 - 21 z^2 - 30 x$$

$$\therefore \left[\frac{\partial y}{\partial z}\right]_{(1,5)} = 5000 - 21 \times 5^2 - 30 \times 1$$

$$= 5000 - 525 - 30$$

$$= 4445 \quad \text{وحدة}$$

بمعنى أن زيادة المبالغ المخصصة بمقدار وحدة واحـدة فـى تطويـر الماكينـات قـد أدى إلى زيادة فى المبيعات بحوالى 4445 وحدة .

والآن يراد معرفة مدى الدقة فى تقدير المبيعات المتوقعة عندما تكون مصـاريف الأبحـاث ١ وحدة . بينما تزداد مصاريف تطوير المعدات بمقدار وحدة واحدة لتُصبح 6 وحدات.

$$\therefore y_{(1,6)} = 1200 \times 1 + 5000 \times 6 - 10 \times 1^2 - 7 \times 6^3 - 30 \times 1 \times 6$$

$$= 1200 + 30000 - 10 - 1512 - 180$$

$$= 31200 - 1702$$

$$= 29498 \quad \text{وحدة},$$

وبمقارنة هذه الكمية مع الكمية (29610 = 4445 + 25165)

نجـد أن الفـرق حـوالى 112 وحـدة وهـو ليـس كبـيراً لأن نسـبة الخطـأ لا تتعـدى

$$\frac{112}{29498} = 37 \times 10^{-4} \quad \text{أقل من} \quad 0.4\ \%$$

لاحظ أن الزيادة نشأت عن أن الدالة تربيعية فى x بينما تكعيبية فى z

وكلما زادت درجة أو قوة أحد المتغيرات ازداد الفرق المتوقع .

٢- المشتقة الجزئية الثانية :-

إن إيجاد المشتقة الثانية الجزئية للدوال ذات المتغيرين المستقلين لا يختلف فـى حسـابه عـن قواعد التفاضل المعروفة غير أنه يجب ملاحظة ما يلى :-

فى حالة $y = f(x)$ كان المتغير المستقل واحد وكانت المشتقة الأولى y' واحدة وكذلك المشتقة الثانية واحدة فقط للدالة .

أما فى حالتنا هذه حيث يوجد متغيران مستقلان فإن المشتقة الجزئية الأولى عبارة عن مشتقتين $\left(\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}\right)$

ومن هنا فإنه عند إيجاد المشتقة الجزئية الثانية سيكون لدينا الإشتقاقات التالية :-

نفرض :- $Z = f(x, y)$

هى المشتقة الجزئية الأولى $\begin{bmatrix} \therefore \frac{\partial z}{\partial x} & , & y = \text{ثابت} \\ , \frac{\partial z}{\partial y} & , & x = \text{ثابت} \end{bmatrix}$

$$,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right].$$

وهذا يعنى أن الاشتقاق الجزئى الأول بالنسبة إلى x $\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]$، سيُشتق جزئياً مرة ثانية بالنسبة إلى x $\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]$ ومرة ثانية بالنسبة إلى y $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

كما وأن الاشتقاق الجزئى الأول بالنسبة إلى y $\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]$ ، سيُشتق جزئياً مرة ثانية بالنسبة إلى x $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ ومرة ثانية بالنسبة إلى y أى $\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]$ أى أن المشتقة الجزئية الثانية لدالة فى متغيرين مستقلين عبارة عن أربعة اشتقاقات .

أمثـــــلة :-

(٨) أوجد المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة :-

$$Z = f(x, y) = 6x^3 - 5x^2y + 10xy + 8y^3$$

الحــــل :-

المشتقات الجزئية الأولى كالتالى :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 18x^2 - 10xy + 10\ y \qquad (,y = constant)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -5x^2 + 10\ x + 24y^2 \qquad (,x = constant)$$

والمشتقات الجزئية الثانية تكون كالتالى :-

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 36\ x - 10\ y \qquad (,y = constant)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = -10\ x + 10 \qquad (,x = constant)$$

بالإضافة إلى :-

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -10x + 10 \qquad (,y = constant)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 48\ y \qquad (,x = constant)$$

ولاحظ أن عددها أربعة مشتقات جزئية

ولاحظ كذلك أن $\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -10\ x + 10\right]$

(٩) أوجد المشتقة الجزئية الأولى والثانية للدالة :-

$$Z = f\ (x\ ,\ y) = -3x^3 + 5y^4 - 3x^2y^2$$

الحـــــــل :-

المشتقات الجزئية الأولى :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -9x^2 - 6xy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 20y^3 - 6\ x^2y$$

والمشتقات الجزئية الثانية :-

(١) ....

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -18x - 6y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=-12xy, \qquad \text{..........} (٢)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-12xy, \qquad \text{..........} (٣)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=60y^2-6x^2, \qquad \text{..........} (٤)$$

لاحظ أن (٣) تساوى (٤) وقد لاحظنا هذا فى المثال السابق وتعرف هذه بالمشتقات الجزئية الثانية المتقاطعة $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

وهى متساوية لكل الدوال التى سنتعرض لها هنا .

وتساعد هذه الملاحظة فى التأكد من صحة كل المشتقات الجزئية الأولى والثانية المتقاطعة.

١٥-٣ :- التفاضل الجزئى للدوال فى أكثر من متغيرين :-

نفترض أن الدالة : $G(x, y, z)=(G)$ فى ثلاث متغيرات مستقلة هى x, y, z

سنجد أن عدد المشتقات الجزئية الأولى = ٣ مشتقات

بينما عدد المشتقات الجزئية الثانية = ٩ مشتقات

١- المشتقات الجزئية الأولى فى ثلاث متغيرات :-

$$\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}$$

٢- المشتقات الجزئية الثانية فى ثلاث متغيرات :-

تفاضل جزئى بالنسبة إلى x للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى y للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى x

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial y\partial x}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى z للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى x

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x}$$

بالإضافة إلى :-

تفاضل جزئى بالنسبة إلى x للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلىy

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى y للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلىy

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى z للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلىy

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial y}$$

وأخيـــراً :-

تفاضل جزئى بالنسبة إلى x للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى z

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى y للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى z

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى z للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى z

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$$

وهكذا الأمر فى حالة دالة فى أربعة متغيرات مستقلة ، سنجد أن :-

المشتقات الجزئية الأولى عددها ٤ بينما المشتقات الجزئية الثانية عددها ١٦ (كل واحدة من الأربعة اشتقاقات بالأولى تُشتق أربع مرات للمرة الثانية) .

وعمومـــاً :-

عدد المشتقات الجزئية الأولى لأى دالة = عدد المتغيرات المستقلة فى هذه الدالة

بينما عدد المشتقات الجزئية الثانية لهذه الدالة = مربع عدد المتغيرات المستقلة بها

أى أنه إذا كانت : $y = f\left(x_1 , x_2 , x_3 .... x_n\right)$

فإن عدد المشتقات الجزئية الأولى = n

، عدد المشتقات الجزئية الثانية = n^2

أمثـلة :-

(١٠) إذا كانت :

$$G = func.(x , y , z) = 5x^3 + 12x^2 y^3 + 8yz^3 + 7y^4$$

فأوجد المشتقات الجزئية الأولى والثانية لهذه الدالة :

الحـــــــل :-

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 15x^2 + 24xy^3 \qquad .... (A)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 36x^2y^2 + 8z^3 + 28y^3 \qquad .... (B)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 24yz^2 \qquad .... (C)$$

ولايجاد المشتقات الجزئية الثانية :-

نفاضل المعادلة " A " ثلاث مرات بالنسبة إلى "x , y , z"

، نفاضل المعادلة " B " ثلاث مرات بالنسبة إلى "x , y , z"

، نفاضل المعادلة " C " ثلاث مرات بالنسبة إلى "x , y , z"

∴ بالنسبة إلى A :-

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 30x + 24y^3 \qquad .... (١)$$

$$, \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x} = 72xy^2 \qquad .... (٢)$$

$$, \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x} = 0\ (zero) \qquad .... (٣)$$

، بالنسبة إلى (B) :-

$$,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}=72xy^2$$ .... (٤)

$$,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}=72x^2y$$ .... (٥)

$$,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial y}=24z^2$$ .... (٦)

وبالنسبة إلى (C) :-

$$,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z}=0\ (zero)$$ .... (٧)

$$,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z}=24z^2$$ .... (٨)

$$,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}=48yz$$ .... (٩)

لاحظ أن عددها ٩ مشتقات جزئية ولاحظ التالى أيضاً :-

رقم (٢) = رقم (٤) = $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}=72xy^2$

، رقم (٣) = رقم (٧) = $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z}=\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x}=0\ (zero)$

، رقم (٦) = رقم (٨) = $\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z}=\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial y}=24z^2$

١٥-٤ :- مصفوفة هيس والمحدد الهيسى Hessian matrix and determinant

قام هيس بوضع التفاضلات الجزئية الثانية للدالة فى مصفوفة مربعة ومحدد المصفوفة المربعة هذه يُطلق عليه بالمحدد الهيسى .

وقد علمنا مما سبق أن عدد المشتقات الجزئية الأولى للدالة فى متغيرين هو ٢ بينما المشتقات الجزئية الثانية = $2^2 = 4$ وفى حالة ٣ متغيرات مستقلة فإن المشتقات الجزئية الثانية = 3^2 وفى حالة n متغير مستقل فإن المشتقات الجزئية الثانية $n \times n = n^2$

وتكون مصفوفة هيس كالتالى :-

١) فى حالة متغيرين : $Z = f(x\ ,\ y)$

مصفوفة هيس ٢ × ٢ =

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \end{bmatrix}$$

ويمكن اختصارها هكذا :

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

حيث :-

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = z_{12} \quad , \quad z_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad z_1 = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z_{21}, \quad z_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} \quad , \quad z_2 = \frac{\partial z}{\partial y}$$

بينما تكون مصفوفة هيس فى حالة دالة فى ثلاثة متغيرات كالتالى :-

مصفوفة هيس " ٣ × ٣ "

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}$$

وفى حالة n متغير مستقل فإن مصفوفة هيس تكون كالتالى :-

مصفوفة هيس n × n

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \ldots\ldots Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \ldots\ldots Z_{2n} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \ldots\ldots Z_{3n} \\ . & . & . \qquad . \\ . & . & . \qquad . \\ Z_{n1} & Z_{n2} & Z_{n3} \ldots\ldots Z_{nn} \end{bmatrix}$$

أى أن الصف الأول عناصره عبارة عن :-

مشتقات $\frac{\partial z}{\partial x}$ بالنسبة إلى كل المتغيرات على الترتيب $(x , y \ldots)$

، عناصر الصف الثانى عبارة عن :-

مشتقات $\frac{\partial z}{\partial y}$ بالنسبة إلى جميع المتغيرات على الترتيب $(x , y \ldots)$

بينما عناصر الصف الثالث فهى عبارة عن :-

مشتقات $\frac{\partial z}{\partial m}$ (m هـى المتغير المستقل الثـالث مثـلاً فىالدالـة Z خـلاف $(x , y ...)$ بالنسبة إلى جميع المتغيرات على الترتيب $(x , y , m ...)$

أمثـــلة :-

(١١) كون مصفوفة هيس ومن ثم احسب قيمة المحـدد الهيسـى لكـل مـن الـدوال التالية :-

أ) $Z = f(x , y) = 6x^3 - 5x^2y + 10xy + 8y^2$

ب) $Z = f(x , y) = -3x^3 + 5y^4 - 3x^2y^2$

الحـــــــل :-

الدالة (أ) هى المثال رقم ٨ السابق حله

وسوف نجد أن :-

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = Z_{11} = 36\,x - 10y$$

$$Z_{12} = -10\,x + 10$$

$$,Z_{21} = -10\,x + 10$$

$$,Z_{22} = 48y$$

∴ مصفوفة هيس لهذه المسألة :-

$$\begin{bmatrix} (36x - 10y) & (-10x + 10) \\ (-10x + 10) & (48y) \end{bmatrix}$$

وقيمة المحدد الهيسى :-

$$\begin{vmatrix} 36x - 10y & -10x + 10 \\ -10x + 10 & 48y \end{vmatrix} = \Delta$$

$$= [(36x - 10y)\,(48y)] - [(-10x + 10)\,(-10x + 10)]$$

$$= 1728xy - 480y^2 - [100x^2 - 200x + 100]$$

$$= 1728xy - 480y^2 - 100x^2 + 200\,x - 100$$

، الدالة (ب) هى المثال رقم (٩) السابق حله :-

وسوف نجد أن :-

$$Z_{11} = -18x - 6y^2$$
$$Z_{12} = -12xy$$
$$Z_{21} = -12xy$$
$$Z_{22} = 60y^2 - 6x^2$$

∴ مصفوفة هيس فى هذه الحالة :-

$$\begin{bmatrix} -18x - 6y^2 & -12xy \\ -12xy & 60y^2 - 6x^2 \end{bmatrix}$$

، قيمة المحدد الهيسى $\Delta =$

$$\Delta = \begin{bmatrix} -18x - 6y^2 & -12xy \\ -12xy & 60y^2 - 6x^2 \end{bmatrix}$$
$$= \left[\left(-18x - 6y^2\right)\left(60y^2 - 6x^2\right)\right] - \left[+ 144x^2y^2\right]$$
$$= -1080xy^2 + 108x^3 - 360y^4 + 36x^2y^2 - 144x^2y^2$$
$$= -360y^4 + 108x^3 - 1080xy^2 - 108x^2y^2$$

١٥-٥ :- توضيح معنى التفاضل الجزئى بيانياً وهندسياً

Graphical and Geometrical illustration of partial derivatives

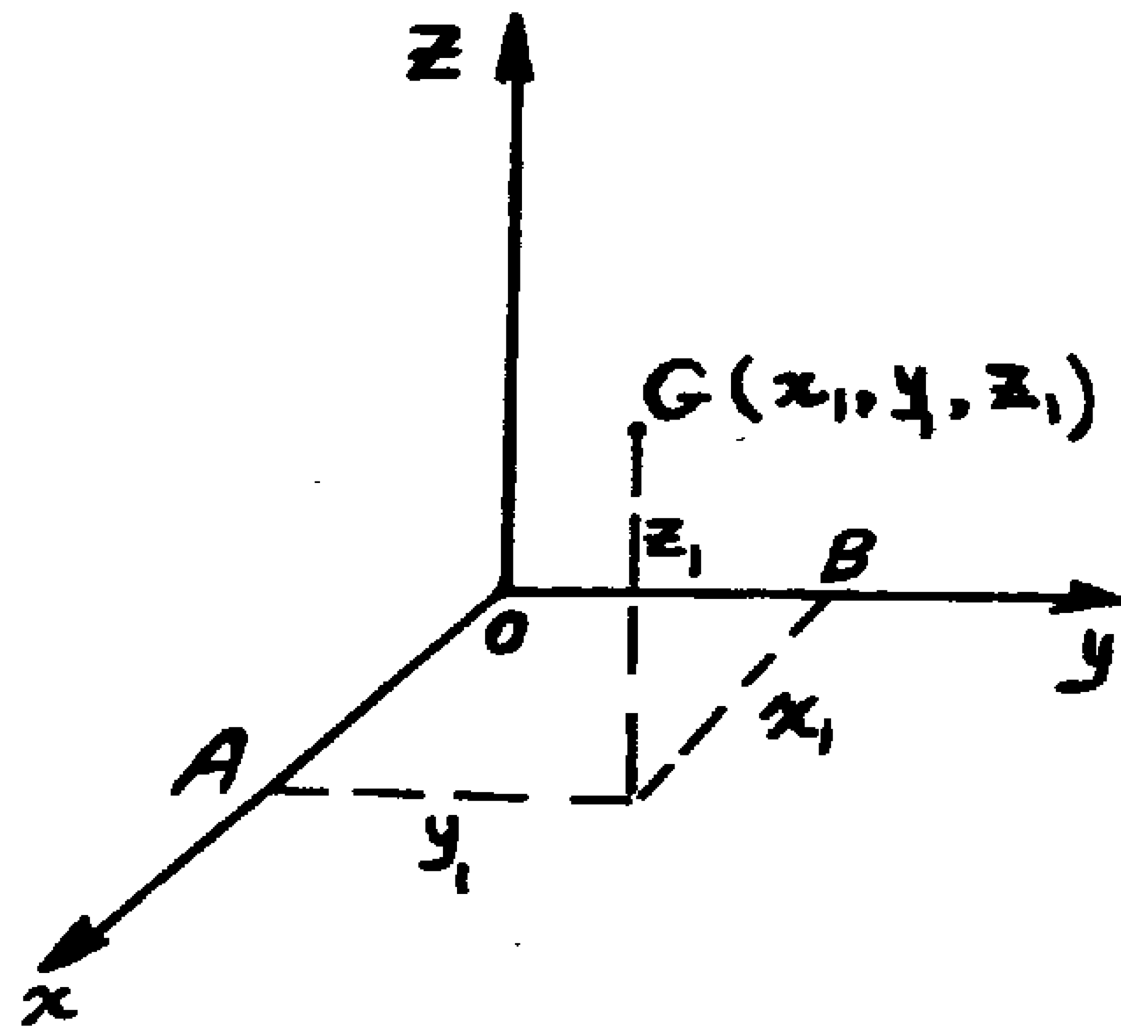
نعلم أن الدالة $y = f(x)$ يمثلها مستقيم عندما تكون x من الدرجة الأولى ويقع هذا المستقيم فى المستوى $X\,O\,Y$

بينما يمثلها منحنى مستوى يقع فى المستوى $X\,O\,Y$ كذلك (أو فى أى مستوى آخر) إذا كانت درجتها أى x من الثانية فأكثر .

هذا الكلام عندما يكون هنالك متغير واحد مستقل وهو x

ولكن فى حالة الدالة $Z = f(x\,,\,y)$ ، فهنالك متغيرين مستقلين $x\,,\,y$ ومتغير تابع وهو Z ويمكن تمثيل هذه الدالة بواسطة سطح Surface أى إحداثيات فراغية (ثلاثية الأبعاد) ، كالتالى :

أنظر الرسم شكل (١٥-١).



شكل (١٥-١)

نعتبر المحورين OX , OY المتعامدين على بعضهما ويمثلهما المستوى (الأفقى) XOY ، ويمكننا تمثيل متغيرين مستقلين y , x على المحورين OX , OY وسوف نطلق عليه المستوى xy .

فإذا ما أقمنا العمود OZ على هذا المستوى من O فسينشأ لدينا مستويان XOZ , YOZ عموديان على المستوى xy ومتعامدان مع بعضهما فى نفس الوقت ويطلق عليهما بالمستويان xz , yz

ويمثل المحور OZ قيم Z المناظرة لقيم كل من y , x .

فإذا افترضنا أن النقطة p (point = p) فى المستوى xy والتى إحداثياها هى : (x_1 , y_1)

حيث نوقع على المحور ox النقطة B التى إحداثيها x_1 على المحور OX ونوقع على المحور oy النقطة A التى إحداثيها y_1 على المحور OY وبذلك فإن p التى تقع فى المستوى "$xy = XOY$" وإحداثياها هما (x_1 , y_1)

فإذا ما رسمنا من p عموداً على المستوى XOY وموازياً للمحور OZ وبحيث يكون طوله مساوياً لقيمة Z أى يساوى Z_1 المناظرة لقيمتى (x_1 , y_1) .

وبذلك سنجد أن النقطة C تُمثل وضع النقطة في الفراغ عندما تكون المحاور OZ , OY , OX والإحداثيات هي Z_1 , Y_1 , X_1

فإذا ما تغيرت قيم y , x وأوجدنا قيم Z المناظرة لهما ، سنجد أنه يمثلها نقطة أخرى على السطح ذاته الذى تقع عليه C .

أولاً :- نعتبر y ثابتة وقيمتها هى y_1 :-

سنجد أن المنحنى GCE يمثل التغيرات فى Z بالنسبة إلى x مع ثبوت y

وبالتبعية فإن المشتقة الجزئية الأولى للدالة بالنسبة إلى x أى :-

تمثل ميل المماس للمنحنى GCE : $\frac{\partial z}{\partial x}$

المناظرة لأى قيمة محددة لـ x

فمثلاً عندما $x = x_1$ فإن نقطة C هى النقطة المناظرة على المنحنى GCE وتكون قيمة ميل المماس لهذا المنحنى عند نقطة C التى إحداثيها $x = x_1$ هو $\frac{\partial z}{\partial x}$

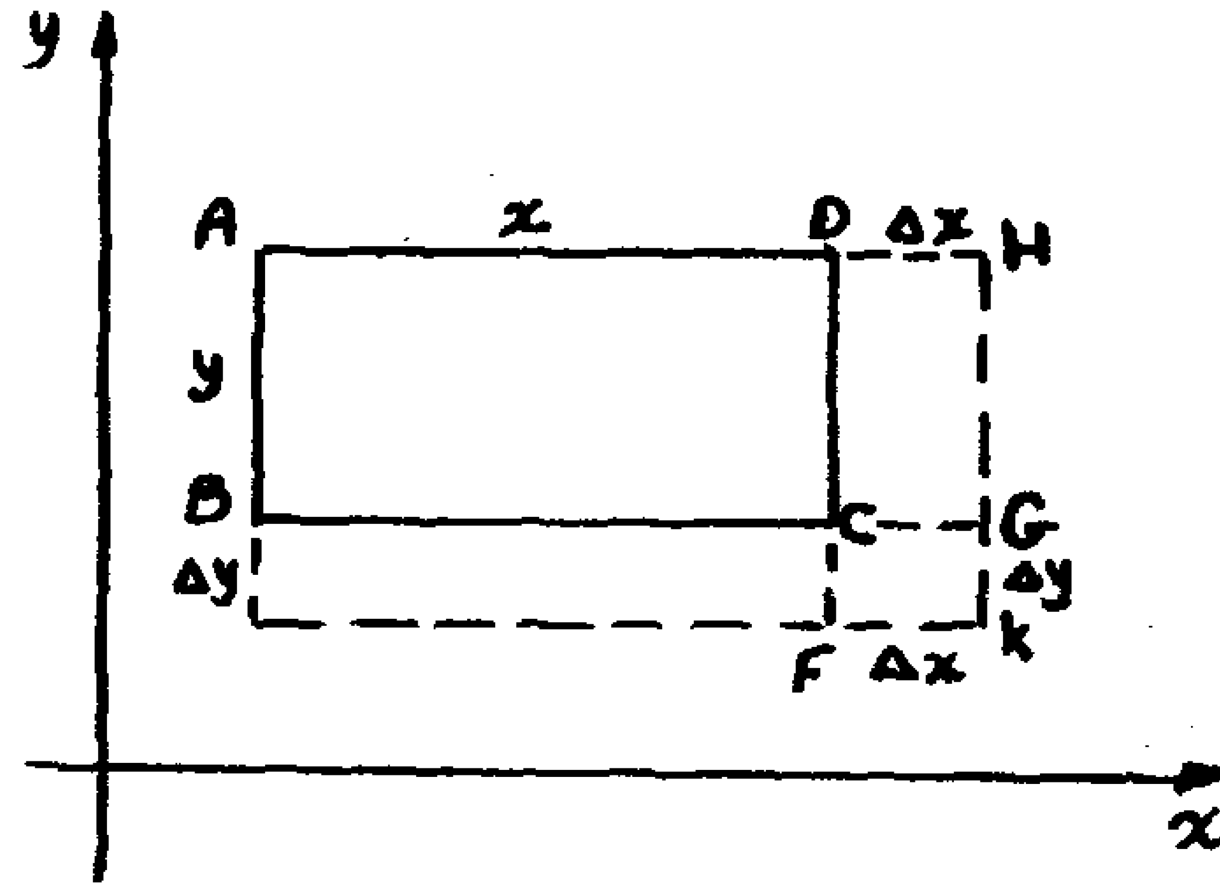
ثانيــاً :- نعتبر x ثابتة وقيمتها هى x_1 :-

سنجد أن المنحنى FCD يمثل التغيرات فى Z بالنسبة إلى y مع ثبوت قيمة x ويكون المماس لهذا المنحنى FCD عند أى نقطة عليه مساوياً أو معبراً عن $\frac{\partial z}{\partial y}$ لقيم y , z

والآن :- نريد أن نوضح كذلك معنى المشتقة الجزئية الأولى لدالة فى متغيرين هندسياً .

لنعتبر أن لدينا مستطيلاً ، بالطبع مساحته دالة فى متغيرين وهما طوله وعرضه غير المتساويين .

ويوضح شكل (١٥-٢) مستطيل بعداه x , y ومساحته A .



شكل (١٥-٢)

$\therefore A = xy$

فإذا اعتبرنا ثبوت y مع تغير x بمقدار ضئيل قدره Δx

$\therefore A + \Delta A = (x + \Delta x) \times y$

$, \Delta A = y \,.\, \Delta x$

ويمثلها بالشكل المساحة CGHD

ومعدل زيادة A بالنسبة إلى x مع بقاء y ثابتة يعنى التفاضل الجزئى $\frac{\partial A}{\partial x}$ أى $\frac{\partial}{\partial x}(xy)$ وهى تساوى y

وبالمثل إذا اعتبرنا ثبوت x مع تغير y فإن التغير فى المساحة يمثله الشكل المستطيل $x\,\Delta y = BEFC$

ومعدل الزيادة فى المساحة :- $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial Y}(xy) = x$

أما إذا تغيرت كل من x , y فإن :-

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} \,.\, dx + \frac{\partial A}{\partial y} \,.\, dy$$
$$= y\,dx + x\,dy$$

وبمقارنة هذا بالشكل (١٥-٢) يتضح أن الزيادة الكلية فى المساحة نتيجة لتغير كل من x , y بمقدار ضئيل ؛ عبارة عن :-

المستطيل BEFC ، والمستطيل CGHD والمستطيل الصغير CFKG

أى :- $y\,dx + x\,dy + dx\,dy$

وحيث أن $dx\,dy$ هى حاصل ضرب مقدارين متناهيين فى الصغر . لذلك فـإن قيمتهـا النهائية تكون أكثر تناهياً فى الصغر .

وبذلك فإنه يمكن اعتبار الزيادة الفعلية فى المساحة نتيجة لتغير كل من x , y هى :-

$y\,dx + x\,dy$

فإذا ما افترضنا أن y = 8m ؛ وأنه عند لحظة معينة كانت y تزداد بمعدل 2m/sec

ونفترض كذلك أن $x = 5m$ وأنه عند نفس اللحظة كانت x تزداد بمعدل 3m/sec

والمطلوب هو حساب معدل زيادة A عند نفس اللحظة :

فإذا ما أدخلنا فى هذه المسألة عنصراً متغيراً آخراً وهو الزمن "t" فسوف نجد أنـه بمـرور الزمن (أى تغير t) فإن قيم كل من x , y , A تتغير مع الزمن كذلك .

وعليه فإن معدل زيادة A يكون عبارة عن مجموع المعاملات التفاضلية كالتالى :-

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$, \because \frac{\partial A}{\partial x} = y = 8$$

$$, \frac{\partial A}{\partial y} = x = 5$$

$$, \frac{dy}{dt} = 2$$

$$, \frac{dx}{dt} = 3$$

$$\therefore \frac{dA}{dt} = 8 \times 3 + 5 \times 2 = 34\ m^2/\sec$$

١٥-٦ :- التفاضل الجزئى والدوال الضمنية :-

نعتبر $Z = f(x\,,\,y)$ وتساوى ثابت وليكن قدره C

$$i.e \qquad Z = f(x\,,\,y) = C$$

$$\therefore dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0$$ (تفاضل الثابت = صفر)

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} . dy = \frac{\partial z}{\partial x} . dx$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}$$

أمثـــــلة محلـولة :-

(١٢) إذا كانت $Z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ **فأوجد** dz

الحـــــــل :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \times \left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$= \frac{x^2}{x^2 + y^2} \times \left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$= \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \times \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\therefore dz = \frac{\partial z}{\partial x} . dx + \frac{\partial z}{\partial y} . dy$$

$$= \frac{-y}{x^2 + y^2} . dx + \frac{x}{x^2 + y^2} . dy = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

(١٣) إذا كانت :-

$$Z = 4x^3 - xy^2 + y^3 = 0$$

فـاوجد $\frac{dy}{dx}$

الحـــــل :-

$$\because \frac{dy}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \div \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$, \frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2 - y^2$$

$$, \frac{\partial z}{\partial y} = -2xy + 3y^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(12x^2 - y^2\right) \div \left(-2xy + 3y^2\right)$$

(١٤) إذا كانت $Z = 4x^2 - 3y^2 + 5xy$

فاوجد $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

الحـــــل :-

عند إيجاد المشتقة الجزئية $\frac{\partial z}{\partial x}$ فإننا نفاضل بالنسبة إلى x ونتعامل مع y كما لو كانت ثابتاً .

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = 8x + 5y$$

وعند إيجاد المشتقة الجزئية $\frac{\partial z}{\partial y}$ فإننا نفاضل بالنسبة إلى y ونتعامل مع x كما لوكانت ثابتاً .

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = -6y + 5x$$

(١٥) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$Z = 2x^2 + 5xy + 4y^2$$

الحـــــل :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 5y$$

$$, \frac{\partial z}{\partial y} = 5x + 8y$$

(١٦) **إذا كانت** $xy = 5Z^2$ **فأوجد** $\frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial x}$

الحـــــل :-

$$\because xy = 5Z^2$$

$$\therefore y = \frac{5Z^2}{x}$$

ولإيجاد $\frac{\partial y}{\partial x}$ ، نفاضل بالنسبة إلى x ونتعامل مع Z كثابت

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-5Z^2}{x^2}$$

ولإيجاد $\frac{\partial y}{\partial z}$ نفاضل بالنسبة إلى Z ونعتبر x ثابت .

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{10}{x} Z$$

(١٧) **المطلوب إيجاد المشتقات الجزئية** Z_{xy} ، Z_{yx} **للدالة .**

$$Z = x^2y + 2xe^{\frac{1}{y}}$$

وبين أن $Z_{yx} = Z_{xy}$

الحـــــل :-

لإيجاد المشتقة الجزئية الثانية ، يلزم إيجاد المشتقة الجزئية الأولى وهى Z_x , Z_y

(ثابت = y ,) $$, Z_x = 2xy + 2e^{\frac{1}{y}}$$

(ثابت = x ,) $$, Z_y = x^2 - \frac{-2x\, e^{\frac{1}{y}}}{y^2}$$

والمشتقات الجزئية الثانية عددها = ٤ لأن عدد المتغيرات = ٢ متغير .

والمطلوب منها اثنتين فقط وهما Z_{xy} أى المشتقة الجزئية الثانية بالنسبة إلى x للمقدار Z_y .

$$\therefore Z_{xy} = 2x - \frac{2e^{\frac{1}{y}}}{y^2} \qquad \text{.........} (١)$$

ولإيجاد Z_{yx} ، نفاضل Z_x بالنسبة إلى y

$$\therefore Z_{yx} = 2x - \frac{2e^{\frac{1}{y}}}{y^2}$$ .... (٢)

ويلاحظ أن : (١) = (٢) مما يعنى أن $Z_{xy} = Z_{yx}$

(١٨) أوجد :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t.\partial x} \text{ and } \frac{\partial^2 y}{\partial x.\partial t}$$

علماً بأن $y = e^{xt}$

الحـــــل :-

لإيجاد $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ نوجد أولاً $\frac{\partial y}{\partial x}$ ونعتبر t = ثابت للمقدار $y = e^{xt}$

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial x} = te^{xt}$$

ثم نفاضل $\frac{\partial y}{\partial x}$ مرة ثانية بالنسبة إلى x ونعتبر t = ثابت

$$\therefore \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = t^2 e^{xt}$$

ولإيجاد $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ نوجد أولاً المشتقة الجزئية الأولى للمقدار بالنسبة إلى t ونعتبر x = ثابت

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial t} = x\, e^{xt}$$ ...., (x = ثابت)

$$, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x^2\, e^{xt}$$ ...., (x = ثابت)

ولإيجاد $\frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial x}$ نفاضل $\frac{\partial y}{\partial x}$ بالنسبة إلى t مع بقاء x = ثابت ولإيجاد $\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial t}$ نفاضل $\frac{\partial y}{\partial t}$ بالنسبة إلى x مع بقاء t = ثابت

$$\therefore \frac{\partial^2 y}{\partial t . \partial x} = e^{xt} + xt\, e^{xt}$$

$$= e^{xt}(1 + xt)$$

$$, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x . \partial t} = e^{xt} + xt\, e^{xt}$$

$$= e^{xt}(1 + xt)$$

وعليه فإن لأى دالة y فى متغيرين x , t فإن كلاً من $\frac{\partial^2 y}{\partial x . \partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t . \partial x}$ ، دائماً .

(١٩) أوجد المشتقات الجزئية للدالة :-

$$A = 2x^2 + 2y^2 - 5xy \cos\theta$$

حيث كل من x , y , θ متغيرات مستقلة

الحـــــــل :-

لإيجاد المشتقة الجزئية Ax أى $\frac{\partial A}{\partial x}$ مع بقاء y , θ كثوابت .

$$\therefore \frac{\partial A}{\partial x} = 4x - 5y \cos\theta$$

ولإيجاد A_y أى $\frac{\partial A}{\partial y}$ نفاضل بالنسبة إلى y مع بقاء x , θثوابت .

$$\therefore \frac{\partial A}{\partial y} = 4y - 5x \cos\theta$$

وبالمثل لإيجاد A_θ أى $\frac{\partial A}{\partial \theta}$ نفاضل بالنسبة إلى θ مع بقاء كل من y , x ثوابت .

$$\therefore \frac{\partial A}{\partial \theta} = 5xy \sin\theta$$

(٢٠) إذا كانت : $G = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

فبين أن : $x \frac{\partial G}{\partial x} + y \frac{\partial G}{\partial y} + z \frac{\partial G}{\partial z} = 0$

الحـــــــل :-

لإثبات هذا يلزم إيجاد المشتقات الجزئية الأولى التالية :-

$$\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}$$

ثم نعوض بقيمها فى المعادلة المطلوب إثباتها مساوية للصفر :-

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{y} + z\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}$$

$$, \frac{\partial G}{\partial y} = x\left(\frac{-1}{y^2}\right) + \frac{1}{z} = \frac{-x}{y^2} + \frac{1}{z}$$

$$, \frac{\partial G}{\partial z} = y\left(\frac{-1}{z^2}\right) + \frac{1}{x} = \frac{-y}{z^2} + \frac{1}{x}$$

وبالتعويض نجد أن :-

$$x\frac{\partial G}{\partial x} + y\frac{\partial G}{\partial y} + z\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{x}{y} - \frac{z}{x} - \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 0$$

(٢١) إذا كانت $f(x,y) = x^2y + y^2$ **فأوجد** $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ **باستخدام طريقة** Δ

الحـــــــل :-

لإيجاد $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$

$$\therefore f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = \left[(x+\Delta x)^2 y + y^2\right] - \left(x^2y + y^2\right)$$

$$= (x+\Delta x)^2\ y + y^2 - x^2y - y^2$$

وبالفك والاختصار :

$$\therefore 2xy\ \Delta x + y\ (\Delta x)^2$$

$$\therefore f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x\ , y) - f(x\ , y)}{\Delta x}$$

وبالتعويض عن قيمة البسط فى النهاية بالمقدار : $2xy\ \Delta x + y(\Delta x)^2$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\ (2xy + y\ \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2xy + y\ \Delta x = 2xy$$

وبالمثل فإن :- $f(x\ , y+\Delta y) - f(x\ , y) = x^2\ \Delta y + 2y\ \Delta y + (\Delta y)^2$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x , y+\Delta y) - f(x , y)}{\Delta y} = x^2 + 2y$$

(٢٢) إذا اعتبرنا الرقم ١٨ ممثلاً لمجموع ثلاثة أرقام موجبة . فأوجد هذه الأرقام (الأعداد) بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

الحـــــل :-

نفترض أن أجزاء العدد ١٨ هى x , y , $18 - x - y$ وحاصل ضربها P

$$P = xy\,(18 - x - y)$$

ولجعل حاصل الضرب أكبر ما يمكن ، نوجد المشتقات الجزئية الأولى ونساويها بالصفر ونحل المعادلتين الناتجتين آنياً بالنسبة إلى x , y ، بعد ذلك نوجد المشتقات الجزئية الثانية ونحسب قيمها المناظرة لقيم x , y السابق الحصول عليها من حل المعادلتين .

نعتبر $A = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x}$, $C = \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$

ثم نوجد المقدار $\left[AC - B^2\right]$ فإذا كان أكبر من الصفر عندما A أصغر من الصفر فيكون لدينا نهاية عظمى وبذلك :-

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 18y - 2xy - y^2$$

$$, \frac{\partial p}{\partial y} = 18x - x^2 - 2xy$$

ثم نضع كل من : $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$

$$\therefore 18y - 2xy - y^2 = 0$$

$$, 18x - 2xy - x^2 = 0$$

وبحلهما

$$\therefore 18 - 2x - y = 0$$

$$, 18 - 2y - x = 0$$

$$\therefore 2x + y = 18$$

$$, 2y + x = 18$$

$$\therefore y = x = 6$$

$$, A = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -2y$$

$$, B = \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(18x - x^2 - 2xy\right) = 18 - 2x - 2y$$

$$, C = \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -2x$$

$, at\ (6 , 6)$

$\therefore A = -2 \times 6 = -12$

$, B = 18 - 2 \times 6 - 2 \times 6 = -6$

$, C = -2 \times 6 = -12$

$\therefore AC - B^2 = -12 \times -12 - (-6)^2$

$= 144 - 36 = 108 > 0$

وحيث أن ٠ > A " 12 - " ، ٠ < $AC - B^2$ فإن P يكون لها نهاية عظمى عند (6 , 6)

∴ العدد ١٨ يُجزأ إلى ثلاثة أعداد 6 , 6 , 6 للحصول على أكبر حاصل ضرب .

Exercise 16

أوجد المعاملات التفاضلية الجزئية $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ فى المسائل التالية :-

(١) $Z = \sin^{-1} \frac{x}{y}$

(٢) $Z = \frac{ax}{y^2}$

(٣) $Z = x^y$

(٤) $Z = \tan^{-1} \frac{x}{y}$

(٥) $Z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

(٦) $Z = x^3 + 3x^2y + 6xy^2 + 2y^3$

(٧) $Z = \cos\left(x^2 + y^2\right)$

فى المسائل التالية احسب التفاضلات الكلية :-

(٨) $Z = x^2y + xy^3$

(٩) $Z = ax^2 + 2b\,xy + cy^2$

(١٠) $Z = \frac{x}{y}$

(١١) $Z = Log\ x^y$

(١٢) $Z = e^{xy}$

(١٣) $Z = a^x\ e^y$

(١٤) إذا كانت $Z = 2x^2 + 3y^2$

فأوجد dz عندما $x = 1$, $y = 3$, $dx = 0.01$, $dy = 0.02$

(١٥) إذا كانت $Z = x^5y - \sin y$ فأوجد $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y}$ وبين أنها تساوى $\frac{\partial^2 y}{\partial y \partial x}$

(١٦) اسطوانة دائرية قائمة يزيد نصف قطر قاعدتها عند لحظة معينة بمقدار $1m/\sec$ فى حين يزداد الارتفاع بمعدل $2m/\sec$.

فاحسب معدل زيادة حجم الاسطوانة عندما يكون الارتفاع 10 m ونصف القطر 5 m

(١٧) سطح تُمثله العلاقة : $Z = a^2 - x^2 - 2y^2$ فما هو مقدار الميل عند نقطة على السطح المنحنى عند مقطعه بمستوى بحيث تكون y ثابتة وما هو مقدار الميل عند نقطة على السطح المنحنى عند مقطعه بمستوى بحيث تكون x ثابتة .

(١٨) إذا كانت $Z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ فأوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ للدالة :-

$$x^2 z^2 + y \sin x \, z = 2$$

(١٩) إذا كانت $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ فأوجد قيمة $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

(٢٠) بمعلومية أن : $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة :-

$$f(x , y) = x^2 y + x y^2 = 1$$

(٢١) إذا كان :

$$W = u^2 v + u v^2 + 2u - 3v$$

$$u = \sin(x + y + z)$$

$$, v = \cos(x + 2y - z)$$

فأوجد $\frac{\partial w}{\partial x}$ عندما :-

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$$

(٢٢) إذا كانت :- ثابت = $a + b + c$ في حين أن كل العناصر موجبة فمتى تكون: $a \times b \times c$ ذات أكبر قيمة ؛

أجــوبة التمارين

ANSWERS

Exercise (1)

(1) *a*) 0 , *b*) لقيم x الأقل من ١

c) $0.5\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ 1\ ,\ \frac{4}{3},2,5,10\ ,\ -2\ ,\ -1\ ,\ \frac{-1}{2}\ ,\ \frac{-1}{3}$

d) infinity

e) المنحنى على شكل قطع زائد

(2) *a*) 4.1, 4.01, 4.001 4.000001

b) 4

(3) *a*) 5 , *b*) infinity

(4) *a*) 11 , 5 , 3 , 2.5 , 2.1 , 2.01 *b*) 2

(5) 2 (6) 2 (7) $3x^2$

(8) $\frac{1}{3}$ (9) $\frac{1}{2}$ (10) $\frac{-1}{3}$

(11) $\frac{-5}{2}$ (12) $\frac{-1}{2\sqrt{x}}$ (13) 7 (14) $\frac{2}{3}$

(15) $\frac{1}{4}$ (16) *a*) -0.6 *b*) 1 (17) 1

(18) $\frac{3}{2}$ (19) $\frac{1}{2}$ (20) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (21) $\frac{2}{3}$

(22) $\frac{m}{3}$ (23) $\frac{-1}{2}$ $at\ a > 0$, ∞ $at\ a < 0$

(24) $\frac{2}{3}$ (25) 1 (26) $\frac{-1}{2}$ (27) $\frac{2}{3}$

(28) -2.5 (29) 0 (30) -2 (31) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(32) ∞ (33) $\frac{-3}{2}$ (34) $\frac{1}{6}$ (35) $\frac{1}{4}$

(36) 2.5 (37) -4 (38) -12 (39) $\sqrt{3}$

(40) -1 (41) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (42) 2 (43) $\frac{-1}{56}$

(44) $-\sqrt{2}$ (45) 6 (46) $\frac{1}{3}$ (47) $6\sqrt{2}$

(48) 2 (49) 1 (50) $\frac{1}{9}$

(51) $2\cos x$ (52) $\frac{1}{2}$ (53) $\frac{1}{2}$ (54) 1

(55) $\frac{1}{2}$ (56) $\frac{1}{3}$ (57) $\frac{m^2}{2}$ (58) 3

(59) $-\sqrt{2}$ (60) 8 (61) 4 (62) $-2\sin x$

(63) 1 (64) $\frac{1}{20}$ (65) 2 [$1 + 2x = n^4$ ضع]

(66) 2 (67) $\frac{1}{2}$ (68) $\frac{3}{2}$ (69) 3

(70) 0.2

Exercise (2)

(1) 1.5 , 1.2

(2) a) $\frac{5}{3}$, b) $\frac{-3}{4}$, c) $\frac{-b}{2a}$, d) $\frac{2}{3}$

(3) $y = 1.5\,x + 1$

(4) $\Delta s = 9.8t \times (\Delta t) + 4.9\,(\Delta t)^2$

, $\frac{s}{t} = 9.8t + 4.9(\Delta t)$

, 1) 20.58 , 2) 20.09 , 3) 19,649

, 4) 19.6049 , $19.6\ ms^{-1}$ السرعة هى

(5) 6

(6) $\Delta y = 3x^2\,(\Delta x) + 3x\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

., $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\,(\Delta x) + (\Delta x)^2$

., 12

(7) $\Delta y = \dfrac{-\Delta x}{x^2 + \Delta x}$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-1}{x^2 + x \,.\, \Delta x}$

135° = الزاوية , −1 = الميل ،

(8) a) 6 b) 4 , c) 3

(9) a) 6 b) 18 , c) 10

Exercise (3)

(1) $8x^7$, 7 , $\dfrac{1}{5}$, 0.007 , $\dfrac{5}{3}.x^4$, $48x^3$, $12x^{13}$

(2) $5c\,x^4$, $\dfrac{7ab}{c}x^6$, $3b\,x^{3b-1}$, $2(4a+1)x^{4a}$, $6\pi x$

(3) 5 , $\dfrac{2}{3}$, -5 , a

(4) $\dfrac{x^2}{2}$, x^2 , $\dfrac{x^3}{3}$, $\dfrac{x^3}{12}$, $\dfrac{x^8}{8}$, $\dfrac{1}{4a+1}.x^{4a+1}$

, $\dfrac{1}{n+1}.x^{n+1}$, x^5 , $\dfrac{3}{20}x^5$

(5) $2at$

(6) $30t$

(7) $2\pi r$

(8) $4\pi r^2$, 144π

(9) $\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$, $\dfrac{-2}{x^2}$, $\dfrac{-3}{2\,.\,x^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$, $\sqrt[4]{3} \times \dfrac{3}{4x^{\frac{1}{4}}}$

(10) $\dfrac{0.6}{x^{0.4}}$, $\dfrac{1.05}{x^{0.85}}$, $-\dfrac{3.2}{x^{1.4}}$, $\dfrac{-9}{x^2}$, $\dfrac{-n}{x^{n+1}}$

(11) $7.5\,x^{1.5}$, $-\dfrac{5.2}{x^{2.3}}$, $\dfrac{5.6}{x^{-0.3}}$, $\dfrac{-5}{2x^{\frac{3}{2}}}$

(12) $\dfrac{-60}{V^3}$

(13) 20.25 , 0 (14) $\dfrac{4}{3}$

(15) -0.02 , -0.5 , -2 , -8

(16) $\frac{-2}{x^3}$

(17) $x = 1$

(18) $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(19) $x = \frac{1}{16}$

(20) $x = \frac{1}{2}$

Exercise (4)

(1) $18x^2 + 10x$

(2) $\frac{-3}{x^2} + 2$

(3) $9x^2 + 1$

(4) $\frac{-4}{x^2} + \frac{4}{x^3} = \frac{4}{x^2}\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

(5) $16x^3 + 6x - 2$

(6) $x + \frac{1}{8}$

(7) $3 - 4x + 6x^2$

(8) $\frac{3}{\sqrt{x}}$

(9) $10x - \frac{1}{3\sqrt{x^3}}$

(10) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

(11) $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

(12) $2x^2 + x - \frac{10}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(13) $\frac{-21}{x^4} + \frac{10}{x^3} - \frac{3}{x^2}$

(14) $x^4 - x^3 + x^2 - x$

(15) $\frac{-1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 2$

(16) $u + at$

(17) $5 + 16t$

(18) $4t - 3$

(19) $3a\,x^2 + 2b\,x + c$

(20) $2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

(21) $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

(22) $3(1 + x)^2$

(23) $3n\,x^{3n-1} - 3n\,x^2$

(24) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{5}{x^2}$

(25) $\frac{dy}{dx} = |\,4x - 3\,|_{x=1.5} = 3 \qquad , x = \frac{3}{4}$

(26) $\frac{dy}{dx} = 6x \qquad , x = 0$

(27) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x - 5$, -10 , -9 , -2

(28) $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x = \pm 1$, $(1, 2), (-1, -2)$

Exercise (5)

(1) $20x + 9$ (2) $\frac{3x^2}{2} + 2x + 1$

(3) $(2x - 3)(2x + 3) + 2(x^2 + 3) = 3(x^2 - 1)$

(4) $6x(x^2 + 2) + 2x(3x^2 - 1) = 2x(6x^2 + 5)$

(5) $(x^2 - 2x)(6x - 1) + (3x^2 - x)(2x - 1) = 3x(4x^2 - 6x + 1)$

(6) $(x^2 + x - 1) + (x + 1)(2x + 1) = x(3x + 4)$

(7) $(x^2 - x + 1) + (x - 1)(2x - 1) = 3x^2 - 4x + 2$

(8) $2x(x^2 + 3x - 2) + (x^2 - 3)(2x + 3) = 4x^3 + 9x^2 - 10x - 9$

(9) $2x(x^2 - 2) + 2x(x^2 + 2) = 4x^3$

(10) $2(2x^3 - x + 1)$ (11) $3(x^2 - 7)$

(12) $6x^4 + 16x^3 - 7x^2 - 24x - 3$

(13) $4x(x^2 - 1)$

(14) $6(3x^2 + 5x + 2)$

(15) $(ax^2 + bx + c) \times u + (ux + 5v)(2a\,x + b)$

(16) $\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x + 1)(x^2 - 2x + 3) + 2\sqrt{x}(x^2 - 2x + 3)$

$+ \sqrt{x}(2x - 2)(2x + 1)$

(17) $\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}(\sqrt{x} - 2) + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}(\sqrt{x + 1}) + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 2)$

(18) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(\sqrt[4]{x^3})(\sqrt[5]{x^2}) + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}(\sqrt[3]{x})(\sqrt[5]{x^2}) +$

$$+ \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} \left(\sqrt[4]{x^3}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right)$$

(19) $2a\ bx\ .\ c\sqrt{x^3} + \frac{3c}{2}\sqrt{x}\ .\ ab\ x^2 = 3.5\ abc\ \sqrt{x^5}$

Exercise (6)

(1) $\frac{-6}{(3x-1)^2}$

(2) $\frac{4x}{\left(1-2x^2\right)^2}$

(3) $\frac{-4}{(x-4)^2}$

(4) $\frac{3}{(x+2)^2}$

(5) $\frac{11}{(2x+3)^2}$

(6) $\frac{-2b}{(x-b)^2}$

(7) $\frac{2b}{(x+b)^2}$

(8) $\frac{x^2-6x}{(x-3)^2}$

(9) $\frac{-6x}{\left(x^2-3\right)^2}$

(10) $\frac{-\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x-1)^2}$

(11) $\frac{\left[\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]}{2}$

(12) $\frac{\frac{-1}{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$

(13) $\frac{6x^2}{\left(x^3+1\right)^2}$

(14) $\frac{2\left(x^2-x-1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

(15) $\frac{\left(7x^2-11x\right)}{\left(3x^2+x-1\right)^2}$

(16) $\frac{\left(x^2-1\right)}{x^2}$

(17) $\frac{6b^2\ x}{\left(b^2-x^2\right)^2}$

(18) *zero*

(19) $\frac{3x^2-2}{(x+2)^2}$

(20) $\frac{-\left(x+\sqrt{3}\ x\right)}{x^3}$

Exercise (7)

(1) $6(3x+2)$, $-12(1-3x)^3$, $\dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$

(2) $\dfrac{3}{(1-3x)^2}$, $-6(2-3x)$, $\dfrac{1}{\sqrt{(1-2x)^3}}$

(3) $10x\left(x^2-3\right)^4$, $-3x\sqrt{1-x^2}$, $\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-5}}$

(4) $\dfrac{6x}{\left(1-3x^2\right)^2}$, $\dfrac{-3x}{\sqrt{1-3x^2}}$, $\dfrac{-2x^2}{\sqrt{1-2x^2}}+\sqrt{1-2x^2}$

(5) $\dfrac{1}{(4-x)^2}$, $\dfrac{1}{2(4-x)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{2}{(4-x)^3}$

(6) $\dfrac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}$, $\dfrac{-x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

(7) $\dfrac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)^3}}$, $\dfrac{-1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}$

(8) $\dfrac{1-x-x^2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$, $\dfrac{2x}{3\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}}$

(9) $\dfrac{x}{\sqrt{c^2+x^2}}$, $\dfrac{-x}{\left(c^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

(10) $\dfrac{4x-1}{2\sqrt{1-x-2x^2}}$, $-6nx\left(1-3x^2\right)^{n-1}$

(11) $\dfrac{x\left(2c^2-x^2\right)}{\left(c^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, $3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(12) $\dfrac{-x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{\left[\dfrac{2x}{\sqrt{1+4x}}-\sqrt{1+4x}\right]}{x^2}$

(13) $\frac{-2x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}+\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$, $\frac{\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}}-2\sqrt{1+x^2}}{4x^2}$

(14) $\left[\frac{-x^2}{2\sqrt{2-x}}+2x\sqrt{2-x}\right]$, $\frac{5-6x}{2\sqrt{3x^2-5x+2}}$

(15) $\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{3x}{2\sqrt{3x+2}}+\sqrt{3x+2}$

(16) $\frac{-(4x+5y)}{(5x+14y)}$

(17) $-\frac{2x(x^2+y^2)-x}{2y(x^2+y^2)+y}$

(18) $-\frac{x^2-y}{y^2-x}$

(19) $-\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}$

(20) $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+3}{2y+4}=\frac{1}{6}$ *at* (1,1)

Exercise (8)

(1) $6x(x-1)$, $6(2x-1)$, 12

(2) $2ax^{2a-1}$, $2a(2a-1).x^{2a-2}$, $2a(2a-1)(2a-2).x^{2a-3}$

(3) $(12x^3-12x^2+4x-7)$, $(36x^2-24x+4)$, $72x-24$

(4) $10x^4-9x^2+4$, $40x^3-18x$, $120x^2-18$

(5) $\frac{-1}{x^2}$, $\frac{2}{x^3}$, $\frac{-6}{x^4}$

(6) $\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{3}{8x^{\frac{5}{2}}}$

(7) $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $\frac{-1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$, $\frac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}$

(8) $\frac{-2}{x^3}, \frac{6}{x^4}, \frac{-24}{x^5}$

(9) $\frac{\lfloor n}{2a}\left[\frac{1}{(a-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(a+x)^{n+1}}\right]$

(10) $-5, \frac{5}{12}$, أسفل نقطة على المنحنى

(11) $x=3$, $x=2$, $2.5=0.25$ (أسفل نقطة على المنحنى)

(12) $-7, 2, 0, \frac{10}{3}$

Exercise (9)

(1) $\frac{dy}{dx}=2x-2$, -4 , -2 , 2 , 4 , $x=1$, $\frac{d^2y}{dx^2}=+ve$, (min. *pt*)

(2) max *value* $=4$, $x=0$, min. *value* $=0$, $x=2$

(3) $\frac{dy}{dx}=3-2x$, 3 , 1 , -1 , -3 , 1.5 , $-ve$, max.

(4) max . *value* $=-4$, $x=-\frac{1}{2}$, min . *value* $=4$, $x=\frac{1}{2}$

(5) *a*) min . *value* $=-16$, $x=2$, max . *value* $=16$, $x=-2$

b) max . *value* $=2$, $x=3$, min . *value* $=-2$, $x=1$

c) max . *value* $=12$, $x=0$, min . *value* $=-20$, $x=4$

d) max . *value* $=5$, $x=1$, min . *value* $=4$, $x=2$

e) max . *value* $=41$, $x=-2$, min . *value* $9\frac{3}{4}$, $x=\frac{1}{2}$

(6) *a*) $x=\frac{1}{4}$, min   *b*) $-\frac{1}{4}$, min

c) $x=\frac{1}{3}$, max   *d*) $x=-2$, min

(7) *a*) $(-5, 120)$max , $(1, 12)$min , $(-2, 66)$ infl

b) $(-1, 37)$max , $(6, -306)$min , $\left(\frac{5}{2}, \frac{-269}{2}\right)$ infl

$c)\ (-1\ ,\ 40)\max\ ,\ (-2\ ,\ 33)\ and\ (2\ ,\ -95)\min\ ,\ \text{infl.}\ at:\ x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{3}$

$d)\ No\ \max\ ,\ No\ \min\ ,\ (1\ ,\ -1)\ \text{infl}$

$e)\ \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\ ,\ \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)\max\ ,\ \left(\frac{-\sqrt{6}}{3}\ ,\ \frac{-4\sqrt{6}}{9}\right)\min$

$f)\ No\ \max\ ,\ No\ \min\ ,\ (0\ ,\ 5)\ \text{infl}$

(8) العددان هما : 5 , 5 (9) $x=-3\ ,\ x=2\ ,\ x=\frac{-1}{2}$

(10) $x=0$ (11) max "0.385", min "−0.385", $gradiant=-1$

(12) $(a)\ 6\ ,\ 6$, $(B)\ 6\ ,\ 6$, $(C)\ 4\ ,\ 8$, $(D)\ 3\ ,\ 9$

(13) $12\sqrt{2}\times 12\sqrt{2}$ (14) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (15) $\frac{1}{2}=\frac{\text{القطر}}{\text{العرض}}$

(16) $\frac{1}{\pi}=\frac{\text{القطر}}{\text{الطول}}$ (17) $3a$ (18) 20 cm

(19) $R^2\ at\ height=\frac{R}{\sqrt{2}}$

(20) $r=2\ inch$, $h=4\ inch$ (21) $decr\ .\ at\ \frac{35}{\sqrt{29}}\ km/h$

(22) 86.4 $cm^2/\min$ (23) 8 $m/\sec$

(24) 60° (25) $\cong 2.42\ cm$ (26) الارتفاع = القطر

(27) 1 (28) العرض = الطول (29) نصف القطر = العمق

(30) $\sqrt{3}$ مرة (31) $\frac{x}{2}\ km =$ بعد $\frac{x}{2v}$ ساعة ويكون أقل بعد

(32) 2.52 m , 1.26 m (33) 10 $cm^2/\sec$

(34) $\frac{\pi}{8}\ m/\min$ (35) 33.2 $ft/\sec$

(36) 50 km/h (37) $5\frac{5}{7}\ ft/\sec$, $1\frac{5}{7}\ ft/\sec$

(38) $\frac{5}{18}\pi\ ft/\min$

(39) $L=5.6\ m$

$L = \frac{2.4}{\sin\alpha} + \frac{1.6}{\cos\alpha}$: ويتم تحديده باعتبار النهاية العظمى للدالة

(40) $4 \times 4 \times 2m$

(41) $6 \times 6 \times 3$ ft

(42) 4 cm , $\sqrt{3} = 1.732$

(43) $x = 1.5$

(44) 75×100 , 75×100 $i.e$ 150×100 or $3 \times 100 + 2 \times 150$

(45) 1 , $2\sqrt{2}$

(46) $2\sqrt{5}$ $mile$

(47) $2(1+\sqrt{6}) \times 3(1+\sqrt{6})$ $inch$.

(48) $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ زاوية نصف قطرية ؛

(49) $\frac{18}{\pi + 4} \cong 2.52$

(50) على بعد $18m$ من مصدر الضوء الأقوى

(51) V_{max} $\frac{128}{9} \times 1000$ cm^3

عند ارتفاع $20cm$

(52) $\frac{1}{m} = \cos\alpha$ ، ولكن بشرط أن يكون $\frac{1}{m} \le \frac{a}{AB}$

حيث a مسقط AB على اتجاه الخط الحديدى .

Exercise (10)

(1) $\tan^{-1} 3$

(2) $40^\circ\ 54'$ or $139^\circ\ 6'$

(3) $x - y + 2$, $x + y + 2 = 0$

(4) $(-2, -4)$

(5) $18x - y = 27$, $x + 18y = 489$

(6) $3y - 5x + 16 = 0$

(7) $\left\{ \begin{array}{l} y + 2x + 7 = 0 \text{ معادلة المماس} \\ , x - 2y + 1 = 0 \text{ معادلة العمودى} \end{array} \right\}$

(8) $\tan^{-1} \frac{4}{3}$

(9) 45° , 135°

(10) $y = 3 - x$, $y = x - 1$

(11) 16

(12) $(\frac{5}{2}, \frac{25}{4})$, $x = \frac{5}{2}$, $(1, 13)$, $x = 1$

(13) $2x + 9y = 20$

(14) $y = x^2 - 3x + 4$

ثم نحدد "b" من الشرط : $y' = 2x + b = 4 + b = 1$

وتُعين "c" من الشرط : أن النقطة (٢ , ٢) هى نقطة التماس

(15) $b^2 x_1 x + a^2 y_1 y - a^2b^2 = 1$

(16) $-\dfrac{b}{a^2}$ (17) $2y + x + 3 = 0 , 2y - x - 1 = 0$

(18) $(-6 , 10 , 15)$

(19) $y - 1 = \dfrac{-3}{2}(x - 1)$ (20) $y - \dfrac{2x}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{3}$

(21) $3x - y - 1 = 0$, $x + 3y - 17 = 0$

(22) $m = \tan\theta = \pm 4$

(23) $\left\{ \begin{array}{l} y = -4x + 8 \\ , y = -\dfrac{x}{4} - 2 \end{array} \right\}$, $\Phi = \tan^{-1}\dfrac{15}{8} \cong 62°$

(24) $x + 2y = 4\sqrt{2}$

(25) $[n\pi , n = 0 , 1 , 2 , ...]$

(26) $y = 8 - 4x$, $x - 4y = 2$

(27) $(3 , 2)$, $(-3 , -2)$

(٢٨) قيم x تخيلية فلا يوجد مماس

(29) $34° , 36°$ (30) $83° , 14°$ (31) $53° , 0°$ (32) $90°$

(33) $y = 4x$, $y = -4(x - 4)$

(34) $x = \pm 4$, $y = 8$ (35) $y = \pm 3x + 8$, $y = 0$

(36) $y = \pi - x$ (37) $y = x + \dfrac{2}{3}$

(38) $y = \dfrac{-x}{2} + 2$ (39) $y = 0$, $y = \pm\dfrac{1}{2}(3x - 1)$

(40) $\left\{ \begin{array}{l} 9x - 11y + 38 = 0 \\ , 11x - 9y + 24 = 0 \end{array} \right\}$ (41) $\left\{ \begin{array}{l} 4x + y = 16 \\ x - 4y = 4 \end{array} \right\}$

(42) $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + 10 = 0 \\ , 2x - 3y = 0 \end{array} \right\}$ (43) $\left\{ \begin{array}{l} 8x - y = 4 \\ , x + 8y = 32 \end{array} \right\}$

(44) $at\ t=0\ ,s=3\ ,\ v=1\ ,\ a=0$

(45) $at\ t=0\ ,\ s=-7\ ,v=6\ ,\ a=2$

(46) $at\ t=0\ ,\ s=-3\ ,v=2\ ,\ a=2$

(47) $at\ t=0\ ,\ s=-5\ ,v=3\ ,\ a=-6\ [,\ at\ v=0\ ,s=-4\ ,a=0]$

(48) $at\ t=0\ ,\ s=0, v=80\ ,\ a=-32$

$at\ v=0\ ,\ s=100\ ,\ a=-32$

(49) $\dfrac{u^2\sin^2\theta}{2g}\ ,\ \dfrac{u^2\sin 2\theta}{2g}$

(50) $[a=2-10t]$, $\dfrac{5}{2}$ = الزمن بين لحظتى السكون

(51) $s=\dfrac{4}{3}\ ,\ t=3\ ,\ t=1$ تتوقف عند

(52) 2 sec , 2 sec , 64 ft

(53) $h\cong 734.7\ ,\ t\cong 12.2$ sec

(54) $v=3$

(55) 87 $m/\sec$, 60 $m/\sec$, 18 $m/\sec^2$

(56) 144 ft , 96 $ft/\sec$

(57) $v=12.58\ ,\ a=3.904$

(58) $s=87\ ,\ a=48$

(59) $v=-1\ ,\ a=8$

(60) $v=53\ ,\ a=44$

(61) $v=24\ ,\ a=44$

(62) $t=2\sec\ ,\ a=-12\ m/\sec^2$

وفى اتجاه مضاد لاتجاه بدء الحركة

(٦٣) تنعدم السرعة مرة واحدة عند $t=4$ ، العجلة تساوى

$t=\dfrac{2}{3}\ ,\ t=2$ عندما $5m/\sec^2$

$,[V]_{t=2}=-120\ m/\sec\ ,[V]_{t=2/3}=-57.8\ m/\sec$

Exercise (11)

(1) $\frac{1}{3}$ *rad* , $60°/\pi$

(2) $\frac{1}{4}$ *rad* , $45°/\pi$

(3) 4 *rad* , $720°/\pi$

(4) $\frac{\pi}{5}$ *rad* , $36°$

(5) 1 *rad* , $180°/\pi$

(6) $5 \cos 5x$

(7) $5 \cos x$

(8) $\frac{-1}{3} \sin \frac{x}{3}$

(9) $\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2}$

(10) $0.6 \sec 0.6x \, . \tan 0.6x$

(11) $\frac{-1}{6} \operatorname{cosec} \left(\frac{x}{6}\right) \cot \left(\frac{x}{6}\right)$

(12) $3(\cos 3x - \sin 3x)$

(13) $2 (\cos 2x + \sin 2x)$

(14) $\sec x (\tan x + \sec x)$

(15) $4\cos 4x - 5\sin 5x$

(16) $\frac{-1}{3} \sin\frac{\theta}{3} + \frac{1}{4}\cos\frac{\theta}{4}$

(17) $2\cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

(18) $\sin (3\pi - x)$

(19) $\frac{7}{2} \operatorname{cosec} \left(A - \frac{7}{2}x\right) \cot \left(A - \frac{7}{2}x\right)$

(20) $4\sin^3 x \cos x$

(21) $6x^5 \cos x^6$

(22) $-12 \cos^2 4x - \sin 4x$

(23) $2x \sec^2 x \tan x^2$

(24) $-\frac{\sec^2 \sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}$

(25) $n (a \cos nx - b \sin nx)$

(26) $B \sin x$

(27) $\sec^3 \frac{x}{3}$

(28) $-3\sin \left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

(29) $3 \sec^2 3x - 3\tan^2 x \, . \sec^2 x$

(30) $3x^2 + \frac{3}{4} \cos \frac{x}{4}$

(31) $\frac{a}{x^2} \sin\frac{a}{x}$

(32) $2(x\cos x + \sin x)$

(33) $\frac{\sin x - x\cos x}{2\sin^2 x}$

(34) $6\sin^2 x \cos x^2$

(35) $2x.\sec^2 x = 2\tan x$

(36) $\dfrac{\tan x - x\sec^2 x}{3\tan^2 x}$

(37) $\dfrac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}$

(38) $3\cos 3x + \cos(3x)^2 \times 18x$

(39) $-6\sin x^2 \cos^2 x^2$

(40) $2x \tan x + x^2 \sec^2 x$

(41) $-4 \text{ cosec } (4x+1)$

(42) $\dfrac{\sin x - 2x \cos x}{2\sqrt{x} \sin^2 x}$

(43) $x^3 - \sin(2x) \times 2 + 3x^2 \cos 2x$

(44) $\dfrac{2\sin x}{(2+\cos x)^2}$

(45) $\dfrac{-\sin x(1-\sin x)-(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$

(46) $2 \cot 3x - 3\text{cosec}^2\, 3x$

(47) $\dfrac{-\sin x}{3\sqrt[3]{(\cos x)^2}}$

(48) $2\left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right)$

(49) $4\sin x \cos x$

(50) *zero*

(51) $2x \dfrac{(\cos 2x + x \sin 2x)}{\cos^2 2x}$

(52) $\dfrac{\sin x \cos x\,(2+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$

(53) $\sin x + \cos x$

(54) $\dfrac{2\sin x + x\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

(55) $6\pi \cos(2\pi x)$

(56) $\sec x \left(2\sec^2 x - \text{cosec}^2\, x\right)$

(57) $\dfrac{2\sec^2 x}{(2-\tan x)^2}$

(58) $5\cos 5x$

(59) $-4\sin 4x$

(60) $2x\cos x^2$

(61) $-4\cos^3 x \times \sin x$

(62) $\dfrac{3\cos x}{2\sqrt{\sin 3x}}$

(63) $-2t^2 \cos t \sin t + 2t\cos^2 t$

(64) $\cos(2t+2)$

(65) $\dfrac{2t\cos 2t - \sin 2t}{2t^2}$

(66) $\dfrac{-2a\sin t}{(a-\cos t)^2}$

(67) $\dfrac{-2a\sec^2 z}{(a+\tan z)^2}$

(68) $5\sec 5z \,.\, \tan 5z$

(69) $\operatorname{cosec}(1-z)\,.\,\cot(1-z)$

(70) $z^3\sec z\tan z + 3z^2\sec z$

(71) $\dfrac{\sec z\tan z}{(1+\sec z)^2}$

(72) $-\dfrac{1}{x^2}\sin^2(1-x^2)\left[6x^2\cos(1-x^2)+\sin(1-x^2)\right]$

(73) $\dfrac{\sin(x+y) - y\cos x}{\sin x - \sin(x+y)}$

(74) $\dfrac{2x\tan y + y\sec^2 x}{x^2\sec^2 y + \tan x}$

(75) $\dfrac{2x\sin x^2 - y^2\sec x\tan x}{2y\sec x}$

(76) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

(77) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

(78) $x(2\sin x + x\cos x)$

(79) $x\left(\dfrac{\sin 2x + x}{\cos^2 x}\right)$

(80) $\dfrac{\cos x - 2x\sin}{2\sqrt{x}}$

(81) $\dfrac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}$

(82) $\dfrac{2\sin^2 x}{\sqrt{2x - \sin 2x}}$

(83) $\dfrac{-\sin 2x}{4\sqrt[4]{\left(1+\cos^2 x\right)^3}}$

(84) $\dfrac{-\cot^2 \frac{x}{3}}{\sin^2 \frac{x}{3}}$

(85) $\dfrac{2\sin^2 2\theta}{\sqrt{2\theta+\cos^2\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)}}$

(86) $\sec^6 x$

(87) $\dfrac{1}{2}\cos\theta$

Exercise (12)

(١) عظمى ، $x=\frac{\pi}{6}$ ، صغرى ، $x=-\frac{\pi}{6}$

(٢) عظمى عند $x=\frac{\pi}{4}$

(٣) عظمى عند `29 °14 ، عند `31 °165 ، صغرى عند °90

(٤) عظمى ، $x=\frac{\pi}{3}$

(٥) عظمى ، $x=\frac{\pi}{4}$

(٦) عظمى ، $x=\tan^{-1} 2$

(٧) `42 °33 تقريباً

(٨) صغرى ، 1− ، عندما $x=\frac{\pi}{4}$

Exercise (13)

(1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{-\pi}{4}$

(4) 0 (5) $\frac{\pi}{6}$

(6) (231.6°) (7) 16.6° (8) 111.9°

(9) 22.4° (10) -40.1° (11) 23.7°

(12) $\left(\pi - \cos^{-1} x\right)$ (13) $\dfrac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$

(14) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ (15) $\dfrac{-1}{\sqrt{9-x^2}}$

(16) $\dfrac{-b}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(17) – [a] $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (17) – [b] $\dfrac{a}{a^2+x^2}$

(18) $\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$ (19) $\dfrac{-4x}{\sqrt{1-4x^4}}$

(20) $\dfrac{-1}{1+(a-x)^2}$ (21) $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

(22) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ (23) $\sin^{-1} x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(24) $\dfrac{3}{\sqrt{6x-9x^2}}$ (25) $\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(26) $\dfrac{-2}{x\sqrt{x^2-4}}$ (27) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + 2x \sin^{-1} x$

(28) $\dfrac{2}{x^2-2x+5}$ (29) $\dfrac{1}{1+x^2}$

(30) $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (31) $\dfrac{2}{\sqrt{a^2x^2-1}}$

(32) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$ (33) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(34) $\dfrac{-2}{x^2+1}$ (35) $\dfrac{2}{1+x^2}$

(36) $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ (37) $\dfrac{3}{2x^2+2x+5}$

(38) $\dfrac{-3x^2}{9+x^2} + 3x^2 \cot^{-1} \dfrac{x}{3}$

(39) $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$ (40) $\dfrac{1}{x\sqrt{25x^2-1}}$

(41) $\frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{cosec} x}$

(42) $2x \tan^{-1} x+1$

(43) $\frac{-1}{2\sqrt{4-x^2}}$

(44) $\frac{-1}{x^2+1}$

(45) $\frac{2x^2}{\sqrt{2-x^2}} + 2x \cos^{-1}(1-x^2)$

(46) $\tan^{-1} x+\frac{x}{1+x^2}$

(47) $\sec^2 x \sin^{-1} x+\frac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}}$

(48) $\frac{4x \sin^{-1}(x^2-2)}{\sqrt{4x^2-x^4-3}}$

(49) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(50) $4x\ arc \cos x$

Exercise (14)

(1) $6e^{6x}$

(2) $\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}$

(3) $\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

(4) $-3e^{-3x}$

(5) $\frac{-7}{3}.e^{-\frac{7}{3}x}$

(6) $-3.e^{(4-3x)}$

(7) $-a\ e^{-ax}$

(8) $\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}$

(9) $a\ e^{ax+b}$

(10) $-9\ e^{-9x}$

(11) $e^{\sin x} \cos x$

(12) $e^x(x^2+2x)$

(13) $\frac{e^x}{e^x-1}$

(14) $e^{-2x}(\cos x-2\sin x)$

(15) $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

(16) $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

(17) $2x\ e^{x^2}$

(18) $(x+1)\ e^x$

(19) $(1-x)e^{-x}$

(20) $xe^{-x}(2-x)$

(21) $e^x(x+5)$

(22) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(23) $2^x \ln 2$

(24) $e^{\frac{1}{x}}(3x^2-x)$

(25) $e^x(\sin x+\cos x)$

(26) $10e^x$

(27) $\frac{2\times 10^{2x}}{0.4343}$

(28) $x^{n-1}.a^x.(n+x\log a)$

(29) $2a^{2x+1} \log a$

(30) $-\sin x\ e^{\cos x}$

(31) $2bx\ a^{bx^2} \log a$

(32) $(a+b)^x \log (a+b)$

(33) $e^{\tan x}.\sec^2 x$

(34) $\frac{3}{x}-3$

(35) $\frac{-y^2e^x+2xe^y}{x^2e^y+2ye^x}$

(36) $\frac{e^x\sin y+e^y\sin x}{e^y\cos x-e^x\cos y}$

(37) $\frac{1}{x}$

(38) $\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$

(39) $1+\log x$

(40) $\cot x$

(41) $\frac{2a}{a^2-x^2}$

(42) $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(43) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(44) $\frac{1}{\sin x}$

(45) $\frac{e^x(2x-1)}{2x^{\frac{3}{2}}}$

(46) $-abe^{-bx}(\sin bx-\cos bx)$

(47) $\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$

(48) $\frac{1}{1+e^x}$

(49) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}.(b-x)}$

(50) $\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$

(51) $\frac{-a}{x\sqrt{b^2-x^2}}$

(52) $\frac{2}{e^x+e^{-x}}$

(53) a^2e^{ax} , a^3e^{ax} , a^4e^{ax} , a^ne^{ax}

(54) a^2e^{-ax} , $-a^3e^{-ax}$, a^4e^{-ax} , $(-1)^na^ne^{-ax}$

(55) $\frac{-1}{x^2}$, $\frac{1\times2}{x^3}$, $\frac{-1\times2\times3}{x^4}$, $\frac{(-1)^{n-1}\underline{|n-1}}{x^n}$

(56) $\frac{(5x-2)\sqrt{x-1}}{2}$

(57) $-x^{-x}(1+\ln x)$

(58) $\dfrac{x^4-8x^2-16}{\left(4x^2+x^4\right)\sqrt{\left(16-x^4\right)}}$

(59) $2\,x^{\ln(x-1)}\,.\,\ln x$

(60) $\left(\sin^{-1}x\right)^x\left[\dfrac{x}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}}+\ln\left(\sin^{-1}x\right)\right]$

(61) $e^{-x^2}\sin 3x\left[6\cos 3x-3x^2\sin 3x\right]$

(63) $2x+3^x\log 3$

(64) $-2x\,e^{-x^2}$

(65) $e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$

(66) $2a\left(e^{2ax}-e^{-2ax}\right)$

(67) $\dfrac{2\cot^2 x}{\sin x}$

(68) $\left(2x+x^2\log 2\right).2^x$

(69) $\dfrac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}\left(\cos\dfrac{x}{a}-\sin\dfrac{x}{a}\right)$

(70) $a^{\sin x}\cos x\log a$

(71) $\dfrac{1}{\cos x}$

(72) $2x(1-x)e^{-2x}$

(73) $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$

(74) $\dfrac{2}{x-ax^5}$

(75) $-\tan x\sin^2 x$

(76) $\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2+1}}$

(77) $x^{\frac{1}{x}}.\dfrac{1-\log x}{x^2}$

(78) $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

(79) $\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$

(80) $\dfrac{-1}{\sqrt{x-4x^2}}$

(81) $\cot 2x$

(82) $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(83) $2\sqrt{1-x^2}$

(84) $2e^x\sqrt{1-e^{2x}}$

(85) $\dfrac{2e^{2x}}{e^{4x}+1}$

(86) $\dfrac{3e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$

(87) $\sqrt{\dfrac{2}{x}-4}$

(88) $\dfrac{4e^x}{1-e^{8x}}$

Exercise (15)

(1) $\dfrac{1}{4}\cosh\dfrac{x}{4}$ (2) $3\cosh 3x$

(3) $\dfrac{1}{3}\sinh\dfrac{x}{3}$ (4) $b\ \text{sech}^2\ bx$

(5) $\dfrac{1}{2}\text{sech}^2\dfrac{x}{2}$ (6) $b(\cosh bx+\sinh bx)$

(7) $\dfrac{-1}{x^2}\cosh\dfrac{1}{x}$ (8) $\sinh 2x$

(9) $3\cosh^2 x\sinh x$ (10) $a\ \cosh(ax+b)$

(11) $n\,a\ \sinh^{-1}(ax)\cosh(ax)$

(12) $2\tanh x\ \text{sech}^2\ x$

(13) $x\cosh x$

(14) $3x^2\sinh 3x+3x^3\cosh 3x$

(15) 1 (16) $\text{sech}^2 x\ e^{\tanh x}$

(17) $\dfrac{-2}{(1+x)\sqrt{2(1+x^2)}}$ (18) $\dfrac{2}{1-x^2}$

(19) $\dfrac{2}{1-x^4}$ (20) $\dfrac{1}{2}\sec h\ x$

(21) $\tanh^2 x$ (22) $-\dfrac{4}{\sinh^2 2x}$

(23) $4\sinh 4x$ (24) $\coth^2 x$

(25) $\sqrt{\cosh x+1}$ (26) $\dfrac{1}{\cosh x}$

(27) $\dfrac{2}{\sinh 2x}$

Exercise (16)

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}},\dfrac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$ (2) $\dfrac{a}{y^2},-\dfrac{2ax}{y^3}$

(3) $y x^{y-1}$, $x^y \log x$ (4) $\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{-x}{x^2+y^2}$

(5) $\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

(6) $3x^2+6xy+6y^2$, $3x^2+12xy+6y^2$

(7) $-2x \sin(x^2+y^2)$, $-2y \sin(x^2+y^2)$

(8) $(2xy+y^3)\, dx+(x^2+3xy^2)\, dy$

(9) $2(ax+by)\, dx+2(bx+cy)\, dy$

(10) $\frac{ydx-xdy}{y^2}$

(11) $\frac{y}{x}dx+\log xdy$

(12) $e^{xy}(ydx+xdy)$

(13) $a^x e^y(\log a dx+dy)$ (14) 0.04 تقريباً

(15) $5x^4$ كل منهما تساوى

(16) $150\pi\ \Delta\ m^3/\sec$

(17) $-2x$, $-4y$

(18) $\frac{-x}{z}$ (19) $\frac{dz}{dy}=\frac{-2y}{3z}\ (if\ z\neq 0)$, $\frac{dz}{dx}=\frac{-x}{3z}$

(20) $\frac{-2xy+y^2}{x^2+2xy}$

(21) $\frac{dw}{dx}=\left(2+\cos^2\frac{\pi}{6}-2\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(-\sin\frac{5\pi}{12}\right)-$

$-\left(\cos^2\frac{5\pi}{12}-2\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}-3\right)\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(22) $a=b=c$ ذات قيمة عظمى عندما $a\times b\times c$ تكون

وهذا ينطبق على أى عدد من العوامل أى $(a\times b\times c\times d\times ...)$.

الفهرس

رقم الإيداع ١٣٧٩٩ / ٩٨
977-271-308-x

هـذا الكتـاب

لقـد غـرس علم الرياضـيـات جـذوره فى مـجـال الصناعـة والتكنولوچيـا منذ القـدم .. ومع نشـأة علم التـفـاضل توغلت أغـصـان الرياضـيـات بين جـمـيع جنبات الأبحـاث والدراسـات التكنولوچية الحديثة التى تقدم كل يوم ما هو جديد ومفيد .

إن علم التفاضل هو أحد بوابات علم الرياضيات للانطلاق نحو العالم الحديث.. عالم التطور السريع المتلاحق .

وإذا كانت الرياضيات بصفة عامة لها سحرها وجاذبيتها لدى الباحثين والدارسين ، فإن حساب التفاضل له مذاق خاص .. بشرط أن يستوعبه الدارس ويفهم مبادئه من ناحية ، وآفاقه من ناحية أخرى ، وأن يستشعر نواتجه وتطبيقاته..

ونحن نقدم هذا الكتاب لخدمة قطاع كبير من الباحثين الذين اتخذوا لأنفسهم طريق الجد والاجتهاد للوصول إلى الغاية العظيمة وهى التقدم العلمى لوطنهم وذويهم .

إن هذا الكتـاب يشـرح الموضـوعـات باللغـة العـربيـة مع استعمال الرموز الأجنبية حتى يربط بين لغتنا التى نتحدث بها وبين المراجع الأجنبية التى قد يتعرض لها الباحث فى مشوار حياته مع هذا العلم الراقى .

إننا نرجو أن يحقق هذا الكتـاب الغرض من تقديمه فى خدمة الباحثين عن العلوم النافعة . . والله الموفق

النـاشـر

